

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1923. ČÍSLO 2.

DR. JIŘÍ KRÁL:

ČORNÁ HORA V PODKARPATSKÉ RUSI.

(SÍDLA OBYVATELSTVA. HOSPODAŘSKÉ VYUŽITÍ.)

(LA ČORNÁ HORA DANS LA RUSSIE SUBCARPATHIQUE.
LES HABITATIONS. L'EXPLOITATION.)

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1923. ČÍSLO 2.

DR. JIŘÍ KRÁL:

ČORNÁ HORA V PODKARPATSKÉ RUSI.

(SÍDLA OBYVATELSTVA.
HOSPODÁŘSKÉ VYUŽITÍ.)

(LA ČORNÁ HORA DANS LA RUSSIE SUBCARPATHIQUE.
LES HABITATIONS. L'EXPLOITATION.)

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ.

ČORNÁ HORA V PODKARPATSKÉ RUSI.

Předneseno v Čs. společnosti zeměpisné dne 21. března 1923.

Postupující osídlení a hospodářské využití vysokých hor, v dřívějších stoletích buď málo obydlených nebo vůbec neosídlených, způsobilo, že dnes věnuje se také více pozornosti i těmto krajům s hlediska anthropogeografického. Na území naší republiky zvláštní pozornosti pak v tomto ohledu vyžadují především velehorská pásma v jejím nejvýchodnějším díle, na půdě karpatoruské, na kterých můžeme neobyčejně zřetelně studovati postup osídlení do vyšších, dříve jen nepatrně obydlených pásem, a zároveň konstatovati stav i rozvoj jejich hospodářského využití.

Tu vedle horského pásma Svidovického jest to Čorná hora, přesahující několika svými vrcholky výši 2000 *m*, i dnes trvalým osídlením jen do jisté míry dotčená, které věnujeme v této studii svoji pozornost.[1])

---

1) Protože celková situace politická, jak r. 1921, tak i 1922 a 1923, kdy meškal jsem na Čorné hoře, nedovolila mi, abych navštívil sv. její svahy, ležící na území východní Haliče, byl jsem nucen omeziti se v důsledku toho jen na studium území, nacházejícího se na půdě karpatoruské. Tu pak omezujeme se na t. zv. díl hoverlanský a jeho podhůří a to na s. k údolí potoka Zemiru a Lazeščyny, vycházejíce z koty 879 na pohraničním hřebenu, dále na z. k údolí Černé Tisy až k soutoku jejímu s Bílou Tisou, odtud dále směrem v. k údolí Bílé Tisy a potoka Balzatulu (Tišory) až k nádrži Balzatulské a odtud přímo k Popu Ivanu (Čorné hoře, 2026 *m*). Od Popa Ivana k Hoverle jest to pak vlastní hřeben čornohorský, od Hoverly až ke kotě 879 odnož, tvořící pohraniční hřeben. — Na tomto místě jsem povinen poděkovati slov. p. univ. prof. Dru V. Švamberovi za jeho rady a pokyny i přečtení celé studie, dále univ. prof. Dr. Št. Rudnyckému za mnohá upozornění a zvl. opravy místních názvů, dále slúžnovskému úřadu v Rahově, četnické stanici v Bohdanu, lesní správě a p. strážmistrovi Zajíčkovi tamže, p. asist. Bainerovi v Jasini za některé informace a Klubu čs. turistů za půjčení 9 štočků. Konečně vzdávám dík ministerstvu školství a národní osvěty za stipendium, jež mi dovolilo návštěvy P. Rusi za účelem studijním.

Horopisný a geologický přehled.

Černohorský hřeben, který připojuje se k východním Gorganům u sedla Jablonického (931 *m*, též Tatarského zvaného) odnoží, vycházející z Hoverly, jest mohutný horský hřeben směru zhruba sz—jv, vypiatý k severu, počínající se horou Sešulem (1728 *m*),[2]) od které postupuje směrem svs. k Pietroši (2022 *m*) a Pietrošulu (1855 *m*), kde spojuje se s odnoží, vypínající se k sz. a končící Sešou (1564 *m*). Od Pietroše směrem v. za sedly 1559 a 1517 dosahuje hoverlanský hřeben nejvyšší své výše Hoverlou (2058 *m*). Tu spojuje se s odnoží, přestupující severněji Kukul (1542 *m*) a sahající k s. až k sedlu Jablonickému a východním Gorganům. Od Hoverly zachovává černohorský hřeben zhruba směr jv. a dosahuje několika bezejmennými vrcholy výše až 1911 *m*, dále Požiževskou výše 1822 *m*, pak výše 1919 *m*, Dancyšem 1866 *m*, Turkulem 1932 *m*. Úzkými Rebry přechází dále na koty 1935, 2000, 1919, 1980, 1986. Za Lemskou horou (2036 *m*) přestupuje koty 1953, 1919, Munčel (2002 *m*), pak řadu bezejmenných vrcholů, dosahujících výše až 1890 *m*. U Popa Ivana (Čorné hory, 2026 *m*) obrací se směrem jjz. a za Horou Vaskulem (1734 *m*) a za Vibčinou (159 *m*) sestupuje k sedlu 1498 *m*. Tento hlavní hřeben čornohorský označen byl Rehmanem[3]) jako díl hoverlanský na rozdíl od další jeho části, dílu crecelaňského, počínajícího Stohem (1655 *m*), dnes trojmezím karpatorusko-východohaličsko-rumunským, a ostatních.

Řada sedel, oddělujících jednotlivé vrcholky, dosahuje pravidlem značné výše: pod Sešulem 1581 *m*, pod Pietrošem 1746 *m*, východněji 1563 *m*, za Zanohou 1517, 1536 *m*, na hřebeni jz. od Hoverly 1824 *m*, 1865 *m*, 1734 *m*, 1819 *m*, 1788 *m*, 1782 *m*, 1919 *m*, 1919 *m*, 1816 *m*, za Popem Ivanem pak 1339 *m*. Neklesá tudíž výše hlavního hřebene v západní části dílu hoverlanského (k Hoverle) pod 1500 *m*, východní pak pod 1700 *m*, čímž jest neobyčejně ztěžován přechod zvláště ve východní jeho části.

Velký počet pravidelných odnoží, vybíhajících z hlavního hře-

---

[2]) Srv. A. Rehman, Karpaty opisane pod względem fizyczno-geograficznym. (Ziemie dawnej Polski i sąsiednich krajów sławianskich, opisane pod względem fizyczno-geograficznym, č. I.) Lvov, 1895, str. 512. — St. Pawłowski, Die Eiszeit in der Czarnahora, Jahrbuch d. k. k. Geol. Reichsanstalt, Wien, 117, 47, 2. seš., str. 211, vychází od Sešy jako nejzápadnější části Čorné hory. — Srv. dále příslušné mapy v měř. 1/75.000 a 1/25.000, vydané voj. zem. ústavem vídeňským.

[3]) Rehmann, Karpaty, str. 512.

bene hoverlanského a oddělených údolími jak na území východohaličské (tu obyčejně v pravém úhlu), tak i paprskovitě na území karpatoruské, dosahuje rovněž velehorské výše. Teprve poznenáhlu se snižují tyto odnože s rostoucí vzdáleností od hlavního hřebene.[4])

Vzhled hlavního hřebene hoverlanského připomíná nám v mnohém hřeben krkonošský, od něhož se odlišuje zvláště tím, že jest užší a nezná velkých, rozsáhlých náhorních rovin, tam zvaných louk. I tu pokryt jest jen na úbočí hustým lesem, výše pak klečí a jalovcem a konečně alpskými loukami, nazvanými poloninami. Hřeben s řadou homolí, kupek nebo ostřejších pyramid zřídka kdy pokryt jest ssutkami a balvany či vyčnívajícími skalami, postrádajícími vegetace, a rozrušen zvětráním. Pravidlem však prudce svažuje se do údolí, zvláště tam, kde nacházíme stopy ledovců (kary, rus. ulohy). Na s. a sv. straně spadá hlavní hřeben dnes celkem prudčeji, takže jest obtížněji přístupný než se z. a j. strany. Naproti tomu však údolí na s. straně jsou širší a umožňují větší osídlení než na straně karpatoruské. Podhůří a pobočná ramena, vybíhající z hlavního hřebene, jsou rovněž většinou oblých tvarů, na svém hřebenu dosti široká, tu mírněji, tam prudce svažu-

---

[4]) Na severní straně hlavního hřebene jest to především odnož, vybíhající k Seše (1564 *m*) a odtud až k Jasini, mohutný, zaoblený to hřeben, na jz. straně obtékaný potokem Kevele, na z. straně Č. Tisou, na v. Lopušankou, dále z Pietrošulu vybíhající hřeben Holoučeski a hruň Kičera, sahající k p. Lazeščyna, a konečně spojka hoverlanského dílu a Gorgan, odbočující od Hoverly k severu a tvořící i říšskou hranici. Dosahuje Kukulem výše 1542 *m*, Hryhorivkou 1378 *m* a Verchem debrym 1238 *m*. Na území východohaličské vybíhá z hlavního hřebenu řada odnoží, které svírají často mohutné kotle, ba i cirky, stopy to dávného zalednění. Z nich svým tvarem zajímavé jsou Špyci (1864 *m*) a Smotrec (1901 *m*). Na území karpatoruském jsou to především pobočná ramena, která spojují se v hoře Sešul (1728 *m*) a sahají od Č. a B. Tisy: rameno Števiory (1249 *m*) a Hruňu Ozirec, obtékané na v. straně p. Pavlek, dále polonina Sešul, postupující až k Bohdanu a dosahující Syhlenem výše 1431 *m*, Kičerou 1307 *m* a Mlakami 1186 *m*. U koty 1607 vybíhá dále z hlavního hřebenu rameno, vrcholící Menčilem (1589 *m*) a sahající k B. Tise na j. a p. Hoverle na v., dále východněji u koty 1842 krátká odnož s Breskulem (1534 *m*), sahající k soutoku Bílého potoka a Ozirny-ho p., tvořících společně p. Hoverlu, pak odnož, vybočující z Turkulu (1932 *m*), dotýkající se na j. p. Brebenjeskulu a na v. p. Gutin. Z nedaleké koty 1980 *m* (bar.) odbočuje dále Tomnatyk Velykyj (1826 *m* a o něco jižněji Tomnatyk Gutynskyj, Malyj (2016 *m*), obtékané na j. p. Brebenjeskulem. Konečně polonina Balzatulska a Lemska, dělící se nad Balzatulskou hatí v řadu menších, kulisově odbočujících odnoží, které postupují směrem jz. a z. až k soutoku Balzatulu a Hoverly, a rameno, vycházející z Hory Vaskul (1734 *m*), uzavírají sběrnou kotlinu p. Balzatulu.

jící se do údolí. Jejich vzhled obdobně jako hlavního hřebene podmíněn jest pak především druhem horniny, z níž se skládají.[5])

G e o l o g i c k á s t a v b a vytčeného dílu hoverlanského jest celkem jednoduchá. Většinou — pokud ovšem máme po ruce zběžné celkem výsledky povšechného šetření geologického[6]) — nacházíme v hlavním hřebeni karpatský, pravděpodobně magurský pískovec oligocenní, dále místy vystupující i horniny eruptivní a v podhůří krystalické břidlice. Také ojediněle nalézají se tu i drobné útesy vápencové. Jen západní díl hoverlanský až ke kotě 1536, k sedlu mezi Pietrošem a Hoverlou, patří útvarům starším, svrchní a spodní křídě. V magurském pískovci, celkem málo odporující to hornině, samozřejmě postupuje dosti rychle zvětrání i erose. Zvláště pak uplatnila se tu v dobách dřívějších činnost diluviálních ledovců, kdy čára věčného sněhu byla tu nižší (1400 až 1500 *m*) a kdy masy sněhu měnícího se ve firnová pole daly vznik silnému insulárnímu zalednění,[7]) které nabylo značné intensity v podajném pískovci, v němž již našlo připravenou půdu ke své činnosti, a to zvl. na svazích, obrácených k s. a sv. Tu vznikly ve sběrných kotlinách pěkně vyvinuté kotle, kary, o prudce spadajících postranních stěnách, někdy se dvěma zřetelnými stupni, oddělenými stěnou, na dně jevící stopy po jezerech nebo dosud mající malá jezírka a menší vodní nádržky.[8]) Tyto kotle jsou na Čorné hoře zvláště hojné na území východohaličském. Méně nalézá se jich na území karpatoruském. Morény a mnohé kotelní stěny ovšem během doby byly porušeny destrukcí, která pro dosti podajný materiál zničila nebo alespoň porušila někdejší jejich tvar a pozměnila tak vzhled horských stěn, kotlů i hřebene. Podobně i dříve hojnější počet údolí tvaru U pozměnil svou podobu.

Kotle i cirky a to zvl. jejich spodní stupně jsou však neobyčejně důležity pro hospodářské využití Čorné hory i občasné osídlení, třebas

[5]) Popis Čorné hory podává J. Král v článku: Na Čorné hoře. Časopis turistů, Praha, 1923, str. 13—18, 45—48. 10 obrázků. Podrobná literatura, týkající se Čorné hory, uvedena jest v Geografické bibliografii Podkarpatské Rusi, sestavené týmž autorem. (Travaux géographiques tchèques, č. 11. Praha, 1923.)

[6]) Stručný přehled podává St. Pawłowski, Die Eiszeit, str. 212 n. Tamže (str. 225—228) jest uvedena téměř celá literatura předmětu a zvl. zalednění Čorné hory. Srv. dále Th. Posewitz, Das Gebiet der schwarzen Theiss. Jahresber. d. ung. geol. Anstalt für d. J. 1888, Budapest, 1890, 72—85, a Das Gebiet der weissen Theiss, tamže, 1891, str. 80—100.

[7]) Srv. Pawłowski, Die Eiszeit, str. 216. Dále F. Vitásek, Příspěvky k poznání starých ledovců u pramenů Tisy Bílé na Čorné hoře. Sborník čs. společnosti zeměpisné, Praha, 1922 (XXVIII.), 197—202.

[8]) Mezi kotami 1650, 1772, 1819, Dancyšem (1856 *m*), Turkulem (1932 *m*), Rebrami, kotou 1935 a Špycemi spojuje se dokonce několik karů ve velký cirk.

jsou někdy dosti obtížně přístupné. Jejich dna, tvořící terasy, málo skloněné, chráněné se tří stran a mající dostatek dobrých pastvin i vody, jsou velmi příhodná jako letní pastviny a poskytují i salaším — nenachází-li se ovšem horní hranice vysokých stromů příliš daleko — výborný útulek. Absolutní jejich výše nepřesahuje obyčejně výšku nižšího pásma polonin.

Jiné závěry údolí končí pravidelně nedaleko pod hřebenem, který spadá příkře do nich. Jsou to pak obyčejně sběrné kotliny řady pramenů, sbíhajících se níževi v mohutné bystřiny a vyhlodávajících jejich dna. Pokud jsou tyto sběrné kotliny pokryty poloninami, slouží jako pastviny, ovšem méně navštěvované stády skotu nebo bravu zvláště pro obtížný přístup, který jest k nim možný obyčejně jen se hřebene nebo s postranních svahů, pokrytých poloninami. Také osídlení vyhýbá se těmto kotlinám a volí si raději výhodnější polohu na pobočných stěnách, pokud mírně spadají do kotliny a poskytují místa osídlení.

Teprve střední a zvláště dolní díl větších údolí na straně karpatoruské jest širší, přístupnější a vyrovnanější. Někdy nánosy a terasy patrně fluvioglaciální podporují tu přístup člověku i dobytku a umožňují i trvalé nebo občasné osídlení.[9]) Ale i tu svahy hřebenů, pokrytých lesy i pralesy, svírající údolí, pravidlem prudce spadají do údolí a obyčejně vylučují nebo ztěžují i ve středním díle údolí jak využití hospodářské, tak i osídlení. Menší údolí bez teras, zarostlá hustou vegetací, s hluboce vyerodovaným dnem, které slouží obyčejně jako koryto bystřině, třebas mírně klesají, vylučují však dosud jak přístup, tak i jakékoliv využití. Větší počet takových nepřístupných údolí a celkem malý počet přístupných na karpatoruské straně hoverlanského dílu než na haličské byl a jest ovšem příčinou i menšího osídlení a hospodářského vy-

---

[9]) Podélný profil údolí nejlépe nás poučí o spádu a tudíž i přístupnosti větších údolí. Tak na př. potok Brebenjeskul sbírá své vody asi ve výši 1790 *m* a po toku zhruba 6·1 *km* dlouhém vtéká ve výši 1029 *m* do p. V. Tomnatyk a odtud klesá až k hati Hoverle (758 *m*) při vzdálenosti zhruba 4 *km*. Jest tudíž spád v horním díle tohoto údolí v délce asi 6·1 *km* 760 *m*, ve střední však části na vzdálenost asi 4 *km* jen 270 *m*, tedy ani ne polovina. V celku pak na 10 *km* vzdálenosti jest 1030 *m* spádu. Podobně jest tomu i v údolí B. Tisy, která sbírá své vody jako Balzatul (Tišora) v četných pramenech na polonině Balzatul, asi ve výši 1800 *m*. Po toku 3 *km* dlouhém dosahuje ve středním díle údolí hati Balzatulské (1021 *m*), odtud pak klesá na toku 12·5 *km* dlouhém až k přítoku Hoverle (645 *m*) a v dolní části 9·1 *km* dlouhé k soutoku s Č. Tisou (460 *m*). Jest tudíž spád horního dílu údolí při jeho délce 3 *km* asi 800 *m*, středního na 12·5 *km*, tedy čtyřikráte tak dlouhého, jen 376 *m*, dolního, 9·1 *km* dlouhého, tedy třikráte tak dlouhého, jen 185 *m*. V celku na délce 24·6 *km* nacházíme spád 1361 *m*.

užití na této straně čornohorského hřebene než na přístupnější straně východohaličské.

Hydrografické poměry čornohorského hřebene dík vlhkému podnebí, geologickému složení půdy a vegetačnímu krytu jsou velmi příznivé. Sněhová přikrývka, pokrývající souvisle až do května temena vyšších hor a podle exposice a výše i údolí trvající často skvrnitě až do července, poskytuje dosti vody t. zv. sněhové.

Prameny s vodou stálou nacházíme v neobyčejném počtu na všech svazích čornohorského hřebene a to i ve značné výši. Obyčejně vrchní patro pramenů dosahuje absolutní výše 1600—1800 *m*, takže až do této výše by mohlo sahati dočasné osídlení. Tyto početné prameny spojují se v potoky a zesilovány jsou za dlouhotrvajících dešťů vodou, sbírající se v erosivních ryhách. Nižším pásmem stálých pramenů jsou prameny, které vyskytují se na hranicích polonin a lesů. Ač nenacházíme tu pravidelnosti, můžeme přece označiti jeho výši na 1200—1400 *m*. Tyto prameny jsou rozhodujícími při zakládání občasných sídel, vyhledávajících nejen chráněné místo a dobré pastviny, nýbrž i dostatek vody, podle možnosti pramenité.

Prameny vyskytují se ovšem i v nižších polohách a i tu pravidelně vyhledávány jsou sídly. Zvláštní zmínky konečně zasluhují prameny minerálních vod, které nacházíme obyčejně ve výši 500—600 *m* abs. výše.

Veškeré vody čornohorského hřebene na půdě karpatoruské odvádí řeka Tisa, vzniklá spojením Černé a Bílé Tisy u Ustěrik nad Rahovem (asi 460 *m* n. m.).

Bílá Tisa vzniká spojením potoků Balzatulu, též zvaného Tišory, sbírajícího své vody ve sběrné kotlině balzatulské, a zesíleného řadou většinou bezejmenných přítoků[10]), a Hoverly, pramenící na jižní straně h. Hoverly, přijímající zvl. s levé strany Brebenjeskul[11]). Z přítoků B. Tisy nutno uvésti na pravé straně zvl. p. Bohdan, vznikající z několika potoků, stékajících s poloniny pod Zanohou[12]), dále p. Pavlek, pramenící pod Sešulem.[13])

[10]) Z pojmenovaných s pravé strany jsou to zvl. Lemski potok, Lypovec, Curkova, Hodorec, s levé Vaskul a j.

[11]) Pojmenované přítoky Hoverly s levé strany: Ozyrny p. s Breskulem, Brebenjeskul, pramenící na polonině Brebenjeskul a mající přítoky Komarnyk, Vel. Tomnatyk, Gutin p. a Turkul, s pravé pak strany Hlodovec a Pryslipskyj p.

[12]) Pojmenované přítoky po pravé straně: Rohoněskul, Sešul, Hrobovyj, Nimesnyj p., Mlačyn, po levé Lolyn zvir, Burkutovy p., Zvidovatyj p., Pryslipskyj p.

[13]) Pojmenované přítoky s levé strany: Plajki p., Plajivka, Mlačyn zvir.

Do Černé Tisy, pramenící pod sedlem Okole ve výši 1245 *m*, vlévá se u Jasině s levé strany především Lazeščyna, vznikající z potoka Holovčeskyj a Zanohovec.[14] Za Jasiní vlévá se do Černé Tisy dále po levé straně Malyj a Velikyj Volovec, Končakovyj p., u Surdoku Kosouček, u Kevele Kevele p., nad Burkutem Kvašeňak p. a Hlubokyj p., nad Bilinem Svitnyj p., pod Bilinem pak Velikyj Števiorskyj p.

Klimatické poměry. Klíma na vytčeném území čornohorském jest vnitrozemské, podmíněné poměrnou vzdáleností moře, a vykazuje tudíž velký rozdíl mezi průměrnou teplotou letní, červencovou, a zimní, lednovou. Bohužel nedostatek většího počtu teploměrných (a srážkoměrných) stanic nedovoluje nám, abychom podali přesný obraz klimatických poměrů, které nacházejí se na Čorné hoře.[15]

Pro Jasini, ležící na úpatí Čorné hory (652 *m* n. m.) uvádí Zsig. Róna na základě měření z l. 1871—1900 tato průměrná data:[16]

pro měsíc:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
průměrná teplota v C:	−6·0°	−3·9°	0·0°	6·3°	11·5°	14·8°	16·9°	15·9°	12·0°	7·5°	1·1°	−4°

Jest tudíž amplituda roční 22·9° C, roční průměr +6·0° C. Pro jiná místa, trvale osídlená, záznamů teploměrných není. Pro výši 1000 *m*, kam sahají trvalá sídla, můžeme však předpokládati průměrnou roční teplotu +4·2° C, která nevylučuje trvalé osídlení. Za to ve

---

[14]) Přítoky Lazeščyny s pravé strany jsou zvl. Kožmiešček s p. Tihovcem, Foresek s Tysivcem, Kamennyj p. s Jalivcem, Zemir s Voronyj p., s levé strany Studenyj p. s přítoky Malyj Studenyj p., Plostynec a j., po pravé straně, po levé s přítoky Androvec, Kriniskyj p., Surduček. S levé strany do Lazeščyny vlévají se Pletovatyj p. a Lopušanka s přítoky zvl. na pravé straně Kornahovec Velikyj a Malyj, Riptynec s Terhelivcem.

[15]) Dnes existuje na celém vytčeném území jediná teploměrná a srážkoměrná stanice v Jasini. — Hrubý přehled klimatických poměrů podává A. Rehman, Karpaty, str. 524—525, několik podrobnějších dat uvádí na př. K. Hegyfoky: Az ezö Marmárosban. Földl. Közl., Budapest, 1908, (XXXVI), str. 280—294 s výtahem: Die Niederschlagverhältnisse im Marmaroser Komitat. Abrégé du Bull. d. l. Soc. Hong. de Géogr., Budapest, 1908 (XXXVI), 128—146, přehled pak Zs. Róna: Éghajlat, I.—II., Budapest, 1907—9. Několik povšechných zpráv nachází se zvl. v periodické ofic. publikaci: A meteorologiai és földdelejességi mag. kir. központi intézet evkönyvei, Budapest, od r. 1894 s názvem A magyar kir földmivelésügyi minister fenhátósága alatt álló m. kir. országos meteorológiai és földmágnességi intézet evkönyvei, Budapest, a jinde.

[16]) Srv. K. Hegyfoky, Az ezö Marmárosbau, str. 280—294.

vyšších polohách teplota klesá tak, že vylučuje nejen trvalé, nýbrž v jistých ročních obdobích i občasné osídlení a využití hospodářské.[17])

Počet srážek jest na celém vytčeném území čornohorském dosti značný. Vujević[18]) udává pro Jasini roční průměrný počet srážek (průměr z let 1891—1900) na 919 *mm*, třicetiletý pak průměr z let 1871 až 1900 na 1092 *mm*. Pro Kožmieščck (866 *m* n. m.) udává Vujević roční průměr srážek na 1029 *mm* (průměr z let 1891—1900) a 1099 *mm* (průměr z let 1871—1900), pro Luhy (613 *m* n. m.) na 951 *mm* a 1018·9 *mm*. Hegyfoky[19]) pro Jasini uvádí roční průměr srážek na základě 21letého průměru z let 1881—1902 na 999 *mm*, pro Kožmieščck na 1070 *mm*, pro Luhy na 1002 *mm*. V jednotlivých měsících naměřeno bylo pak v Jasini srážek (průměr z let 1881—1902)[20]):

pro měsíc:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII
počet srážek v mm:	34	36	60	58	107	144	134	127	84	105	59	51

Spadne tudíž na základě těchto průměrných dat v Jasini v zimě 12·1% všech ročních srážek, na jaře 22·5%, v létě 40·6%, na podzim 24·8%. Pro Kožmieščck uvádí pak Hegyfoky tato čísla: v zimě 11%, na jaře 22·7%, v létě 42·6% a na podzim 23·7% všech srážek. Pro Luhy 14·8%, 23·9%, 36·4%, 24·9%. Maxima srážek jsou v Jasini v červnu (14·5% všech srážek celého roku) a druhé v říjnu (10·5%) v Kožmieščku v červnu (14·5%), v červenci (15·3%) a v říjnu (9·7%), v Luhách pak v červnu (13·6%) a v říjnu (10·2%).[21])

Pro nadmořskou výšku 1000—1500 *m* můžeme předpokládati průměrný počet srážek ročních na 1000—1200 *mm*, výše až přes 1400 *mm*.

Celkem převládá tudíž dosti suché počasí v zimě (minima srážek), velmi vlhké v létě (zvl. červen a červenec) a na podzim (říjen).

---

[17]) Ve výši 1460 *m*, kam dnes zasahuje občasné osídlení, lze předpokládati roční průměr teploty asi + 2° C. Nejvýše položené salaše na Rohoněsce ve výši 1580 *m* dnes jsou opuštěny. Roční průměr teploty lze tu předpokládati asi + 1·4° C. Vyšší pásmo polonin vykazuje však ještě nižší roční průměrnou teplotu. Tu ve výši 1800 *m* lze předpokládati roční průměr teploty asi + 0·2° C, ve výši pak 2000 *m* — 1·8° C. Často však zvl. místní poměry, chráněnost místa, jeho exposice a pod., větry zvl. lokální a pod. mohou značně měniti data, která předpokládáme.

[18]) P. Vujević, Die Theiss. Eine potamologische Studie. Leipzig, 1906, str. 53.

[19]) Die Niederschlagverhältnisse, str. 128—146.

[20]) K. Hegyfoky, Die Niederschlagverhältnisse, str. 135.

[21]) K. Hegyfoky, Die Niederschlagverhältnisse, str. 135.

Větry jsou převážně severní a východní, suché a studené. Jen západní a severozápadní přinášejí trvalé deště.

Na klimatických poměrech v prvé řadě závislá jest pokrývka vegetační, která spolu s jinými činiteli dovoluje jak hospodářské využití, tak osídlení.

V e g e t a č n í p o k r ý v k a. Rozsah neplodné půdy, pokryté ssutkami a skalami, jest na vytčeném území celkem malý. Jen některé vrcholky a jejich úbočí v hlavním hřebenu čornohorském nejsou kryty vegetační pokrývkou, ale není možno tu mluviti o nepřetržitém pásmu neplodném, nýbrž jen o skvrnitě rozsetých plochách neplodné půdy, prostupujících souvislou pokrývku vegetační, kterou jest pokryta většina půdy vytčeného území. Tato souvislá pokrývka není omezena klimatickou čarou sněhovou. Hospodářsky využitelna jsou ovšem jen ta místa, jichž sklon nepřevyšuje 45°.

Vegetační tuto pokrývku můžeme si rozděliti na několik pásem.[22])

1. S o u v i s l é p á s m o p o l o n i n, t. j. a l p s k ý c h l u k, které pokrývají nejvyšší části horských hřebenů. Jsou podmíněny především klimatickými příčinami.[23]) Jejich vznik jest přirozený. Tyto pastviny podle jejich absolutní výše a s tím související i jakosti a zužitkovatelnosti porostu lze pak rozděliti na vyšší a nižší pásmo.

1a. Horní hranice v y š š í h o p á s m a p o l o n i n stotožňuje se s výškou nejvyšší hory hoverlanského dílu, Hoverly (2058 *m*), spodní pak můžeme položiti průměrně do výše 1600 *m*. Jen místy jest tu pokrývka vegetační — tráva běžných i některých vzácnějších druhů a někteří zástupci alpské vegetace, pokud ovšem se uchránily před spasením a pokud jejich regeneraci umožňuje krátká doba vegetační,[24]) — přerušena balvany a ssutkami, které zvl. na svazích o větším sklonu (nad 40—45°) jsou hojnější. Tyto poloniny slouží jako pastviny a v prvé řadě vyhledávány jsou stády bravu, který spokojí se horší travou i obtížněji přístupným terenem a menším dostatkem vody. Využití těchto polonin končí pak obyčejně ve výši 1900 *m*, neboť každodenní

---

[22]) Srv. rozdělení u L. Sawicki: Wędrówski pasterskie w Karpatach. I. Warszawa, Spraw. z posied. Tow. Nauk. Warsz. Wyd. nauk antropol. 1911, str. 86. V. Dvorský: Studie ku geografii slovanských sídel. I. Trenta. Praha (Travaux géog. tchèques 10), 1914, str. 14. F. Pax, Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpathen. (Die Vegetation der Erde.) Leipzig, I., 1898, str. 124. Phil. Arbos, La vie pastorale dans les Alpes françaises. Etude de géographie humaine, Paris, s. a.

[23]) Srv. Rehman, Karpaty, str. 486 n.

[24]) Srv. Rehman, Karpaty, str. 528, kde i výčet některých druhů. Též u F. Paxe, Grundzüge, I., 127 n., II., 211, a j.

výstup nad tuto abs. výši při značném rozdílu relativní výšky salaše a pastviny vyžaduje dlouhé doby a není ku prospěchu bravu nebo skotu. Rovněž nedostatek pramenů, vyskytujících se nad 1900 *m*, jest tu na překážku hospodářskému využití.

1b. Nižší pásmo polonin dosahuje svou horní hranicí výše 1600 *m*. V západním díle hoverlanského hřebene, sahajícím zhruba až k Hoverle, spodní hranice tohoto pásma sestupuje průměrně na 1300 *m* abs. výše. V důsledku toho jest toto pásmo i hojně vyhledáváno.[25]) Ve východním díle spodní hranice sestupuje průměrně na 1400 *m*.

Spodní hranice těchto polonin mění se jen tam, kde nacházíme salaše. Potřeba dříví na stavbu salaší a zvláště na palivo jest velmi značná při nehospodárnosti pastýřů a převyšuje přirozenou regeneraci vykácených stromů. Rovněž dobytek jest velkým škůdcem lesů. Během doby ztráty ty pak způsobují, že spodní hranice polonin nejprve jazykovitě, pak v liniích zatlačují horní hranice lesů i tak zv. ochranný pás lesů na hranicích vysokého lesa a polonin, který před převratem byl lesní správou maďarskou pečlivě chráněn a v němž i pasení bylo zakázáno.

Tráva, zřídka přerušovaná balvany a ssutkami, jest tu pro menší absolutní výši a chráněnost bujnějšího vzrůstu a tam, kde uchráněna jest vegetační pokrývka od spasení, vykazuje i vzácné druhy alpské. Tyto nižší poloniny slouží jako výborné pastviny hlavně skotu, který tu nachází dostatek pramenů, snadněji se pohybuje po příznivějším terenu a nemusí překonávati velkou vzdálenost i značný rozdíl výškový mezi pastvinou a salaší. V tomto pásmu pak nacházíme i občasná sídla (salaše, koliby), které vyhledávají tu pravidelně nejen chráněnou polohu a prameny pitné vody, nýbrž z potřeby dřeva přibližují se podle možnosti i horní hranici lesů.

Využití obou těchto pásem polonin, jichž většina jest majetkem státním, jest jen extensivní. Tráva se tu nekosí, jednak proto, aby byl zabezpečen dostatek potravin pro dobytek na celou dobu letní, kdy dobytek se tu pase (3—4 měsíce), jednak pro nemožnost nebo alespoň neobyčejnou obtížnost dopravy případně nasušeného sena do údolí.

2. Pásmo polonin přechází dále v nesouvislé pásmo smíšené, t. j. pastviny prostoupené klečí, keři jalovce nebo olšemi či smrčinami, které skvrnitě, často však ve velkém rozsahu prostupují nejnižší část polonin a tvoří přechod k pásmu vysokých stromů. Ho-

---

[25]) Rozhoduje tu ovšem i snazší přístup a menší vzdálenost od trvalých sídel než v díle východním, méně vyhledávaným.

spodářsky ovšem tyto pastviny buď úplně nebo částečně znehodnocují. Tento nesouvislý pás smíšený, jemuž vyhýbá se občasné osídlení, nacházíme vzhledem k různým místním podmínkám obyčejně mezi 1300 až 1700 *m* abs. výšky.[26]) Často nacházíme toto pásmo v karech, kde pastviny jinak obyčejně velmi dobré jakosti takto znehodnocuje. Na chráněných místech nalézají se tu často vzácné druhy alpské květeny.

3. Třetím pásmem jest souvislé pásmo vysokých stromů. Jeho horní hranice stotožňují se pravidelně se spodní hranicí polonin nebo pásma smíšeného, spodní pak na vytčeném území končí v abs. výši 460—700 *m.*[27]) Dosahuje tudíž v západním díle hoverlanském průměrné výše 1300 *m*, ve východním pak 1400 *m*. V chráněných místech vystupuje však toto pásmo i výše. Tak na př. na sev. svazích Pietrošulu dosahuje souvislý les výše až 1500 *m* a pod. Ojedinělé větší nebo menší skupiny vysokých stromů stoupají však podle povahy půdy a chráněnosti i nad tuto výši ještě o 50—100 *m*. Část, hraničící s poloninami nebo s pásmem smíšeným, slouží jako ochranný pás zvl. proti lavinám. Tento ochranný pás není však dnes, jak výše bylo již řečeno, šetřen.

Lesy převládají tu většinou jehličnaté, smrkové, a jen menší měrou v trojúhelníku Burkut-Sešul-údolí Bohdanu, údolí B. Tisy k Ustěrikám i listnaté (buk, javor, jasan).[28]) Smíšené nacházejí se v údolí p. Hoverly a tu a tam v nižší poloze na horských svazích. Lesy, které jsou většinou majetkem státním, jsou však jen menším dílem využity. (Viz níže.) Uměle osazují se jen vymýcené plochy ve státních lesích. V soukromých ponechávají se přirozené regeneraci. Osídleny jsou jen lokálně, trvale nebo občasně (hájovny, hatě, koliby a domky dřevorubců, vorařů a pod.).

4. V souvislém pásmu vysokých stromů nebo ve výši jeho vystupuje skvrnitě nesouvislé pásmo pastvin a luk. Nachází se obyčejně buď na nižších rozsochách, vybíhajících z hlavního hřebene a to na jejich hřebenech [na př. na Kičeře (1307 *m*), Mlakách (1189 *m*)], a úbočích (na př. Čertez (asi 900 *m*), na svazích Kičery, Preluky a pod.), někdy ve větším, někdy však jen v malém rozsahu a bývá obklopeno se všech stran lesem, nebo v údolí potoků, kam nesahá osídlení trvalé (na př. údolí p. Bohdanu, Balzatulu a jiná). Horní hranice tohoto

---

[26]) Lesní správa v Bohdanu udává dokonce jejich horní hranici na 1800—1850 *m*.

[27]) Nejnižší místo na vytčeném území, soutok Č. a B. Tisy, jest ve výši 460 *m* n. m. (bar.).

[28]) Podle sdělení lesní správy v Bohdanu a vlastního konstatování.

pásma dosahuje výše 1300 *m*, spodní pak klesá až na 600—700 *m*. Největší počet těchto nesouvislých pastvin a luk nacházíme v abs. výši 1000—1100 *m*. Od polonin odlišují se tyto pastviny a louky tím, že částečně vznikly uměle, vymýcením lesa. Slouží pak k tomu, aby jednak poskytly pastviny, jednak zásobu sena, kterým v zimě vyživuje se dobytek, svedený s polonin do stájí (t. zv. zimarek, pasterek), na nich vybudovaných. Pásmo toto osídleno jest pastýři, kteří tu v zimě opatrují dobytek, stěhujíce se po vyčerpání zásob sena ze zimarky do zimarky, v létě pak sekáči, kteří pokosí trávu a usušenou navrší v oborichy[29]) nebo seno uschovají ve stájích a kůlnách. Využití těchto pastvin a luk jest rovněž extensívní. Druhy trávy jsou jen běžné.

5. K tomuto pásmu pastvin a luk připojuje se na nejpříhodnějších místech, zvláště na mírných svazích a v širokých údolích, nesouvislé pásmo luk se záhony bramborů, bobů, špaldy, ovsa, lnu a pod., v nižších a chráněnějších polohách i se záhony zelí, ba dokonce i kukuřice. Tento pás lze pak označiti jako nesouvislé pásmo luk se záhony zemědělských plodin. Horní jeho hranice dosahují za příznivých okolností výše až 1000 *m* (na př. na svazích Števiory, na hřebenu, vycházejícím ze Sešy k Jasině a j.), spodní pak počíná od 460 *m*. Toto pásmo můžeme rozděliti na vyšší, vykazující chudší druhy zemědělských plodin (od 550 *m* do 1000 *m*), a nižší, v němž díky chráněné a nižší poloze daří se i zelí, kukuřici a pod. (460—550 *m*). Louky, které se tu nacházejí, kosí se pro seno, potravu dobytku na zimu. Jen zřídka trávu spásá dobytek (na jaře a na podzim). Zemědělství i lukaření jest většinou extensívní. Pásmo toto jest trvale osídleno.

Celkem lze tudíž ve vegetační pokrývce rozeznávati tato pásma:

1. Souvislé pásmo polonin a to:
   a) vyšší (od 1600 *m* do 2058 *m*), neosídlené,
   b) nižší (od 1300 *m* do 1600 *m*), občasně osídlené;
2. nesouvislé pásmo smíšené (od 1300 *m* do 1700 *m*), neosídlené;
3. souvislé pásmo vysokých stromů (od 460 *m* do 1300 *m*), lokálně trvale a občasně osídlené;
4. nesouvislé pásmo pastvin a luk (od 600 *m* do 1300 *m*), občasně osídlené;
5. nesouvislé pásmo luk se záhony zemědělských plodin (od 460 *m* do 1000 *m*) a to:

[29]) Stříšky, posunovatelné podle potřeby na čtyrech do země zaražených kůlech.

a) vyšší (od 550 *m* do 1000 *m*) a
b) nižší (od 460 *m* do 550 *m*), trvale osídlené.

Hospodářsky využitelna jsou všechna tato pásma, pokud ovšem sklon jejich nepřevyšuje 45°. Skutečně využito jest zvláště pásmo 1. b), 4., a 5. a), b). Částečně využito jest pásmo 3. a méně pásmo 1. a). Nevyužito jest pásmo 2.

Osídlení trvalé nacházíme pouze v pásmu 3. a 5. a), b), občasné v pásmu 1. b), 3. a 4. Účelům výhradně pastevním slouží pásmo 1. a), b) a 4., zemědělským a pastevním 5. a), b), dřevařským 3. Pokud jde o jiné využití hospodářské, nacházíme toto jen v pásmu 5. a), b).

R o z v o j o s í d l e n í v h i s t o r i c k ý c h d o b á c h. Z celé P. Rusi Marmaroš a zvláště její část nejseverovýchodnější, podhůří čornohorské, osidlováno bylo nejpozději. Mohutné pralesy, oživené i dravou zvěří, kryjící téměř úplně celý tento hornatý kraj, který postrádal vlastně až do XIX. stol. dobrých cest, většinou těžko dostupná údolí, zaplavovaná za vyššího stavu vody bystřinami a řekami, a pravidlem příliš úzká a nedovolující trvalý pobyt, často sevřená prudce spadajícími horskými svahy, byly hlavní příčinou pomalého postupu člověka do krajin, dosud neosídlených. V prvé řadě bylo to údolí Černé Tisy, snadněji přístupné, jímž vedla nejprve jen průchodní cesta. Tudy přichází lovec a pak i pastýř, který vyháněl svá stáda ovcí na rozsáhlé poloniny, přirozené to pastviny, kryjící horské hřebeny, k nimž sice příchod pralesy byl obtížný, které však poskytovaly dosti potravy v letní době jeho stádům, jež v zimních dobách přezimovala v nížinách nebo později i v údolích. Těmito pastýři, hlavními obyvateli těchto krajů, vedle Rusínů, přicházejících sem z Haliče, ve XIV. století byli Rumuni, kteří tehdy usazují se v Marmaroši a později i v ugočské a berežské stolici, kde žijí jako pastýři, nomadisující se svými stády.[30]) Ale pravděpodobně již v polovině XIV. stol. většina z nich vystěhovala se za vůdcovství Bogdana do Moldavy. Jest však velmi pravděpodobné, že v létě přicházeli sem pastýři se svými stády ovcí znovu, nomadisujíce obdobně jako za dnešního dne činí faršerioti na poloostrově Balkánském. Po Rumunech zbyly pak tu velmi hojné názvy místní, které ovšem rozšířily se nomadisováním Rumunů i do jiných částí Marmaroše, a dále názvy pastýřské a jiné, jež přešly pak v užívání Rusínů a to zvláště Huculů.[31])

---

[30]) Srv. J. Král, Osídlení K. Rusi. (Historický přehled.) Sborník čs. společnosti zeměpisné 1923, str. 65—83, kde i podrobná literatura předmětu a odkazy, na které poukazuji.

[31]) Některé názvy otiskuje J. Král, Osídlení str. 76 n.

Trvalejší osídlení však nastává později. Ještě v polovině XVI. stol. většina Rusínů, kteří buď dříve nebo tehdy přišli do země z Haliče či odjinud, nemá prý pevných sídel a žije pastýřením. Proto byla vydávána řada zákonů, majících čeliti proti těm, kteří „domos non habent, in tuguriis (v kolibách) tamen habitantes, non contemnendam pecorum summam collunt". Ovšem „nomadismus" těchto pastýřů jistě odlišoval se od nomadismu Rumunů, kteří opouštěli hory a kraj na zimu vůbec, kdežto Rusíni patrně jen sestupovali se svými stády do chráněných údolí, kde přezimovali. Takto žijící obyvatelé Marmaroše připomínají se i později, na př. v urbáři Rhónaseckém z r. 1610, kde čteme zmínku, že na Čorné hoře žije podobně 18 rodin, nebo v listině z r. 1647 („Rutheni, portas non hábentes, in tuguriis habitantes, domo carentes in alpibus (t. j. na poloninách) et sylvis pecora aluentes"). Úpatí a svahy Čorné hory stávají se však i vítaným útočištěm uprchlíků z Uher a z Haliče, kteří buď s rodinami nebo bez nich tu žijí a vyhýbají se moci státní až do sklonku století XVIII. Mezi nimi nabývají pak převahy Huculové, přecházející říšskou, později zemskou hranici. Koncem století XVIII. konečně komora královská z důvodů fiskálních je zjišťuje a spojuje jejich trvalá sídla v obce. A tehdy vlastně teprve zasahuje fakticky až sem a uplatňuje tu svou moc.

Tak vznikají jednotlivé obce na úpatí Čorné hory, jež ovšem tvoří nejprve jen shluky chalup nebo roztroušené samoty. Vedle Jasině, jejíž území dlouho označováno byla jako campus non populabilis, vzrůstající teprve asi za přílivu většího počtu Huculů v XVIII. stol. — větší osada s kostelem připomíná se tu k r. 1641 —, nacházíme tu pak řadu obcí, jež po kontrakci, prováděné od r. 1778, dostávají určitý název: Lazeščyna, snad z pův. Lazestina, Studena, Lopušanka, Svidovec, Kvasi, Luhy a Bohdan, který nese i název Bílá Tisa a zaznamenán jest jako parochia nova, mající svou matriku již od r. 1786, dříve též zvaný Superior Akna Rahó. Ale ještě v tomto století, ba i později nesmírné lesy, pokrývající úbočí Čorné hory, poskytují dobrého úkrytu zběhům a jiným lidem, kteří na př. v dobách panování Marie Terezie organisují se i v lupičské bandy.

Značné množství nových osadníků přichází později. Jsou to vedle Huculů zvláště Židé z Haliče, kteří tu usazují se v každé vesnici a živí se nejen obchodem, nýbrž i řemeslem.

Postup člověka trvale sídlícího do údolí, dříve jen jím procházených, a výše na svahy Čorné hory, dál se však celkem zvolna. Rozvoj dopravních cest a dále alespoň částečné extensívní využití ohromných výborných lesů, jež datuje se od konce XVIII. stol. a ve větší míře od počátku XIX. století, kdy zakládány byly umělé vodní nádrže na

splavování dřeva a regulován primitivně tok bystřin k témuž účelu, a dále vzrůstající potřeba nových pozemků, jež by poskytly osídlení buď novým příchozím nebo přirozeně rozmnoženému obyvatelstvu, jež nechce opustiti rodný kraj, má v zápětí, že trvalá sídla postupují hlouběji a výše do hor. Rovněž počet občasně obývaných sídel množí se zvl. rozvojem chovu dobytka.

Základní jednotkou osídlení byl však vždy dvorec, samota. Teprve pozdějším sdružováním vzniká shluk dvorců a rozvojem dopravy i vsi, lemující dopravní cesty.

Výškové rozdělení sídelních jednotek jest v přímé souvislosti především se zaměstnáním obyvatelstva, dále s rozvojem a postupem lidských sídel a hospodářského využití, pásy vegetačními a místními poměry (chráněnost, snadný přístup, pramenitá voda a pod.).

Na vytčeném území nacházíme jednak sídla v nižší absolutní výšce, stále obývaná, a ve vyšší, občasně obývaná.

Stále obývané jednotky sídelní vyskytují se především v nejnižších a nejnepřístupnějších částech tohoto území, tedy především v širokých údolích, kde vyhledávají zvl. terasy fluviální nebo fluvioglaciální a lemují význačnější dopravní cesty nebo jsou v jejich blízkosti. Vystupují však i pro nedostatek místa a vhodné půdy na horské svahy, zvláště k jihu obrácené a chráněné. Stále obývané jednotky tvoří jednak souvislé osady, (Jasiňa, Lazeščyna, Bohdan, Luhy, Burkut-Kvasy, Bilin, Vouči), jednak samoty, oddělené od sebe lukami a vloženými záhony polí, ohraničenými případně keři nebo stromy, (Mežyrikamy, Klyva, Pohar, Števiora, Pecinka, Preboja a j.), a samoty ležící v lesích (hájovny, domky hlídačů hatí). K trvale osídleným jednotkám nutno ovšem připočísti též domky hlídačů železniční trati Ustěriky-Voroněnka.

Absolutní výše souvislých osad a samot, trvale osídlených, nepřevyšuje průměrně 1000 *m.*[32]) Větší osady nacházíme pravidlem ve výši 600—700 *m.*

Absolutní výše občasně obývaných sídel, k nimž počítáme salaše (stiny), koliby, zimarky (pasterky), sloužící k chovu dobytka, přezimování a pastýření, dále domky a koliby dřevařů a vorařů, uhlířů,

---

[32]) Na př. Jasiňa se samotami, k ní počítanými, nachází se v abs. výšce 640—940 *m*, Lazeščyna 670—900 *m*, Svidovec asi 630 *m*, Burkut 535—1090 *m*, Bilin 494 *m*, Ustěriky 463 *m*, Mežyrikamy 500—1000 *m*, Klyva, Pohar, Števiora, Pecinka do 1100 *m*, Mlaky, Kalena, Preboja do 1050 *m*, Vouči a Vydryčka 500—520 *m*, Luhy 604—685 *m*. Hájovna Kožmiešček nachází se v abs. výšce 856 *m*, Tišora asi 672 *m*, Bohdan asi 600 *m*, domek hlídače hatě Hoverly 758 *m*, Lopušanky 888 *m*, Balzatulu 1021 *m*, a j.

pálících dřevěné uhlí, a jiné na rychlo postavené úkryty, dosahuje až 1460 *m.*

Salaše (stiny) a koliby pastýřů vyhledávají spodní pásmo polonin a bezprostřední blízkost pásma vysokých stromů. Jejich abs. výše kolísá tudíž mezi 1200—1460 *m.*[33])

Výše než do 1500 *m* salaše nevystupují zvláště z toho důvodu, že jednak noční chladna při nedostatku dobrých stájí, kterých většinou tu postrádáme, jsou dobytku nepříznivá, jednak že doprava potřebného dříví a paliva ze vzdálenějších lesů a mléčných produktů do vsí jest obtížnější. Jedině na polonině Rohoněsce nacházejí se salaše ve výši 1580 *m*, dnes však všechny opuštěné a nepoužívané, pečlivě těsně před světovou válkou vybudované lesní správou rahovskou. Jejich existence v této výši umožněna byla jak dobrou vozovou cestou, spojující pohodlně tuto salaš s údolím, tak i pevnou stavbou, chránící pastýře i dobytek před nočními mrazy. Salaše obydleny jsou jen v létě.

Od salaší (stin) i kolib odlišují se stáje, v nichž dobytek přezimuje a zkrmuje seno, nasušené na okolních loukách v době letní. Jsou to t. zv. pasterky, zimarky, které jsou hojné v nižších polohách v nesouvislém pásmu luk, na rozsochách, vybíhajících z hlavního hřebene nebo v údolí větších bystřin, poskytujících na rozšířeninách dosti vhodné půdy a trávy k sušení. Nacházíme je na př. na jižních svazích Števiory, Kičery, Sehleny a j., v údolích p. Balzatulu, Lazeščyny a j. Jejich výše dosahuje 600—1300 *m.* Obývány jsou občasně a to v zimě pastýři a v létě sekáči trávy.

Absolutní výše domků a kolib dřevařů a vorařů, uhlířů a jiných, na rychlo a příležitostně postavených úkrytů, řídí se výškou místa právě využívaného. Pravidelně nepřesahuje 1000 *m* z toho důvodu, že lesy ve vyšších polohách vymykají se dosud hospodářskému využití jak pro nedostatek cest tak i pro obtížnost svážení kmenů do údolí.[34])

---

[33]) Jsou to na př. stina Seša, 1267 *m* bar., Pečeniska (s krytými stájemi), 1272 *m*, Stupa 1441 *m*, Pereluka, asi 1280 *m*, Sumieska, asi 1200 *m*, Holovčeska, asi 1460 *m*, Zanoha, asi 1440 *m*, stina pod Zanohou, asi 1460 *m*, Kožmieščеk, asi 1380 *m*, vesměs ležící na severní straně hlavního hřebene. Na jižní pak: stina Konec Polonyny, asi 1270 *m*, Sešul, 1235 *m*, Švajceraj pod Menčulem (asi 1250 *m* n. m.), Rohoněska Švajceraj, 1330 *m* bar., Rohoněska salaše 1100 až 1220 *m*, stina Kremaratyk (s krytými stájemi), 1411 *m*, Harmanieska, asi 1260 *m*, Breskul, asi 1440 *m*, pod Breskulem, asi 1410 *m*, Požiževska, asi 1440 *m*, Skotarskyj Brebenjeskul (s krytými stájemi), 1331 *m*, Balzatul, asi 1400 *m*, druhá stina Balzatul, asi 1440 *m*, několik stin zv. Tišora, 1360—1431 *m.*

[34]) Jiných, občasně nebo příležitostně obývaných domků a kolib není. Turistická ochranná chata pod Hoverlou ve výši asi 1380 *m* byla za války zničena. Vojenské ubikace, pocházející ze světové války, které nacházíme na čornohorském hřebenu nebo jeho úbočích, nelze vzíti v úvahu.

Výškový rozdíl mezi salašemi (stinami) a kolibami a mateřskými osadami jest značný, ba dosahuje až 800—1000 *m* relativního rozdílu. Stejně vzájemná vzdálenost jest často velmi značná. Na př. mezi Jasiní a stinou Holovčeskou měří 21 *km*, mezi Jasiní a Sešou 9 *km*, mezi Bohdanem a stinami Rohoněska 16 *km*, mezi Bohdanem a Balzatulem 22 *km*, mezi Rahovem a Balzatulem 36 *km*.

Přístup k salaším jest obtížný v závěru údolí a na horských svazích, kde často pěšina nebo stezka překonává i 30° svah a dovoluje tudíž v těchto místech dopravu mléčných produktů jedině koňmo. Jen k několika salaším ve správě státní postaveny byly před válkou lesním erárem dobré, pohodlné vozové cesty, které vystupují serpentinami z údolí a které za války doplněny neb rozmnoženy byly pohodlnými vojenskými cestami, často vyloženými kmeny.

Výškový rozdíl mezi zimarkami a trvalými sídly není celkem veliký (200—400 *m*). I vzdálenost jest celkem menší (5—24 *km*). Přístup k zimarkám, ležícím na horských hřebenech a svazích, jest však rovněž obtížný pro chatrné pěšiny a prudké stoupání.

Výškový rozdíl mezi hatěmi a hájovnami a osadami není značný (200—300 *m*). Za to vzdálenost přesahuje i 20 *km*. Přístup jest pohodlný po celkem dobrých vozových cestách.

Ráz a poloha sídelních jednotek. Domy stále obývané zachovávají jednak ráz původní, domácí, jednak městský, přenesený. Původní obydlí huculské tvoří dvorec, ohrazený plotem. Vlastní obytná budova podle možnosti obrácená k jihu hlavní frontou,[35]) postavena jest jako druhá stavení ze dřeva, neomítnutého a neomazaného hlinkou, a to tak, že otesané klády navrší se ve srub na podezdívce z kamenů. Otvory mezi kládami ucpou se mechem nebo hlinou. Střecha jest dřevěná, krytá dranicemi (dřevěnými prkénky) a dosti srázná. Dveřmi v hlavní frontě domku vcházíme do síně, odkudž vedou u chudších stavení dveře do světnice a komory, případně stáje, u bohatších do dvou světnic. Podlaha jest hliněná, zřídka kdy dřevěná. Několik zasklenných okének osvětluje místnosti. Světnice opatřena jest pecí, z níž kouř uniká komínem do předsíně a odtud buď otvorem ve střeše, krytým stříškou, ven, nebo u novějších budov někdy jest veden komínem. Budovy jsou výhradně přízemní. Opodál obytné budovy nachází se obyčejně kůlna, senník a stáje, v nichž přezimuje dobytek nebo v létě přenocují 1—2 kusy hovězího dobytka, které pro potřebu slad-

[35]) Srv. zvl. R. Kaindl, Die Huzulen Ihr Leben, ihre Sitten u. ihre Volksüberlieferung. Vídeň, 1897, zvl. str. 29 n a V. Šuchevič, Huculština. (Materijali do ukrajinsko-ruskoji etnologii, zvl. I díl, Lvov, 1899, str. 86—114.

kého mléka ponechávají se při stavení. Také tyto budovy postaveny jsou ze dřeva. Celek bývá obyčejně ohrazen plotem.

Od těchto domů původu huculského odlišují se domy městského rázu, vystavěné buď z pálených neb nepálených cihel nebo ze dřeva, pravidlem omítnutého, a to libovolného půdorysu. Tyto domy bývají i jednopatrové a mají kamna (sporáky) s komíny. Majitelem jsou většinou Židé a Maďaři.

Hájovny a domky hlídačů klauzur vystavěny jsou ze dřeva a od huculských staveb liší se pečlivějším provedením, úpravností, většími okny a kamny s komíny. Stáje jsou vždy odděleny a slouží i k přezimování dobytka, svedeného s polonin. Domky hlídačů železniční trati jsou z cihel a běžných tvarů.

Od stále obydlených sídel odlišují se svou stavbou salaše a koliby. Celkem můžeme rozeznávati trojí druh salaší a dvojí druh kolib.

Huculské salaše (stiny) jsou obyčejně prosté. Tam, kde chová se hovězí dobytek, sestaveny jsou z hrubě otesaných kmenů, sroubených v obdélný domek, rozdělený pravidelně příčnou stěnou na dvě místnosti. V jedné jest na zemi ohniště, vyložené plochými kameny a opatřené dřevěným stojanem na vaření a připravování sýrů a pod. Kouř uniká děrami mezi trámy a střechou, v níž bývá i otvor k tomu účelu vysekaný, nebo prostě dveřmi. V druhé místnosti jest skladiště hotových výrobků mléčných, potřeb na vaření a šatů. Podlaha jest dřevěná. Stropu není. Jednoduché lůžko z prken, vystlané houněmi, slouží v první místnosti hospodáři a hospodyni. Prostá lavice a špalek na sezení doplňují obyčejně celé zařízení takovéto salaše. Dřevěná střecha, sestavená z prken, naštípaných sekerou, přesahuje pravidelně zadní nebo poboční stranu stiny tak, aby podepřena několika dřevěnými sloupy, poskytovala přístřeší pro dobytek, který tu odpočívá na dřevěné podlaze, není však chráněn před nočními mrazy ani před větrem. Jen zřídka nacházíme tu dvě pobočné stěny, sroubené z trámů, obyčejně neotesaných, které chrání dobytek. Někdy přečnívá střecha i přední stranu salaše. Pod ní pak obyčejně se dobytek dojí. Zřídka přístřešky pro dobytek postaveny jsou odděleně od salaše. K obytné salaši přimyká se dále i malý chlév pro vepře, se všech stran krytý. Volné místo u salaše a přístřešků pro dobytek oplývá nadbytkem hnoje, který takto přichází na zmar, dále blátem a vysoko vzrostlým šťovíkem.[36]) Jest ohrazeno dřevěným plotem, často společným sousední salaši.

---

[36]) Po přemístění salaše stává se místo, zarostlé tímto plevelem, trvale hospodářsky nezužitkovatelné, čímž pastýři připravují se obyčejně o nejlepší a nejchráněnější dřívější pastviny.

Salaše, ve kterých žijí pastýři bravu, jsou mnohem chudší a pro menší majetnost hospodáře i jednoduší. Obyčejně v celé osadě pastevců bravu nacházíme jedinou větší dřevěnou dvoudílnou salaš, mající v jedné části místnost s ohništěm bez komína, ve druhé skladiště mléčných výrobků a mléka. Pastevci, kromě vrchního pastýře, který spí v salaši, v noci odpočívají v jednoduchých kolibách, postavených opodál salaše, sestávajících ze šikmé, prkenné střechy, podepřené na jedné straně o zemi, na druhé o dva dřevěné sloupky, a s obou stran chráněné prkny. Podlaha jest prkenná. Oheň hořící jako v salaších po celou noc, rozdělává se před kolibou na ohništi, vyloženém několika kameny a chráněném proti dešti shora dřevěnou stříškou, opřenou o sloupky. Taková koliba poskytuje místa pro dva pastevce. Jen v nižších polohách a při kolibách narychlo nebo na kratičkou dobu postavených dřevěná prkenná střecha a stěny bývají nahrazeny smrkovou korou.

Od těchto primitivních kolib, snadno přenositelných, odlišují se t. zv. kruhové koliby, se všech stran chráněné a pevně sroubené ze dřeva, opatřené i dveřmi. Půdorys jejich tvoří šesti- až i desítihran. Střecha uprostřed jest otevřená za tím účelem, aby oheň, ohřívající v noci kolibu, ji nesežehl a kouř mohl volně odcházeti. Na jedné straně koliby postaven jest přístřešek, kterým se do ní vchází. Tyto salaše staví si většinou jen dřevorubci, zřídka pastýři.

Brav u salaší stájí nemá. Jest sehnán v noci do ohrady, oplocené dřevěnými tyčemi, uprostřed níž nachází se obyčejně vyšší smrk, poskytující jakési ochrany bravu, vystavenému nepohodě. Jiná ohrada, opatřená na jedné straně otvory k vypouštění ovcí, slouží k dojení. Pro nezbytného vepře postaven jest u salaše malý, krytý chlév.

Zřídka kde nacházejí se dále na vytčeném území huculské salaše výstavnější, pevněji stavěné, prostrannější, mající i vyvýšené ohniště. Při nich nalézají se pak i stáje pro hovězí dobytek, se všech stran kryté.

Typem nejpokročilejší salaše, připomínající nám salaš alpskou, jest Švajceraj Rohoněska na polonině Rohoněska, tři, dnes opuštěné salaše tamže a Švajceraj pod Menčulem. Všechny postaveny byly lesní správou a hospodaření na nich prováděno, resp. provádí se racionálněji.

Švajceraj Rohoněska, ležící na terase pod Sešulem ve výši 1330 *m* (bar.), skládá se jednak z obytného stavení, majícího zděný přízemek a dřevěné patro (dům stavěn jest na nerovném tereně tak, že s jedné strany jest přízemní, s druhé patrový), kde nacházejí se dnes ještě nepoužívané obytné místnosti s kamny a zavedenou vodou, jednak z druhého, opodál stojícího obytného stavení s kamenou podezdívkou, kde žije správce a jeho pomocníci a kde pomocí strojů zpracuje se mléko. Podlaha jest dřevěná, v mlékárně vyložena jest polévanými

dlaždičkami. Okna jsou zasklena. Stáje pro hovězí dobytek postaveny jsou za touto budovou, jsou se všech stran kryté a mají dřevěnou podlahu. Nedaleko nachází se chlév pro vepře. Huculové a Huculky, pečující o dobytek, žijí v blízké kruhové kolibě. Všechna stavení ohrazena jsou vysokým plotem. Podobného rázu jest i švajceraj pod Menčulem, s parními stroji na zpracování mléka.

Tři, dnes opuštěné a polozničené salaše, ležící nad Švajceraj Rohoněskou (1580 *m* bar.), byly rovněž pevně postaveny. Společná jejich střecha, kdysi z dranic, kryla světnice o kamenných zdích a podlouhlou dřevěnou stáj, rozdělenou na několik oddílů, majících vlastní vchody. Podlahy byly všude dřevěné. Světnice opatřeny byly ohništi s komínem. Zpracování mléka dělo se tu stroji.

K občasně obývaným stavením patří konečně i zimarky, pasterky, podlouhlé stáje, se všech stran kryté, ve kterých přezimuje dobytek. K nim přistavěna jest světnička pro pastýře s ohništěm. Seno na zkrmování uloženo bývá v sennících nebo oborichách.

P o l o h a s í d e l. Trvalá sídla vyhledávají především široká údolí řek a větších bystřin, která dovolují ve větší míře hospodářské využití půdy (zvl. snesených a zvětralých hornin), snadný přístup a styk dopravní a průchodní a která jsou do jisté míry chráněnější než exponovaná úbočí a hřebeny. Před případným nebezpečím zaplavení a zvláště v dolním toku řeky nebo bystřiny, kde pro menší spád vznikají v širokých údolích zákruty, vystupují sídla podle možnosti na terasy, jež je chrání před inundací. Toho rázu jest vlastně většina osad na vytčeném území: Jasiňa, Lazeščyna, Kevele, Burkut (Kvasy), Bilin, Verchovaty, Vydryčka, Voučy, Kvašnyj, Bohdan a Luhy. Všechny tyto osady opírají se o dopravní cestu. Obyčejně však část osady rozkládá se i na horských svazích, zvláště jižních, svírajících údolí, takže nelze označiti polohu těchto skupin osídlení jako čistě údolní, nýbrž smíšenou (dnes hlavní díl vesnice jest v údolí a má polohu čistě údolní, vedlejší pak díl má polohu úboční, při čemž svahy, na kterých nacházíme osídlení, dosahují sklonu až 20—25°). Jednotky sídelní mají pak tu polohu jednak údolní, jednak úboční.

Údolní polohu mají dále domky hlídačů hatí a hájovny, které nacházejí se rovněž v údolí. Polohu úboční mají samoty a shluky chat, trvale osídlených, které jednak z nedostatku vhodné a volné půdy v údolí, jednak pro hojnost většinou umělých luk a pastvin ve vyšších polohách vystupují na horské svahy (na př. Mlaky, Števiory a j.).

Občasně obývaná sídla mají polohu údolní a úboční.

Údolní polohu mají občasně osídlené jednotky, které nalézají se jednak v širších údolích (zimarky, chatrče a koliby dřevorubců, vo-

rařů a pod.), jednak v závěrech údolí, kde vyhledávají zvláště terasy a dna kotlů (salaše a koliby pastýřů). Úbočni polohu mají pak salaše a koliby pastýřů a dřevorubců.

Tvar osad závislý jest zvláště na jejich vzniku a poloze.

Na vytčeném území původně existovaly jen samoty, popřípadě menší shluky sídelních jednotek.[37]) Teprve vznikem řádných dopravních cest dán byl podklad i ke vzniku vesnic a to typu silničního, se kterým nejčastěji se tu setkáváme. Dopravní cesta lemována jest příbytky nejprve s jedné strany, sluneční nebo nezastiňované, a teprve v dalším rozvoji při vzrůstajícím nedostatku vhodné a volné půdy i po druhé straně. Vsí silničních, které by měly domky ve dvou nebo více souběžných řadách, není. Vidíme-li někde náběh k tomuto pokročilejšímu stavu, jest to proto, že se tu sbíhá několik cest nebo že původní, starší cesta byla opuštěna a nově vedená cesta (silnice) přeložena byla na výhodnější stranu. (Na př. Jasiňa, Bohdan.). Ale i při těchto osadách nachází se, jak již výše jsme podotkli, často řada samot, ležících na blízkých horských svazích, které buď dříve tvořily původní díl vesnice nebo které vznikly v novější době pro nedostatek vhodné a volné půdy při dopravní cestě v údolí.

Vsi silniční vznikají obyčejně na souběhu dvou údolí, jimiž probíhají význačnější dopravní cesty, sledující tok řek, (na př. Jasiňa, Bohdan), a řidčeji v údolí jen průchodním (Burkut (Kvasy), Vočy a j.).

Samoty a shluky sídelních jednotek tvoří roztroušenou osadu jednak na svazích nebo v údolí, postrádajícím význačnější cesty dopravní nebo dosud řidčeji obydleném.

Salaše a koliby pravidelně tvoří skupinu, jejíž tvar jest závislý na místních poměrech zvláště morfologických a j.

Cesty na území čornohorském. Při osídlení a jeho rozvoji a dále hospodářského využití celého území nemalé důležitosti jsou cesty, dovolující spojení průchodní a spojení a dopravu vzájemnou mezi jednotkami osídlení.

Jest nepochybné, že v nejstarších dobách uplatňoval se tu především ráz průchodní a spojovací mezi kraji, ležícími severně a jižně od Karpat. Kompaktní hřeben čornohorský byl však vždy velkou překážkou vol-

Teprve od příchodu Rumůnů, žijících v Marmaroši jako pastýři a přístupnějších sedel. Proto zatlačoval průchodní cestu, spojující sever s jihem a přecházející hlavní karpatský hřeben přes sedlo Jablonické, poměrně nízké a snadno přístupné, na půdě karpatoruské do širokého údolí Lazeščyny a Černé Tisy, na půdě haličské do údolí ř. Prutu.

---

[37]) Viz výše str. 16.

Směr původní této cesty byl vsv—jzj.[38]) Teprve později odbočují z této hlavní průchodní cesty odbočky, které jsou lokálního významu, do jednotlivých přístupnějších a širších údolí, nevykazujících velkého stoupání. Jest to především údolí Bílé Tisy, Hoverly a Balzatulu, dále střední a horní část údolí Lazeščyny a údolí jiných větších přítoků obou Tis, podle kterých člověk celkem snadno mohl proniknouti do středu nesmírných hvozdů čornohorských z důvodů loveckých nebo pastýřských. Úzkým a hluboce vyerodovaným údolím, protékaným bystřinami a zarostlým hustou vegetací, vždy se však vyhnul a i dnes ještě se vyhýbá.

Teprve od příchodu Rumunů, žijících v Marmaroši jako pastýři a nomadisujících tu se svými stády ovcí, vzniká pravděpodobně hustší síť podružnějších stezek a cest, které vyšlapány byly pastýři a dobytkem a které v pozdějších dobách byly doplňovány novými a novými cestami, odbočujícími dále z těchto cest. Jsou to převážně t. zv. pastýřské stezky, často alespoň z části sledující stezku lovce a stezku, vyšlapanou zvěří. Vedou jen širšími, přístupnějšími údolími a z nich buď nejkratším směrem často až v úhlu 30° vystupují po svazích, zarostlých lesem, na hřeben, nebo používají hřebenů rozsoch, snižujících se do údolí, aby dostihly polonin na hlavním hřebenu čornohorském. Jakmile dosáhnou hřebene, porostlého lesem, s důsledností vedou po něm, nedbajíce výškových rozdílů, tu ovšem ne již značných. Teprve na hřebenu, pokrytém poloninami, vyhýbají se jak jednotlivým vrcholkům, které obcházejí často bez ohledů na značné zacházky tím způsobené, tak i závěrům údolí, vnikajícím do hřebene, a rozvětvují se pak v dosti hustou síť stezek a cest, jimž nepřekáží v jejich rozvoji vegetační pokrývka.

Tyto pastýřské cesty (plaje), neměnící zhruba po dlouhý čas, ba i staletí svůj směr, teprve častějším užíváním rozšiřují se v širší a to zvláště tam, kde spojení mezi salaší a trvalým sídlem bylo a jest častější a doprava mléčných produktů do údolí pravidelnější. Uměle upravovány jsou pak alespoň jejich nejneschůdnější části v zaplavovaných nebo bahnitých místech nanesenými kameny, větvemi a pod. V nejnovější době stavěny jsou i mosty přes bystřiny těžko přebroditelné. V lesích, procházených stezkami, oklešťovány jsou větve stromů, překážející procházejícím nebo poráženy jsou i stromy, stojící v cestě, čímž však celková jakost těchto cest příliš se nemění. Někdy z důvodu neschůdnosti, zvl. pro nerovný terén nebo bahnitý podklad, jsou

[38]) Srv. J. Holovackij, Karpatskaja Rus. Slavjanskij Sbornik, St. Petersburg, 1875 (I.), str. 20 a n.

i překládány. Často za dešťů stávají se koryty dravých bystřin, jež vyhlodávají jejich podklad nebo je opět zanášejí. Jen u některých jejich část, vedoucí jednak údolím, jednak vystupující po úbočí na poloniny, rozšířena byla zvl. v posledních dobách na cesty vozové a to jak z potřeby, diktované vzrůstajícím osídlením, trvalým nebo občasným, tak i z důvodu hospodářského využití kraje, či za světové války z důvodů strategických. Ale i tyto cesty, pravidlem neudržované, pro podajný materiál (pískovec nebo dřevo), z něhož jsou zbudovány, dosti rychle se porušují.[39])

Nejstarší a nejužívanější cesta, jak výše bylo již řečeno, jest průchodní cesta, dnes státní silnice a souběžná s ní železniční trať, vedoucí podél Černé Tisy a Lazeščyny na sedlo Jablonické a odtud podél ř. Prutu do Delatýna.[40]) K ní pojí se odbočka, dnes vicinální silnice, odbočující u Ustěrik do Bohdanu.

Z těchto dvou cest (silnic) odbočuje pak řada odboček, vedoucích jak širšími údolími větších přítoků, tak i po příhodných rozsochách, vycházejících z hlavního hřebene, k němuž všechny směřují a který případně i překročují.[41])

---

[39]) Za světové války postavena byla tu řada t. zv. vojenských cest, vedoucích často v pohodlných serpetinách na čornohorský hřeben nebo spojujících místa, tehdy vojensky důležitá. Přirozeně, že některé z nich, pokud se kryly s cestami dříve domácími lidmi užívanými, dnes dobře nahrazují starší, horší jakosti. Většina jich, protože zájmy, pro které byly vybudovány, nekryjí se se zájmy hospodářskými, leží dnes ladem. Těmto pak cestám nevěnujeme své pozornosti.

[40]) Tato silnice projektována byla teprve za M. Terezie, vystavena však a dopravě odevzdána až koncem první poloviny stol. XIX. a to nejprve jako zemská cesta, pak jako zemská a po r. 1860 jako říšská silnice. Srv. část. Biedermann J., Die ungarischen Ruthenen, ihr Wohngebiet, ihr Erwerb und ihre Geschichte. Innsbruck, 1862, I. díl, str. 66, dále mapy Magyar-Ország General Post u. Strassen Karte des Königreichs Ungarn, Wien, 1849 a j. Železniční trať a to úsek Ustěriky-Jasiňa-Stanyslavov vzniká pak až po r. 1900.

[41]) Základní síť těchto cest a stezek jest tato: (Viz příslušné mapy v měřítku 1 : 25.000 a 1 : 75.000. Některé z cest, zakreslených na těchto mapách, neexistují. Naopak řada cest a stezek není na nich označena. Vzdor tomu však podávají tyto mapy a to zvl. listy, doplněné a opravené za světové války, do jisté míry dobrý přehled sítě těchto cest a stezek.)

I. Cesta z Jasině po hřebeni mezi Č. Tisou a p. Lopušankou (částečně vozová cesta) pod Sešu, dále t. zv. Lopušanka plajem, kotlem Kevelským pod Pietroš, na sedlo pod Pietrošem (kota 1744), kde se připojuje na cestu X.

II. Z Lazeščyny (asi od koty 655 *m*) údolím Lopušanky k hati Lopušanka (898 *m*, vozová cesta), na stinu Pečenižku (1272 *m*), kde se připojuje na Lopušanka plaj ve výši asi 1540 *m*. Dále směrem I.

Jakost cest jest průměrná v širších údolích, kde byly svého času rozšířeny ve vozové a v silnice. Odbočky, z nich vycházející, jsou však jakosti mnohem horší, zřídka vozové. Vyjma silnic většina cest není udržována. Místy, pokud se dotýkají cesty luk, nebo jimi procházejí, bývají ohrazeny plotem. Celkem však nešetří plodné půdy, které se nevyhýbají.

III. Z Lazeščyny (asi od koty 875 *m*) po hřbetu Pletvaru a Javoriček na kotu 1078, dále Holovčeským plajem na stinu Holovčeska, kde se připojuje na hřeb. cestu X. Tato cesta dnes ztratila na významu pro snazší připojení této stiny cestou vedoucí přes hať Lazeščynu.

IV. Z Lazeščyny (asi od koty 699 *m*) na Studenu (894 *m*), kde se připojuje k cestě III. na kotě 1078.

V. Horizontální spojka mezi stinou Sešou, Pečenizkou a Holovčeskou, od stiny pod Sešulem sestupující přes Hručakový hruň do Svidovce (631 *m*).

VI. Ze Zemiru (asi od koty 720 *m*) podél p. Zemiru na Voronienku, kde se připojuje na cestu po hřebenu, viz VIII.

VII. Ze Zemiru (asi od koty 710 *m*) na Verch Debry (1237 *m*), kde se připojuje na cestu po hlavním hřebenu VIII.

VIII. Hřebenná cesta od sedla Jablonického (931 *m*) přes Voronienku (879 *m*), Hryhorivku (1385 *m*), Kukul (1540 *m*), pod kotu 1571, odkud sestupuje jednak do Haliče, jednak k salaši Kožmieščck. Typ hřebenné cesty, jen částečně vedoucí po poloninách, většinou však lesy, které tu kryjí i horský hřeben.

IX. Ze Zemiru (asi od koty 720 *m*) podél potoka Lazeščyny vozovou cestou na Kožmieščck (873 *m*) a hať Kožmieščck (asi 880 *m*). Odbočky z údolí Lazeščyny údolím potoka Studenyj na Studenu hať (862 *m*, chatrná vozová cesta) a odtud připojení na cestu III. u koty 1020. U koty 873 (hájovna Kožmieščck) odbočka údolím p. Lazeščyny k hati Lazeščyně (975 *m*, vozová cesta) a odtud dnes vojenskou cestou serpentinami ke hřebenné cestě X. na kotu 1552. Konečně od hájovny Kožmieščck (873 *m*) odbočka přes koty 990—1139, 1221—1272 cesta, označená na původním snímku jako turistická stezka, vedoucí ke zničené „chatě uherské“ a ke stině Zanoha a dále se připojující na hřebennou cestu X. u koty 1536.

X. Hlavní hřebenná cesta, vedoucí od Pietroše (1563 *m*) přes koty 1517, 1536, pod Hoverlu na kotu 1744, dále po vlastním hřebenu čornohorském, přes Požyževsku (1822 *m*), Dancyš (1866 *m*), Turkul (1932 m) na Rebra, Pohane misce, Menčul (2000 *m*), přes koty 1880, 1852, na Popa Ivana (Čornou horu, jejíž vrchol podchází), pak na Horu Vaskul a až pod Stoh. Jest to typ hřebenné cesty, vedoucí výhradně po poloninách. Na tuto hlavní cestu připíná se pak řada spojek. Jest to především cesta, vedoucí z údolí Č. Tisy a to údolím p. Kevele na Rivny hruň-Konec Hruň (1478 *m*) a pod Sešulem ke stině Rohoněska, nad níž připojuje se jednak na cestu, vycházející z Konec Hruň a vedoucí přes koty 1722, 1710, 1698, pod Pietrošem na kotu 1610 a na hlavní hřebennou cestu, jednak na cestu vycházející od sedla 1591 *m* pod Sešulem a mírně vystupující po úbočí svahu, vyznačeného kotami 1722—1698, jednak od sedla 1591 *m* a vedoucí po úbočí svahu, vyznačeného kotami 1722—1698 a

Podle polohy můžeme všechny cesty rozděliti na údolní, vedené po dně údolí, vykazující celkem mírné stoupání a chráněné před zátopami tím, že podle možnosti položeny jsou na terasách a nánosech. Končí obyčejně tam, kde sbíhá se několik údolí užších, vylučujících další cestu údolím po dně podél bystřiny až k jejím pramenům z důvodů zvl. morfologických a vegetačních. Dále jsou to cesty úbočí, vystupující po horských úbočích a spojující údolí se hřebenem. Pravidlem vykazují značné stoupání. Jen úboční cesty,

obcházející odnož hřebene, která vybíhá za kotou 1744, vedoucí dále po její západní i východní straně a pokračující jako pohodlná, rovněž vozová cesta po úbočí Pietroše pod kotu 1610, za kterou u koty 1563 počíná vlastní hřebenná cesta X. Dále jest to pohodlná vozová cesta, vedoucí údolím p. Kevele na sedlo pod Sešul (1591 *m*), kde připojuje se na výše uvedené. Burkut (Kvasy) spojuje s čornohorským hřebenem cesta, vystupující dvěma rameny ke kotě 1248 a odtud vedoucí k Rivny Hruň. Konečně jsou to spojky mezi Ustěrikami a Čornou horou, přecházející Števioru (1249) a Ozierec, Svytnyj Hruň (1230 *m*) a u Konec Hruň připojující se na výše uvedenou cestu.

XI. Cesta z Vydryčky (v údolí B. Tisy, asi od koty 510 *m*) podél p. Pavlek až k salaši Sešul (1235 *m*) a připojující se na spojky cesty X. Typ údolní cesty v úzkém údolí.

XII. Cesta z Bohdanu (asi od koty 550 *m*) přes Veliki Mlaki, pod Mlaki na Kičeru (1307 *m*), pod Šehlenem na koty 1305, 1188 a připojující se na spojku cesty X.

XIII. Cesta z Bohdanu (asi od koty 548 *m*), vedoucí podél p. Bohdan vozovou cestou na hať Bohdan (833 *m*). Od koty 782 *m*, 1½ *km* před hatí, odbočuje cesta Rohoněska plaj a vozová cesta na poloninu Rohoněska, kde se připojuje na spojky cesty X.

XIV. Cesta z Luhů (asi od koty 620 *m*) na Preluku (1003 *m* a 1025 *m*), přes Husarovu (1154 *m*) pod Menčil na koty 1419, 1294, 1319, 1316, 1433, na stinu Breskul a dále připojující se na hřebenní cestu X.

XV. Cesta z Luhů (asi od koty 645 *m*), vedoucí údolím p. Hoverly jako vozová cesta na hať Hoverlu (758 *m*) a odtud jednak podél p. Hoverlaše a Ozyrného p. na stinu Požyževsku a stinu pod Breskulem a dále připojující se na cestu X., jednak přes Turkulskyj hruň (1186 *m*) pod Turkulem na Rebra (směr X.), jednak podél p. Brebenjeskul na Tomnatyk Vel. a cestu X.

XVI. Z Luhů (asi od koty 647 *m*) vycházející Horodecký plaj na koty 1222, 1250, 1205, 1271, na M. a V. Klyvu, koty 1349, 1444, 1406, na Skotarskyj Brebenjeskul (1331 *m*).

XVII. Z Luhů (asi od koty 645 *m*) cesta vedoucí podél p. Balzatulu (Tišory) jako vozová na hať Balzatul (1021 *m*) a odtud jednak na Horu Vaskul (1734 *m*), jednak na poloninu Balzatul pod Popem Ivanem, kde se připojuje na cestu X.

K této základní síti cest a stezek přistupuje pak veliká řada podružných stezek, často vyšlapaných zvířaty a pak i lidmi, směřujících od salaší k pastvinám, k pramenům a pod.

které sledují hřeben po jeho délce po úbočí, zachovávají často neobyčejně důsledně zvolenou isohypsu a překonávají tudíž jen malé rozdíly výškové. Konečně jsou to cesty hřebenné, které vedeny jsou po hřebenu buď pokrytém lesem nebo poloninou. V prvém případě obyčejně nevyhýbají se vrcholkům, kdežto ve druhém pravidelně je obcházejí.

Původ většiny všech cest a stezek jest přirozený a teprve celkem v nedávné době i umělý. Nejprve zvíře, pak člověk vyšlapal původní přirozenou stezku, která někdy rozvojem dopravy a postupem osídlení a hospodářského využití byla rozšířena uměle (na př. cesty k hájovnám a k hatím).

Podle funkce nacházíme tu pak především cesty salašní, které spojují údolí a trvalá sídla s poloninami a loukami, na kterých nacházejí se pasterky a salaše, pak pastýřské, spojující salaše s pastvinami a prameny, obyčejně vyšlapané dobytkem, dále lovecké, vedoucí z údolí do lesů za zvěří a často používající i většího dílu cest salašních, dřevařské, stotožňující se obyčejně se salašními, dovolující přístup k lesům, hatím a umožňující jejich využití, pak průchodní, zachovávající částečně dosud původní svou podobu (na př. některé cesty průchodní, přestupující čornohorský hřeben), dále domovní, spojující jednotky osídlení. Cest turistických není. Jediná cesta, označená názvem turistická, vedoucí od hájovny Kožmieščck ke zničené dnes chatě turistické pod Hoverlou, jest vlastně původem i rázem salašní.

Přirozeně, že některé z výše jmenovaných cest slouží současně i jiným funkcím vedle své hlavní.

Všechny tyto cesty nejsou však rovnoměrně rozloženy na ploše vytčeného území. Na jejich hustotu nemalý vliv má totiž jednak blízkost a hojnost trvalých sídel, jejich vzdálenost, morfologické a vegetační podmínky, dovolující nebo zamezující přístup k čornohorskému hřebenu a podmiňující v důsledku toho i postup člověka do krajů, dříve hospodářsky buď úplně nebo jen nepatrně využitých.

Cílem, k němuž paprskovitě se sbíhají, jest celý čornohorský hřeben s jeho rozsochami. Východisky jsou pak trvalá sídla, osady, ležící na jeho úpatí nebo ve větších, snadno přístupných údolích.

Hospodářské využití Čorné hory a zaměstnání obyvatelstva.

Hojnost alpských luk, polonin, sloužících jako pastviny, i dostatečné množství luk, na kterých se kosí tráva na zimní krmení dobytka, svedeného do pasterek nebo do vsí, a nedostatek

půdy, která dovolila by v plné míře zemědělství, jest příčinou, že obyvatelé celého vytčeného území zaměstnávají se v prvé řadě pastýřstvím (chovem bravu a skotu) a zpracováním mléčných produktů.

Především chová se tu hovězí dobytek, který v létě vypásává se na jednotlivých salaších na poloninách, na kterých vyhledávána jsou chráněná místa, snadněji dostupná, mající dostatek vysoké tučné trávy a pitelné, pokud možno pramenité vody. Hovězí dobytek chová se tu především pro mléko. Kromě skotu ve velkém počtu chová se tu i brav, který nepotřebuje takového ošetření jako skot, spokojí se jak menším dostatkem vody, tak horší travou, i obtížněji přístupnou a vyšší polohou a přináší kromě mléka i potřebnou vlnu. Svou menší cenou jest také dosažitelnější i chudšímu. Chov koní malé, ale silné rasy, t. zv. huculů, určen jest dnes jen domácí spotřebě. Obyčejně u každé salaše chová se jen několik koní, jednak tolik, kolik stačí pro svážení mléčných výrobků, jednak ty, které zakoupil Hucul „na výkrm" od Žida.

Způsob salašnictví a pastýření u Huculů jest pak obyčejně ten, že společně několik hospodářů, žijících ve společném shluku salaší na poloninách, počátkem léta, kdy sejde sníh, vyžene svůj dobytek na poloninu, kterou si pronajali od státu a na které si postavili salaše nebo koliby. Brav svěřuje se obyčejně pastýři, jenž změří průměrný výnos mléka svěřených ovcí pomocí dřevěných hůlek, na nichž označí zářezem změřenou denní produkci a pak podle nich rozdělí mléčné výrobky a mléko. V každé salaši žijí 3—4 osoby a to obyčejně jedna starší, vedoucí výrobu mléčných výrobků a ostatní mladší (pastýři). Někdy žijí na salaších jen ženy. Děti nacházejí se tu jen zřídka. Denní produkce mléka zpracuje se pak buď v sýry ovčí či kravské a v poslední době i v máslo, nebo převařené mléko dává se zkysati a dopravuje se pak do vesnic, ležících v údolí a postrádajících v létě téměř úplně dobytka, kde v domácnosti, zvl. během zimy, se spotřebuje.[42]) Doprava zkysaného mléka nebo másla děje se pomocí koní a vozů 1—2krát týdně a to v berbynicích (soudcích) a jiných dřevěných nádobách. Sýry dopravují se obyčejně až ke konci letního vypásání.

Od tohoto primitivního způsobu chovu dobytka na poloninách, který jest většinou v rukách Huculů, nutno odlišiti vyspělejší salaš-

---

[42]) O výrobcích mléčných srv. na př. R. Kaindl, Die Huzulen, str. 59, J. Král, Na Čorné hoře, str. 45, a Mezi Huculy, Časopis turistů, Praha, 1922, zvl. str. 109, Šuchevič, Huculština, díl II., str. 213 a n. a j.

nictví, jehož příkladem jest salašnictví, které nacházíme v salaši t. zv. Švajceraj Rohoněska a ve Švajceraj pod Menčulem, postavených a spravovaných lesním erárem. Dobytek v těchto salaších jest svěřený. Hucul, majitel několika kusů hovězího dobytka, na počátku léta odvede je do těchto salaší a zaplatí za „výpas" od kusu 10—80 Kč. Výnos mléka každého kusu změří se na litry a na podzim, kdy hospodář odvede svůj dobytek, podle odhadnutého počtu získaného mléka obdrží peněžitou náhradu. Dobytek na těchto salaších uzavírá se na noc do krytých stájí a jest pečlivě ošetřován. Doprava výrobků, zpracovaných stroji, v salaši pod Menčulem parními, a to především másla a t. zv. švýcarského sýra, děje se vozem podle potřeby.

Na podzim z těchto a huculských salaší svádí se dobytek jednak do údolí do vesnic, jednak do zimarek, ležících „pod poloninou", na nižších loukách. Tu vykrmován jest dobytek až do jara, kdy sváděn jest do údolí, jednak pro potřebu hnoje, jednak na práci, svážení kmenů a pod. V červnu jest pak opětovně vyváděn na poloniny. Protože při dnešním celkem ještě málo hospodárném způsobu lukaření výnos luk pravidlem nestačí, aby uživil přes zimu všechen dobytek, jest nutno jeho část odprodati. Proto na podzim, když dobytek se sežene s polonin, konají se ve větších střediskách, na př. v Jasini a Rahově, trhy na dobytek.

Jest nesporné, že při rozšíření racionelnějšího chovu dobytka, který na př. nacházíme na čornohorských „Švajcerajích", mezi Huculy a méně plenivém využití polonin, státem přímo neobhospodařených, dosáhlo by se daleko většího výnosu a lepší rasy dobytka i možnosti, uživiti větší jeho počet.

Trvalé osídlení údolí a příznivých svahů horských jest podporováno a dále i podporuje zemědělské zužitkování půdy. V blízkosti trvalých sídel nacházíme tu často vedle luk i ve značné výši záhony nebo podobná horská políčka a to bramborů, bobu, ovsa, ječmene, lnu, níže i kukuřice a zelí. Jejich absolutní výše nepřestupuje však 950—1000 *m*. Lukaření všude dána jest tu však přednost jednak z potřeby sena na zimní výkrm, jednak pro obtížné obdělávání půdy, jemuž se Hucul vyhýbá, a nedostatek pracovních sil, vázaných v létě pastýřstvím a chovem dobytka. Hospodaření i tu jest jen extensivní. Výnos jest proto celkem malý a hospodář jest tudíž odkázán na dovoz potravin, zvl. brambor a kukuřice.

Důležitým, u mnohých Huculů hlavním pramenem obživy jest dále dřevaření, opírající se o ohromné komplexy lesů, pokrývajících z větší části vytčené území. Ale ani lesní hospodářství není na

žádoucí výši a omezuje se vlastně jen na převážně extensivní využití menších částí lesem pokryté půdy, především v širších údolích, protékaných vodními toky, dovolujícími snesení narubaných kmenů, nebo částí lesa, které nacházejí se v jejich okolí.

Stromy kácejí se pravidlem podle druhu stromu na podzim a na jaře a to tak, že obyčejně se podsekávají sekyrami i stromy největšího objemu. Kmen, zbavený větví a kůry, které přicházejí většinou na zmar — používá se jich jedině na topení a krytí na rychlo postavených kolib — na silnějším konci se zakulatí, aby bylo možno lépe jej smýkati po sněhu a aby lépe sjel dřevěným žlabem (rizňa) do údolí. Dřevěné tyto žlaby, které dovolují dopravu kmenů na místech, kde jinak bylo by velmi obtížné smýkati kmen do údolí, sroubeny bývají z několika silných kmenů, které tvoří otevřené koryto, někdy 3—5 *km* dlouhé, po němž někdy i pomocí vody sjede kmen s neobyčejnou rychlostí do údolí. V údolí, kde žlab neb smyk končí, nahromadí se kmeny v „mohyly" a pak po částech se dotáhnou koni nebo voly na konečné skladiště, nacházející se u potoka nebo bystřiny, kde se kmeny změří, očíslují a složí v hromady. Většina této práce děje se v zimě, kdy sníh ulehčuje dopravu. Na jaře, po velikonočních svátcích, a zvláště v létě dopravují se pak kmeny dále po vodě. Protože však proud stálé vody menších přítoků Černé a Bílé Tisy nestačí dopravovati tyto kmeny, jest nutno uměle nadržeti vodu v t. zv. hatích, zvaných též klausury.[43]) Jednodílné vory, skládající se podle síly a délky kmenů a kubického obsahu jejich často až z 15 kmenů, sroubí se pak přímo v korytě bystřin a potoků. Vypuštěná voda z hatí, proudící nepřetržitě podle velikosti hati 2—6 hodin, postačí pak, aby několik vorů v malých intervalech za sebou (4—10 minutových

---

[43]) Tyto nádržky nacházíme v horním díle každého většího údolí a to tam, kde spojuje se několik menších údolí, protékaných bystřinami. Postaveny jsou z hlíny, kamení, a vytuženy kmeny. Opatřeny jsou několika propustěmi, jimiž jednak přetéká voda, převyšující nejvyšší stav vodní hladiny, jednak vypouští se nadržená voda, určená ke snesení vorů. Na vytčeném území nacházíme celkem 7 nádržek a to

hať	Lopušanka	ve výši	888 *m* n. m.,	o obsahu	asi	35.000 m^3,
„	Studena	„ „	862 *m* n. m.,	„	„	86.500 m^3,
„	Kožmieščok	„ „ asi	880 *m* n. m.,	„	„	126.000 m^3,
„	Lazeščyna	„ „	975 *m* n. m.,	„	„	100.200 m^3,
„	Bohdan (Lolin)	„ „	833 *m* n. m.,	„	„	109.000 m^3,
„	Hoverla	„ „	758 *m* n. m.,	„	„	178.000 m^3,
„	Balzatul	„ „	1021 *m* n. m.,	„	„	137.000 m^3.

(Srv. Biró Z., A Máramarosszigeti m. kir. Erdöigazgatoság kerületének gazdasági viszonyai. Marm. Sziget, 1904, str. 33 n.

podle mohutnosti a tíže voru) za řízení 2—4 vorařů-veslařů sjelo až k soutoku několika bystřin, odkud větší množství stálé vody doprav vory dále. Jest ovšem přirozeno, že nutno místy koryto bystřiny alespoň částečně přizpůsobovati této dopravě vorů.[44])

Jen několik jednolistových pil na Černé a Bílé Tise využívá vodní síly k rozřezávání kmenů na prkna. Pravidelně však zpracují se kmeny v trámy a prkna ručně, pilou nebo sekerou. Dřevo tvrdé i měkké zpracuje se dále zvláště po domácku. Zhotovují se z něho hospodářské potřeby pro domácnost, na př. vozy, saně, sudy, soudky, díže, talíře, lžičky, kalíšky a pohárky, kulaté krabice na sýry a jiné pokrmy, hole a pod., které někdy bývají ozdobeny řezbářskou prací a mosaznými, vraženými plíšky či v poslední době jen vypalovanými ornamenty.[45]) Ze smrkové kůry stáčejí se trembity, pastýřské trouby. Jinak slouží dřevo jako stavební materál, palivo a na výrobu dřev. uhlí. Většina dřeva však zužitkuje se dosud mimo vytčené území.

Huculové vyrábějí si však sami i jiné domácí potřeby z materiálu, částečně doma získaného a zpracovaného. Tak z vlny hotoví hrubé sukno na oděv, pletou punčochy, hotoví houně a pokrývky, dále pestré zástěry a pod., z vydělané, zakoupené kůže, zhotovují si obuv (opánky), opasek a tašky — kožichy vyráběny jsou dnes již řemeslně a to především Židy —, ze lnu tkají plátno, z něhož šijí si košile, ozdobené pěkným vyšíváním zvl. na ramenou. Krásná jest jejich keramika. Ale i tu pozorujeme již, že tato podomácká výroba, která nacházela se ještě před světovou válkou na vysokém stupni, dnes pozvolna jest zatlačována výrobou řemeslnickou nebo továrnickou, přinášející dokonalejší výrobek za levnější peníz.[46])

Řemesla, zvl. obuvnictví, krejčovství, výroba kožíšků a pod., dnes v rukách většinou židovských, nachází se jen ve větších střediskách

---

[44]) Tato regulace provádí se tím, že břeh vyspravuje se tam, kde působí erosivní síla vody, trámy, navršenými na sebe a navzájem sroubenými, a kameny, za ně navalenými. Někdy celé koryto zvl. na místech, kde voraření by bylo velmi nebezpečné, vykládá se otesanými kladami, po nichž vor snadno sklouzne. V zatáčkách napomáhá se řízení voru navršeným roštím nebo větvemi, zatěžkanými kamením, které zabraňují voru, aby vybočil z koryta bystřiny.

[45]) Na podporu řezbářství a povzbuzení tohoto podomáckého průmyslu vůbec založena byla v Jasini specielní škola řezbářská.

[46]) Srv. J. Cihelka: Podomácká výroba v P. Rusi. Věstník min. prům. obchodu a živností, 1922, III. červenec, č. 7, str. 5—13 a totéž v Příloze Úředních novin, 1922, Užhorod, č. 8, str. 1—6. O podomáckém průmyslu Huculů zahraničních, nelišících se mnoho od karpatoruských, srv. podrobná data zvl. Šuchevičova, Huculština, díl II., 240 a n.

(Jasiňa). Z výroby průmyslové možno uvésti jen cihelnu u Jasině a několik malých mlýnků na obilí a kukuřici na B. a Č. Tise.

Obchod (koupě mléčných výrobků a dobytka, prodej zvl. potravin a výrobků průmyslových) mají v rukách také většinou Židé.

Doprava jest dosti vyvinutá. Podmíněna jest značnými vzdálenostmi jednotlivých sídel, terénem a potřebou statků, které nutno sem dovážeti (zvl. brambory, mouka, sůl a j. potraviny). Účast na dopravě mají Židé i Huculové.[47])

Z hornin, na vytčeném území se nacházejících, jest hospodářsky využit tvrdý pískovec, který se láme v několika lomech v okolí Jasině, a to jak na stavbu a opravu silnic, tak na podezdívky domů a pod.

Bohatství skalního oleje, které předpokládá se u Jasině, dnes leží ladem.[48]) Jen některé minerální prameny, prýštící na úpatí Čorné hory, jsou hospodářsky využity.[49])

Za celkového tohoto stavu hospodářského využití vytčeného území, které jest výhradně hornaté a dosahuje výše velehorské, není divu, že jest dosud velmi řídce obydleno. Bohužel nemáme dosud po ruce podrobných dat, která by nám podala obraz hustoty osídlení tohoto území. Předběžné výsledky sčítání z r. 1921[50]) udávají průměrnou hustotu obyvatelstva slúžnovského okresu rahovského, do něhož náleží i vytčené území, na 18 osob na 1 *km*², takže celý tento okres patří k nejřidčeji zalidněným a osídleným krajům Československé republiky. Obec Jasiňa podle předběžných výsledků sčítání r. 1921 má 2.267

---

[47]) Suchozemská doprava děje se jednak koněm, kterému jsou přístupny i nejvyšší části čornohorského hřebene, jednak vozem a saněmi, a konečně v tomto století i po železniční trati, objíždějící čornohorský hřeben.

[48]) Stručná data o výskytu nafty v okolí Jasině uvádí B. Stočes a O. Hynie: Nerostné bohatství P. Rusi. Hornický věstník a hornické a hutnické listy, roč. III., 1921, Praha, str. 4 n., a V. Drahný ve sborníku Podkarpatská Rus, red. Chmelařem, Klímou a Nečasem, v Praze 1923, str. 30; ze starší literatury na př. A. Gessell, zvl. Beitrag zur Kenntniss der Mármaroser Petrolfundstätten. Jahrbuch d. Karp. Verein, Kežmark, VII, str. 518—521, dále T. Posewitz, Das Petroleumgebiet v. Körösmezö. Mit. aus. d. Jb. d. ung. geol. Anstalt, Budapest, 1897, XI, 10 stran a mapka, a j.

[49]) Minerální prameny většinou alkalicko-železité nacházíme v Bilině (jeden pramen nad strážním želez. domkem č. 202, dosti vysoko v lese, druhý za řekou, na protilehlé straně), a dále v Burkutu (zjištěné prameny: pramen u nádraží, 4 prameny na louce pod nádražím ve výši 540 *m* n. m. (bar.), kde se zachytávají a používají v židovských lázních, 2 silné prameny u silnice nedaleko výše jmenované louky (výše 538 *m* n. m. bar., z nichž jeden v majetku žel. eráru jest zachycen pro malé lázně) a vydatný pramen za řekou v jižní části vesnice).

[50]) Předběžné výsledky sčítání lidu z 15. února 1921. Praha, 1921.

domů, 2.189 bytových stran a 9.370 obyvatelů (4·3% úbytek proti stavu r. 1910), obec Bohdan pak 816 domů, 709 bytových stran a 3.029 obyvatelů (11·4% úbytek proti stavu z r. 1910). Hustotě osídlení a jiným otázkám s touto souvisejícím, jest však nutno věnovati specielní studii.

Nelze pak upříti, že celé toto území, jemuž věnovali jsme ve své studii svou pozornost, může se státi při racionelnějším způsobu života zdejšího obyvatelstva a při vniknutí průmyslu a turistiky krajem velmi bohatým, pokročilým a hustěji osídleným. Salašnictví, vedené po vzoru alpském, má skvělou budoucnost. Nesmírných lesů jest možno využíti nejen na stavební dřevo a palivo, nýbrž i k výrobě chemikalií, papíru a pod. Vodní síly všude jest k tomu účelu nadbytek. Slibná naleziště nafty a řada minerálních pramenů mohou býti základem dalšího rozkvětu. Turistika, k níž podmínky tu jsou rovněž rovněž dobré, může pak vyvolati nejpohodlnější a nejrychlejší obohacení a zároveň i pokrok zdejšího obyvatelstva.

V Praze, v květnu 1923.

Geografický ústav Karlovy university.

Résumé.

La colonisation et l'exploitation progressive des hautes montagnes, qui jusqu'au dernier siècle n'étaient que peu ou point habitées, avait pour conséquence que plus d'attention est dévouée aujourd'hui à ces contrées aussi au point de vue de la géographie humaine. Dans la République Tchécoslovaque la région la plus orientale de la chaîne des hautes montagnes sur le terrain de la Russie Subcarpathique demande à cet égard une attention spéciale. Là nous pouvons étudier d'une manière extraordinairement claire le progrès de la colonisation vers la haute région autrefois très peu habitée et en même temps l'état et le développement de son exploitation.

Outre la région montagneuse de la Svidovec c'est la Čorná hora avec quelques sommets de plus que 2000 mètres de hauteur qui jusqu'à nos jours n'a été atteinte d'une habitation permanente qu'à un certain degré.

Les hautes montagnes de la Čorná hora, sa partie dite Hoverlanskyj dil, composée surtout de grès à Magura, s'élève dans la Hoverla jusqu'à 2058 mètres. La chaîne principiale ne se baisse nulle part au-dessous de 1500 mètres. Plusieurs croupes transversales, très régulières, s'étendent de là vers le nord dans le terrain de la Galicie et vers le sud dans le terrain de la Russie Subcarpathique, enfermant des vallées qui parfois se terminent en cirques. Mais dans le terrain de la Galicie ces vallées sont plus larges et mieux accessibles, tandis que sur le terrain de la Russie Subcarpathique qui seul forme l'objet de cette étude, surtout la partie supérieure des vallées est — bien aussi à cause de la végétation — d'un accès extraordinairement difficile. C'est pourquoi l'habitation et l'exploitation de la croupe et des pentes de la Čorná hora sont plus restreintes de ce côté.

L'habitation et l'exploitation de la Čorná hora ne dépendent pas seulement des conditions morphologiques, hydrographiques et climatologiques, mais surtout du tapis végétal qui — à part de la zone

discontinue de sol stérile, couverte de décombres et de rochers et en somme que d'une étendue circonscrite — couvre presque toute la région en considération. Nous pouvons divisé le tapis végétal en plusieurs zones:

1. La zone continue des polonina, c'est a dire des herbages alpestres qui couvrent les parties les plus élevées des croupes. D'après la hauteur on y peut distinguer entre une bande supérieure et inférieure. La limite supérieure de la première est donnée par le sommet culminant de la Čorná hora, la Hoverla (2058 *m*), sa limite inférieure est à 1600 mètres de hauteur. La bande inférieure de ces herbages s'étend jusqu'à 1300 mètres dans la partie à l'ouest de la Hoverla et jusqu'à 1400 mètres dans la partie orientale. Cette zone sert de pacage de menu et de gros bétail. Elle est habitée périodiquement par des pâtres.

2. En bas la zone des polonina passe à la zone discontinue mixte c'est à dire de pacage parsemé de bois coudé, d'arbustes de genévrier, de pin et d'aune. Cette zone se trouve entre 1300 et 1700 mètres de hauteur, et n'est point exploitée.

3. De la zone continue suivante, celle de la haute-futaie, la limite supérieure coincide le plus souvent avec la limite inférieure de la zone des polonina. Sa limite inférieure, se trouvant entre 460 mètres — c'est point le mois élevé de la région en question à la jonction de la Černá et Bílá Tisa — et 700 mètres de hauteur. Cette zone dans laquelle des forêts d'arbres à feuilles aciculaires dominent, a des habitants permanents et périodiques.

4. Dans la zone continue de la haute-futaie ou dans sá háuteur on rencontre par endroits la formation discontinue des pacages et des prairies. Sa limite supérieure s'élève à 1300 mètres, l'inférieure descend jusqu'à 600 à 700 mètres. A la différence des polonina ces pacages sont souvent d'one origine artificielle, résultant du déboisement, et servent ou de pâturage ou de prairie en fournissant de foin comme fourrage. Les habitants périodiques sont des pâtres qui y passent l'hiver dans les „zimarka", (cabanes d'hiver), avec leur bétáil qu'ils affouragent avec le foin séché en été.

5. La dernière zone est la zone discontinue des prairies avec des planches de fruits des champs, qui s'étend sous des circonstances favorables jusqu'à 1000 mètres de hauteur. Entre 550 et 1000 mètres nous ne rencontrons que les humbles espèces des fruits des champs, tandis qu'en bas entre 460 et 550 mètres le maïs, le chou et caetera prospèrent aussi. Cette zone a des habitants permanents.

Toutes ces zones peuvent être exploitées, pourvu que leur pente n'excède pas 45°. Mais en réalité la bande inférieure des polonina et les formations 4.) et 5.) sont les seules exploitées. La zone 3.) n'est exploitée qu'en partie et la bande supérieur n'est guère exploitée. La zone 2.) ne sert à rien. Seulement de pâturage servent les zones 1.), 2.) et 4.), d'agriculture et de pâturage 5.) et 3.) est la domaine du bûcheron. Des autres formes d'exploitation ne se trouvent qu'en 5.) Une population permanente se trouve dans les zones 3.) et 5.), une population périodique dans la bande inférieure des polonina et dans les zones 3.) et 4.).

Le développement de la colonisation de notre région ne commençait en plus grande mésure qu'au XIV ième siècle, mais se faisait surtout dès le XVI ième siècle; le XIXième siècle est caracterisé par nur développement et de la colonisation et du réseau des chemins de communication.

Les habitations solitaires se trouvent et comme habitations permanentes — jamais au-dessus de 1000 mètres de hauteur — et comme habitations périodiques (chalets, cabanes, aujourd'hui jusqu'à 1460 mètres de hauteur). Les habitations permanentes ont conservé leur caractère primitif, huculique, quelquefois elles ont un caractère secondaire, étranger. Les habitations périodiques elles — aussi ont ou conservé leur caractère primitif (huculique), ou imité des types étrangers (chalets alpins).

Les habitations permanentes préfèrent les larges vallées des rivières et des cours d'eau majeurs, d'un accès facile, mais se trouvent aussi sur les flancs des montagnes, surtout leur côté sud ou non ombragé. Toujours elles s'appuient sur les chemins de communications. Les habitations périodiques se trouvent aussi et dans les vallées et sur les flancs. Les fonds des bassins leur offrent une position très favorable. Le plan des habitations permanentes dépend de leur origine. Aujourd'hui les lieux plus grands ont le plus souvent une forme linéaire, les maisons bordant la route d'un ou des deux côtés. Les habitations périodiques (chalets) forment des groupes.

Les chemins de communication pour la plupart d'origine naturelle forment un réseau de routes, de sentiers et de petits chemins assez épais, s'appuyant sur la route principale de traverse qui franchit la chaîne principale des Carpathes et qui est aujourd'hui élargie en chaussées d'État et accompagnée d'une voie ferrée, qui conduit d'Ustěriky par le col de Jablonica à la Galicie. A elle se joint la

route vicinale d'Ustĕriky à Bohdan. De ces deux routes s'embranchent toute une serie de routes carrossables, de routes, de sentiers et de petits chemins qui tous se dirigent vers la chaîne de la Čorná hora. D'après leur position on en peut distinguer entre chemins de vallée, de flanc et de crête, d'après leur origine entre chemins naturels et artificiels, d'après leur fonction entre chemins de chalet, de pâtre, de chasse, de bûcheron, de transit et chemins locaux.

Dans notre région les polonina et les prairies servent à l'élevage extensif de bestiaux, le sol favorable près des habitations permanentes à l'agriculture pour la plupart extensive. Les forêts offrent du bois de construction excellent, du bois de chauffage et du bois pour la fabrication de toutes sortes d'objets.

L'exploitation des richesses naturelles est pour la plupart une exploitation extensive, par grapillage, et en somme seulement locale. La force hydraulique n'est que peu usitée, pour le flottage et pour faire aller des moulins et de scieries. Comme l'eau courante ne suffit pas au flottage, l'administration des eaux et forêts fait construire des „hať", des réservoirs d'eau, d'une construction souvent très ingénieuse dans les parties supérieures des vallées, qui tiennent jusqu'à 180.000 mètres cubes d'eau et sont saignés suivant le besoin.

Puis il y a dans notre région une industrie de foyer assez développée, qui cependant recule aujourd'hui devant le travail mécanique et les produits manifacturés y importés. Les arts et métiers, autant qu'il y en a dans les centres plus importants, sont pour la plupart entre les mains des juifs. Le transport par terre est en partie aussi entre leurs mains, en partie entre les mains des Hucules.

Avec l'état actuel de l'exploitation de la Čorná hora, la densité de sa population est naturellement très faible, en moyenne 18 personnes par kilomètre carré. Mais il est incontestable que toute cette région peut devenir une région riche avec un travail plus rationnel de ses habitants et avec l'introduction de l'industrie et de la touristique. Les vacheries, imitant l'exemple des vacheries dans les Alpes, ont un bel avenir. Les forêts immenses, dont la plupart appartiennent à l'état, pourriont fournir non seulement du bois de construction et de chauffage, mais en plus grande mesure des matériaux excellents pour la fabrication d'objets en bois et surtout de produits chimiques, de papier et caetera. La force hydraulique necessaire abonde. Les gisements de naphta aux environs de Jasiňa, qui promettent beaucoup, et tout une série de sources alcalifères et ferrugineuses, très nombreuses

dans la vallée de la Černá Tisa, serviront peut-être de base à un développement ultérieur. La touristique, pour laquelle il y a des conditions très favorables, pourra être la cause de l'enrichissement et du progrès le plus commode et le plus vite de la population de cette région.

Prague, en mai 1923.

Institut geographique de l'Université Charles.

Vysvětlení k obrazovým přílohám.

Explications des tableaux ci-joints.

1. **Údolí Balzatulu.** V pozadí Čornohorský hřeben. Využití souvislého pásma vysokých stromů.

   Vallée du Balzatul. Au fond la chaîne de la Čorná Hora. Exploitation de la zone continue de la haute-futaie.

2. **Stina Seša** (1267 m). Typ huculské salaše s otevřenými stájemi pro hovězí dobytek na hranicích souvislého pásma nižších polonin a pásma vysokých stromů.

   Stina Seša (1267 m.) Type d'un chalet de hucule avec les étables ouvertes, situé sur la limite entre la bande inférieure des polonina et la zone de la haute-futaie.

3. **Polonina Rohoněska.** (**Švajceraj** 1330 m **bar.**) Typ pokročilé salaše s dobrými stájemi v souvislém pásmu nižších polonin.

   Polonina Rohoněska (Švajceraj, 1330 m bar.) Type d'un chalet plus développé avec des bonnes étables; dans la bande conutinue de la polonina inférieure.

4. **Čornohorský hřeben.** V předu Dancyš (1866 m), dále kota 1819, Požiževska (1822 m) a Hoverla (2050 m). Souvislé pásmo vyšších polonin.

   Chaîne de la Čorná hora. Au premier plan le Dancyš (1866 m), puis la côte 1819, la Požiževska (1822 m) et la Hoverla (2058 m). Bande continue de la polonina supérieure.

5. **Tomnatyk Gutynskyj Malyj**, (2016 m). V pravo pod hřebenem v kotli jezero (1794 m n. m). Souvislé pásmo vyšších polonin a skvrnité pásmo neplodné půdy.

   Tomnatyk Gutynskyj Malyj (2016 m). A droite au pied de la chaîne le lac (1794 m) dans un bassin. Bande continue de la polonina supérieure et la zone discontinue de sol stérile.

6. **Špyci** 1874 m, typ neplodného pásma.

   Špyci (1864 m), type de la zone de sol stérile.

7. **Cirk pod Dancyšem, Turkulem a Špycemi.** V pozadí Špyci (z. strana), před nimi dvoje souběžné Kozí hřbety, koty 1835—1707 a 1657—1644.

   Cirk au pied du Dancyš, Turkul et Špyci. Au fond le Špyci (vue de côté), devant lui les deux chaîne parallèles du Kozí hřbety, côtes 1835—1707 et 1657—1644.

8. **„Plaje“ a horizontální cesta na svahu Sešulu** (1728 m). Pásmo vysokých stromů přechází tu v nesouvislé v pásmo smíšené a v pásmo polonin.

   „Plaje“ et chemin horizontal sur la peute du Sešul (1728 m). Zone de la haute-futaie passant à la zone discoutinue mixte et à la zone de la polonina.

9. **Nádrž Balzatulská.** V pozadí Pop Ivan (2026 m).

   Réservoir Balzatul. Au fond le Pop Ivan (2026 m).

10. **Hať (vodní nádrž) Balzatulská.**

    Hať (réservoir d'eau) Balzatul.

11. **Obydlí Huculovo.**

    Habitation de Hucules.

12. **Hucul a Huculka.**

    Homme et femme hucules.

Autory fotografií 1.—11. jest Dr. J. Král, fotografie 12. prof. Dr. V. Suk.



1. Údolí Balzatulu.



2. Stina Seša.



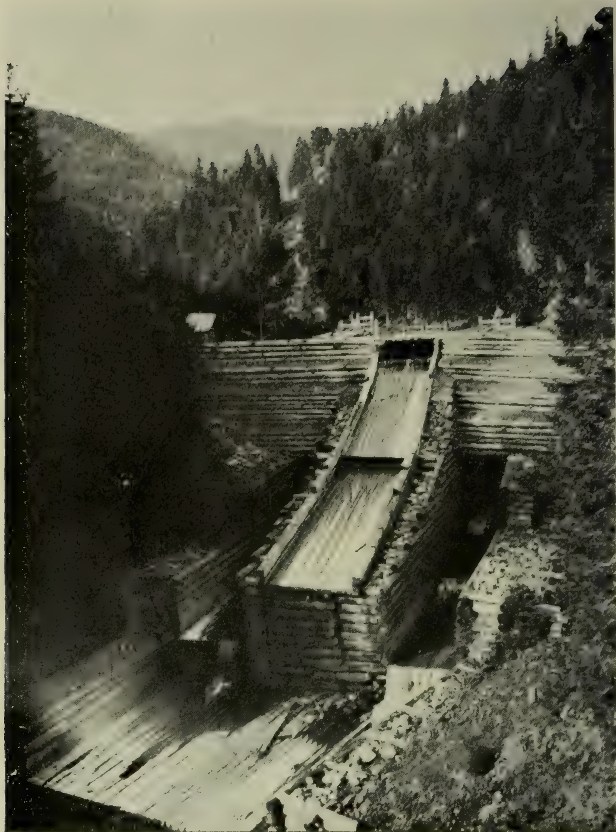
7. Cirk pod Dancyšem, Turkulem a Špycemi.



8. „Plaje“ a horizontální cesta na svahu Sešulu.



9. Nádrž Balzatulská.



10. Hať (vodní nádrž) Balzatulská.



11. Obydlí Huculovo.



12. Hucul a Huculka.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1923. ČÍSLO 3.

J. M. HORÁK:

O GRUPĚ IKOSAEDRICKÉ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

P U B L I C A T I O N S
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1923. ČÍSLO 3.

J. M. HORÁK:

O GRUPĚ IKOSAEDRICKÉ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

O grupě ikosaëdrické.

Napsal *J. M. Horák*.

Předmětem této práce je v první řadě vyšetřování konfigurace ternarní ikosaëdrické grupy. Z mých výsledků jsou sice některé jednotlivosti známy již z prací Kleinových (Math. Ann. t. 12., p. 530; Vorles. über d. Ikosaëder p. 216), jsou však odvozeny methodou naprosto odlišnou z rozkladu invariantů binarní grupy. Ve výkladu vše známé předpokládám a uvádím jen úvahy vlastní.

Při stanovení konfigurace usnadnilo mi úlohu použití jisté věty o pólech, kterou v dalším dokazuji, a zavedení přímkových souřadnic, jež mi umožnilo nalézti postačující podmínku pro dualitu konfigurace libovolné grupy.

Invariantní formu druhého stupně jsem dostal ihned transformací Kleinova tvaru ikosaëdrické grupy ve grupu substitucí orthogonalních; transformační substituce není mi z literatury známa. Jakožto invarianty vyšších stupňů zavádím součiny os. Nepotřebuji tedy k jich stanovení na rozdíl od Kleina invariantů grupy binarních substitucí. Platí pak velmi jednoduchý vztah mezi formami Kleinovými a formami zavedenými takto. Syzygie má zas koëfficienty celočíselné, jako syzygie mezi formami užívanými Kleinem.

Z popisu konfigurace plyne potom jako důsledek také věta, že neexistuje grupa 60 linearních substitucí souřadnic bodových resp. přímkových, jež by převáděla úplnou konfiguraci Pascalova resp. Brianchonova šestiúhelníka samu v sebe.

*

Ikosaëdrická grupa ternarních linearních substitucí homogenních dá se snadno konstruovati, přijmeme-li vytvořující substituci 5. řádu ve tvaru normalním a na základě komposičních pravidel grupy ikosaëdrické určíme druhou vytvořující substituci řádu 2. a třetí substituci řádu rovněž 2, jež sice dá se vyjádřiti pomocí dvou výše jmenovaných, jejíž užitím však se dají psáti všechny substituce grupy ve tvaru velmi přehledném. Tím způsobem bychom po snadných sice ale poněkud zdlouhavých

výpočtech nalezli pro vytvořující substituce na př. tvar, jehož užívá Klein (Vorl. über d. Ikosaëder), a celá grupa jest pak vyčerpána těmito 60 substitucemi:

$$K\left\{\begin{aligned}
&S^r=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & \varepsilon^{4r}, & 0\\ 0, & 0, & \varepsilon^r\end{pmatrix}\qquad S^rU=\begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -\varepsilon^{4r}\\ 0, & -\varepsilon^r, & 0\end{pmatrix}\\
&S^rTS^t=\begin{pmatrix}1, & \varepsilon^{4t}, & \varepsilon^t\\ 2\varepsilon^{4r}, & \omega\varepsilon^{4(r+t)}, & \omega'\varepsilon^{4r+t}\\ 2\varepsilon^r, & \omega'\varepsilon^{r+4t}, & \omega\varepsilon^{r+t}\end{pmatrix}\quad r,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.\\
&S^rTS^tU=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1, & -\varepsilon^t, & -\varepsilon_{4t}\\ -2\varepsilon^{4r}, & -\omega'\varepsilon^{4r+t}, & -\omega\varepsilon^{4(r+t)}\\ -2\varepsilon^r, & -\omega\varepsilon^{r+t}, & -\omega'\varepsilon^{r+4t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Při tom ε je libovolný komplexní pátý kořen z jednotky a

$$\omega=\varepsilon^2+\varepsilon^3,\quad \omega'=\varepsilon+\varepsilon^4;$$

ε je v dalším voleno tak, že $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Transformací této grupy substitucí $L=\begin{pmatrix}0, & 0, & 1\\ i, & -1, & 0\\ -i, & -1, & 0\end{pmatrix}$, k níž inversní $L^{-1}=\begin{pmatrix}0, & -\frac{i}{2}, & \frac{i}{2}\\ 0, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\\ 1, & 0, & 0,\end{pmatrix}$, dostaneme ikosaëdrickou grupu orthogonalních substitucí H, jejíž vytvořující substituce jsou:

$$H\left\{\begin{aligned}
&\theta=\overset{-1}{L}SL=\begin{pmatrix}\frac{\omega'}{2}, & \frac{\mu}{2}, & 0\\ -\frac{\mu}{2}, & \frac{\omega'}{2}, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix},\ \chi=\overset{-1}{L}UTL=\begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{\sqrt{5}}, & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0, & \frac{2}{\sqrt{5}}, & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\\
&\psi=\overset{-1}{L}UL=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix},\ \mu=i\,(\varepsilon^4-\varepsilon).
\end{aligned}\right.$$

Nejbližším naším cílem bude, stanoviti konfiguraci grupy K. Za tím účelem odvodíme si jistou větu o pólech.

Uvažujme grupu substitucí P řádu n.

Substituce, jež mají pól (a), tvoří grupu Q řádu ν; pól (a) pak nazveme ν-četným, neexistuje-li v P žádná substituce kromě substitucí

z Q, jež by bod (a) nechávala beze změny. Rozvineme-li celou grupu P podle dělitele Q, dostaneme $\frac{n}{\nu}$ grup konjugovaných s Q.

Z rozkladu $P = Q + \varphi_1^{-1} Q + \varphi_2^{-1} Q + \ldots + \varphi_{k-1}^{-1} Q$, $k\nu = n$, je také patrno, že všechny substituce grupy převedou ν—četný pól (a) jen do $k = \frac{n}{\nu}$ poloh: (a), $\varphi_1^{-1}(a)$, $\varphi_2^{-1}(a), \ldots \varphi_{k-1}^{-1}(a)$. (1)

Tyto body jsou vesměs různé od (a) i vzájemně a jsou rovněž ν-četné póly; příslušné grupy substitucí jsou grupy s Q konjugované, jež však nemusí býti všechny různé. Applikujeme-li pak kteroukoli substituci z P na řadu těchto pólů, mění se jen pořadí, neboť podle hořejšího rozkladu každá substituce z P dá se uvést na tvar $\varphi_\mu^{-1}\theta$, kde θ je substituce z Q.

Předpokládejme nyní, že platí

$$\varphi_r^{-1} Q \varphi_r = \varphi_s^{-1} Q \varphi_s \quad \text{čili} \quad Q = \varphi_r \varphi_s^{-1} Q \varphi_s \varphi_r^{-1} = \psi^{-1} Q \psi;$$

z toho je viděti, že Q má nejen pól (a) nýbrž i $\psi^{-1}(a) = \varphi_r \varphi_s^{-1}(a)$, jenž je různý od (a). To znamená dále, že každá grupa $\varphi_l^{-1} Q \varphi_l$ kromě pólu $\varphi_l^{-1}(a)$ má také pól $\varphi_l^{-1} \psi^{-1}(a)$, jenž je různý od každého jiného $\varphi_t^{-1} \psi^{-1}(a)$, avšak jistě roven jednomu z pólů ν—četných. Také dvě různé grupy konjugované nemají společného pólu a tedy $\frac{n}{\nu}$ pólů (1) je rozděleno po dvou tak, že žádná dvojice nemá člen společný s jinou, a protože každá z konjugovaných grup má dva tyto póly, může těchto konjugovaných grup býti jen $\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\nu} = \frac{1}{2} k$ různých.

Stejně bychom mohli ukázati, že z rovnosti tří konjugovaných grup plyne, že jen třetina všech grup konjugovaných jsou grupy od sebe různé a každá z nich má 3 ν-četné póly. Zároveň je jasno, že tyto úvahy plat obecně pro substituce m-ární. Můžeme tedy říci:

I. Máme-li subgrupu řádu ν, utvořenou ze všech substitucí jež patří do grupy P řádu n a nechávají beze změny pól ν-četný (a), a je-li ze všech $\frac{n}{\nu} = k$ konjugovaných subgrup k' subgrup identických, je k' dělitelem počtu subgrup k a každá z různých subgrup počtem p má k' různých pólů z řady (1) a opačně. Mezi celými čísly n, ν, k', p pak platí relace: $\frac{n}{\nu} = k'p$.

Poznámka: Počet konjugovaných ν-četných pólů je vždycky roven $\frac{n}{\nu} = k'p$.

Při stanovení konfigurace grupy jeví se výhodným používati kromě bodových homog. souřadnic, jak se děje obyčejně, také přímkových souřadnic homog. a to na základě následujících úvah. Transformuji-li ve formě $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ proměnné (x) linearní substitucí, transformují se, jak známo, proměnné μ substitucí transponovanou t. j. platí-li

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

a $(x) = A(y)$, pak je $(v) = \bar{A}(u)$; $\bar{A}$ značí subst. transponovanou k A. Z toho můžeme souditi: Když máme grupu G a proměnným dáme význam souřadnic bodových, pak souřadnice všech bodů roviny transformují se substitucemi z G a souřadnice přímek se transformují substitucemi z grupy $\bar{G}$, sestávající z transponovaných substitucí k subst. z G. Tato grupa (stručně: „transponovaná“) je isomorfní s G, neboť odpovídá-li subst. A resp. B v G substituce $\bar{A}^{-1}$ resp. $\bar{B}^{-1}$ v $\bar{G}$, pak jejich kompositu $C = A \,.\, B$ přísluší v $\bar{G}$ substituce $\bar{C}^{-1} = \bar{A}^{-1} \,.\, \bar{B}^{-1}$. Vzhledem k významu proměných v G a v $\bar{G}$ jsou póly jedné z těchto grup osami druhé a naopak. Stačí potom znáti všechny póly grupy $\bar{G}$, abychom mohli ihned napsati rovnice všech os grupy G.

Důležitý je případ, že $\bar{G}$ se dá transformací převésti v G, t. j. že se dá nalézti taková substituce Λ, že platí $\Lambda^{-1} G \Lambda = \bar{G}$. (2)

Pak totiž pólu grupy G o souřadnicích (a) odpovídá stejněčetný pól grupy $\bar{G}$ osouřadnicích $\Lambda^{-1}(a)$, jehož souřadnice jsou však přímkovými souřadnicemi stejněčetné osy grupy G; my pak vidíme, že konfigurace grupy G je dualní.

V našem případě grupy ikosaëdrické je rovnice (2) splněna; neboť každá ternarní grupa ikosaëdrická dá se transformovati v grupu orthogonálních substitucí, pro niž však platí vztah mezi transponovanou substitucí a původní: $\bar{A} = A^{-1}$ a grupa substitucí transponovaných je identická s grupou původní.

Pro grupu K nalezneme substituci Λ snadno. Měli jsme:

$$L^{-1} K L = H, \quad \bar{H} = H, \quad \text{tedy} \quad \bar{L}\,\bar{K}\,\bar{L}^{-1} = L^{-1} K L,$$

čili
$$\bar{K} = \bar{L}^{-1} L^{-1} K L \bar{L} = \Lambda^{-1} K \Lambda.$$

Substituci L známe a jest

$$\Lambda = L\bar{L} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ i, & -1, & 0 \\ -i, & -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & i, & -i \\ 0, & -1, & -1 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Máme tedy první výsledky:

II. Konfigurace ikosaëdrické grupy ternarních linearních substitucí je dualní.

III. Pólu ν-četnému (a) grupy K odpovídá ν-četná osa, jejíž souřadnice přímkové jsou $\Lambda^{-1}(a)$; Λ je dáno rov. (3).

Budeme se zabývat nyní stanovením konfigurace grupy K.

Nejprve nalezneme snadno invariantní formu druhého stupně.

Grupa orthogonalních substitucí H má invar. formu druhého stupně: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Nyní $K = LHL^{-1}$, dostaneme tedy invar. formu příslušnou grupě K, provedeme-li na výraz $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ substituci L^{-1}. Tak máme invar. kuželosečku grupy K:

$$x_1^2 + x_2 x_3 = 0. \qquad (4)$$

Poněvadž $\bar{K} = \Lambda^{-1} K \Lambda$, dostaneme z rovnice (4) rovnici téže kuželosečky v souřadnicích přímkových provedením substituce $(x) = \Lambda(u)$:

$$u_1^2 + 4u_2 u_3 = 0, \qquad (5)$$

jež zůstává invariantní substitucemi grupy K.

Uvažujme nyní póly substitucí pátého řádu; všech 24 substitucí pátého řádu tvoří se substitucí identickou 6 konjugovaných subgrup řádu 5, za jichž representanta vezmeme mocniny substituce

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon^4, & 0 \\ 0, & 0. & \varepsilon \end{pmatrix}. \text{ Tyto připouští póly:}$$

$$(1 : 0 : 0), \qquad (0 : 1 : 0), \qquad (0 : 0 : 1). \qquad (6)$$

Oba poslední body jsou póly 5tičetné, neboť zůstávají nezměněny jen substitucí S a jejími potencemi. Poněvadž všechny cyklické subgrupy řádu 5. v počtu 6 jsou konjugovány, máme řadu 12 konjugovaných 5tičetných pólů a každá substituce řádu 5. má podle I. $k' = \frac{60}{5.6} = 2$ dva póly 5tičetné. Zbylý pól substituce $S : (1 : 0 : 0)$ nechť je ν-četným. ν určíme na základě té okolnosti, že pól tohoto druhu má každá cyklická subgrupa řádu 5. jeden a jen jeden, čili existuje celkem 6 konjugovaných těchto pólů, takže podle pozn. k větě I. $\nu = 10$. Skutečně pól $(1 : 0 : 0)$ je nezměněn substitucemi subgrupy $S^r U^t$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$, $t = 0, 1$.

Provedeme-li na póly (6) všechny substituce grupy K, nalezneme pro souřadnice

$$\begin{array}{lll} 12 \text{ 5-četných pólů } P_5 : & (0 : 1 : 0), & (1 : \omega\varepsilon^\mu : \omega'\varepsilon^{-\mu}) \\ & (0 : 0 : 1), & (1 : \omega'\varepsilon^\mu : \omega\varepsilon^{-\mu}) \end{array} \qquad (7)$$

$$6 \text{ 10-četných pólů } P_{10} : (1 : 0 : 0), \quad (1 : 2\varepsilon^\mu : 2\varepsilon^{-\mu}), \qquad (8)$$

při čemž ε je pátý kořen z jednotky volený na př. tak, že

$$\omega = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \omega' = \varepsilon + \varepsilon^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Podle věty III. získáme ihned rovnice:

$$12\ \text{5-četných os } A_5:\quad \begin{matrix} x_2 = 0, & 2x_1 + \omega'\varepsilon^\nu x_2 + \omega\varepsilon^{-\nu} x_3 = 0 \\ x_3 = 0, & 2x_1 + \omega\varepsilon^\nu x_2 + \omega'\varepsilon^{-\nu} x_3 = 0 \end{matrix} \qquad (9)$$

$$6\ \text{10-četných os } A_{10}:\quad x_1 = 0, \quad x_1 + \varepsilon^\nu x_2 + \varepsilon^{-\nu} x_3 = 0 \qquad (10)$$

$$\nu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Jest nyní viděti, že každým pólem P_{10} prochází dvě osy A_5 (a to vždy jedna z 1. řádku a ta z druhého řádku, jejíž rovnice je psána pod ní) a opačně na každé ose A_{10} leží dva póly P_5 (a to zase ty dva, jichž souřadnice (7) jsou psány v témže sloupci).

Velmi snadno najdeme též póly a osy substitucí řádu 2, za jichž representanta volme:

$$U = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro pól máme podmínky:
$$\varrho x_1 = - x_1$$
$$\varrho x_2 = - x_3$$
$$\varrho x_3 = - x_2.$$

První rovnice je splněna pro $\varrho = -1$, čemuž odpovídá hlavní osa:

$$x_2 - x_3 = 0. \qquad (11)$$

Druhé možné řešení první rovnice jest: $x_1 = 0$, a z rovnice druhé a třetí plyne:

$$\varrho^2 x_2 x_3 = x_2 x_3$$

a protože x_2 a x_3 současně by musily býti rovny nule, je jistě

$$x_2 \neq 0, \quad x_3 \neq 0, \quad \text{z čehož } \varrho^2 = 1, \quad \varrho = \pm 1.$$

Pro $\varrho = -1$ dostaneme průsečík hlavní osy (11) s přímkou $x_1 = 0$; kladu-li $\varrho = +1$, jest
$$x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 = 0,$$
a jsou tedy souřadnice pólu:
$$(0 : 1 : -1). \qquad (12)$$

Každá substituce řádu 2. tvoří se substitucí identickou cyklickou subgrupu řádu 2. a všechny tyto subgrupy jsou konjugovány; má tedy každá substituce řádu 2. hlavní osu (přímku, jejíž všechny body zůstávají dotyčnou substitucí nezměněny) a mimo ni ležící pól.

Pól (12) přejde všemi substitucemi grupy K do 15. poloh:

$$(0 : \varepsilon^\nu : -\varepsilon^{-\nu}), \quad \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} : \varepsilon^\nu : \varepsilon^{-\nu}\right) \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad (13)$$

a jsou tedy všechny póly (13) póly 4-četnými P_4 (pozn. k větě I.).

Nyní hned můžeme napsati rovnice 15 os 4-četných A_4 podle III.

$$\varepsilon^{\mu} x_2 - \varepsilon^{-\mu} x_3 = 0, \quad (1 \pm \sqrt{5})\, x_1 + \varepsilon^{\mu} x_2 + \varepsilon^{-\mu} x_3 = 0 \\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{14}$$

Mezi osami (14) přichází také hlavní osa (11), každá osa A_4 je tedy hlavní osou jisté substituce 2. řádu.

Z rovnic (13) a (14) je viděti, že každý P_4 leží na dvou A_4 a opačně každá A_4 prochází dvěma P_4.

Vraťme se nyní k 10-četným pólům a uvažujme úplný system jejich spojnic po dvou, jenž obsahuje $\binom{6}{2} = 15$ přímek; tyto přímky jsou osy A_4, jak je viděti, všimneme-li si, že spojnice pólů

$$(1:0:0) \quad \text{a} \quad (1:2:2)$$

jest osa $x_2 - x_3 = 0$, na níž neleží již žádný jiný pól P_{10}. Označme nyní

$$a = (1:0:0), \qquad a_k = (1:2\varepsilon^k:2\varepsilon^{-k}) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

a stanovme rovnice spojnic:

$$\begin{aligned} \overline{a_0\, a} &\equiv x_2 - x_3 = 0 \\ \overline{a_1\, a_2} &\equiv (1 + \sqrt{5})\, x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \varepsilon\, x_3 = 0 \\ \overline{a_3\, a_4} &\equiv (1 + \sqrt{5})\, x_1 + \varepsilon\, x_2 + \varepsilon^4 x_3 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Tyto tři přímky protínají se v jediném bodě, jak ukazuje determinant z koëfficientů, jenž je roven nule:

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & -1 \\ 1 + \sqrt{5}, & \varepsilon^4, & \varepsilon \\ 1 + \sqrt{5}, & \varepsilon & \varepsilon^4 \end{vmatrix} = (1 + \sqrt{5})(\varepsilon - \varepsilon^4 - \varepsilon + \varepsilon^4) = 0.$$

Pro souřadnice tohoto průsečíku nalezneme:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 1, & -1 \\ \varepsilon^4, & \varepsilon \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1 + \sqrt{5}, & \varepsilon \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 1 + \sqrt{5}, & \varepsilon^4 \end{vmatrix},$$

čili

$$x_1 : x_2 : x_3 = -\frac{3 - \sqrt{5}}{4} : 1 : 1. \tag{16}$$

Jsou tedy body a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a vrcholy Brianchonova šestistranu: $\overline{a_0\, a_1}$, $\overline{a_1\, a_3}$, $\overline{a_3\, a}$, $\overline{a\, a_2}$, $\overline{a_2\, a_4}$, $\overline{a_4\, a_0}$, příslušné čtyřčetné osy jeho stranami. Jest nyní otázka, kolik takových Brianchonových šestistranů od sebe různých je vytvořeno úplným systemem spojnic desetičetných pólů, čili kolik Brianchonových bodů (16) obsahuje naše konfigurace.

Uvažujme jistý vrchol, třeba a; ten může býti spojen pětkráte s jedním z ostatních vrcholů jakožto protějším. Zvolíme-li za tento protější vrchol na příklad a_0, potom se spojnicí $\overline{a\, a_0}$ protínají se ze všech možných tří dvojic pouze dvě v jednom bodě a to: $\overline{a_1\, a_2}$, $\overline{a_3\, a_4}$

a $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_2 a_4}$, jak bychom se přesvědčili přímým výpočtem; třetí dvojice spojnic zbylých 4 bodů, totiž $\overline{a_1 a_4}$, $\overline{a_2 a_3}$ má svůj průsečík mimo přímku $\overline{a\, a_0}$. Když tedy dva body zvolím za protější vrcholy, mohu zbylé 4 body volit za dvojice protějších vrcholů jen dvojím způsobem. Poněvadž nyní k určitému pevnému vrcholu je možno volit pětkráte nějaký ze zbývajících bodů za protější a protože každá tato volba dává dva různé šestistrany B., bude jich celkem $5 \,.\, 2 = 10$ a tolikéž tedy Brianchonových bodů, jež jsou tedy šestičetnými póly grupy K; skutečně pak bod (16) jest převeden všemi substitucemi grupy jen do 10 poloh, jichž souřadnice nám udávají

$$10 \text{ 6-četných pólů } P_6\!: \left(-\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} : \varepsilon^{\mu} : \varepsilon^{-\mu}\right) \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

Jsou nyní patrny souvislosti dualní: úplný system průsečíků 10ti-četných os A_{10} jsou 4 četné póly (13); tedy

15 4-četných pólů P_4:

$$(0 : \varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{-\nu}), \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} : \varepsilon^{\nu} : \varepsilon^{-\nu}\right) \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad (18)$$

leží po třech na 10 osách A_6, jichž rovnice jsou podle (17) a III.

10 6-četných os A_6:

$$-\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\, x_1 + \varepsilon^{\nu} x_2 + \varepsilon^{-\nu} x_3 = 0 \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4. \qquad (19)$$

Tvoří tedy 15 průsečíků desetičetných os 10 Pascalových šestiúhelníků, jimž přísluší jako Pascalovy přímky šestičetné osy A_6, na nichž leží 15 4-četných pólů P_4 po třech. Opačně: každým pólem P_4 procází x os A_6, tedy, ježto na každé A_6 leží tři P_4, platí

$$\frac{3 \,.\, 10}{x} = 15, \quad x = 2.$$

Dualně na každé ose A_4 leží 2 póly P_6.

Póly substitucí řádu 3. nemusíme již počítati, známe je na základě předešlých výsledků. Všimneme-li si totiž, že souhrn všech os šestičetných protíná fundamentalní kuželosečku ve dvaceti různých bodech (jak plyne na př. z výpočtu průsečíků jedné z os A_6 s fundamentalní kuželosečkou), vidíme, že tyto body jsou póly trojčetné P_3 a že tedy každá z 10 cyklických subgrup řádu 3. má dva póly, jež jsou 3-četné a jsou to právě tyto průsečíky os A_6 s invariantní kuželosečkou; k těmto přistoupí jeden pól šestičetný z řady nám již známých pólů P_6. Osy trojčetné A_3 pak jsou tečny vedené k invariantní kuželosečce z pólu P_6. Body dotyku těchto tečen jsou právě zmíněné póly P_3, protože jich spojnice je osa šestičetná.

Obdobnou polohu zaujímají 5-četné póly P_5 a osy A_5; body P_5 leží na základní kuželosečce a jsou body dotyku přímek A_5.

Různé vztahy polarní vzhledem k základní kuželosečce mezi body a přímkami, plynoucí z hořejších vět, nesouvisí již s naším stanoviskem a ponechávám je tedy stranou.

Výsledky předchozích úvah shrneme a doplníme v následujícím přehledu.

Odpovídají si vzájemně:

6 10-četných pólů P_{10}.	6 10-četných os A_{10}.
Úplný system jejich 15ti spojnic po dvou je 15 os 4-četných A_4.	Úplný system jejich 15ti průsečíků po dvou je 15 pólů 4-četných P_4.
Tyto spojnice protínají se v 10ti pólech 6-četných P_6 po třech.	Tyto body leží na 10ti osách 6-četných A_6 po třech.
6 bodů P_{10} tvoří vrcholy 10ti Brianchonových šestiúhelníků.	6 os A_{10} tvoří strany 10ti Pascalových šestiúhelníků.
Na každé ose A_4 leží: 2 body P_4, 2 body P_6, nekonečně mnoho pólu dvojčetn. P_2, takže každý bod na A_4 je pólem aspoň 2-četným.	Každým bodem P_4 prochází: 2 přímky A_4, 2 přímky A_6, nekonečně mnoho os dvojčetných A_2, takže každá přímka procházející bod. P_4 je osou aspoň 2-četn.
20 pólů 3-četných P_3 leží na základní kuželosečce a jsou průsečíky os A_6 se základ. kuželoseč. Tečny v těchto bodech ke kuželosečce jsou osy A_3.	20 os 3-četných A_3 dotýká se základní kuželosečky a jsou tečnami vedenými z bodů P_6. Body dotyku jsou póly P_3.
12 pólů 5-četných P_5 leží na zákl. kuželosečce a jsou body dotyku os A_5.	12 os A_5 5-četných dotýká se základní kuželosečky v bodech P_5.
12 pólů P_5 dělí se na 6 dvojic, které leží na 5ti osách A_{10} a jsou jejich průsečíky s kuželosečkou.	12 os A_5 dělí se na 6 dvojic tak, že přímky z téže dvojice jsou tečny z téhož pólu P_{10} ke kuželosečce.
15 os A_4 protíná se v 15 P_4 po dvou, v 10 P_6 po třech, v 6 P_{10} po pěti, čímž je vyčerpán úplný system 105 jejich průsečíků, neboť	15 pólů P_4 leží na 15 A_4 po dvou, na 10 A_6 po třech, na 6 A_{10} po pěti, čímž je vyčerpán úplný system 105 jejich spojnic, neboť

$$\binom{15}{2} = 105 = 15 + \binom{5}{2} . 6 .$$

Šest bodů na obecné kuželosečce tvoří svými 15ti spojnicemi celkem 60 různých Pascalových šestiúhelníků; přechod od jednoho šestiúhelníka ke druhému můžeme si mysliti jako permutaci šesti vrcholů jeho. Jest

nyní hned viděti, že cyklická permutace těchto šesti bodů nevede nás k novému šestiúhelníku; nazveme-li tedy grupu všech permutací, jež vedou k různým P. šestiúhelníkům (řádu 60) písmenem Π, bude tato grupa jistě isomorfní s jistou grupou permutací pouze pěti písmen Π', jež ovšem bude subgrupou symmetrické grupy permutací pěti písmen řádu 120. Ježto řád Π' je 60, je Π' nutně identická s alternující grupou permutací pěti elementů, isomorfní s grupou ikosaëdrickou, a my máme tento výsledek:

IV. Grupa Π je isomorfní s grupou ikosaëdrickou.

Z toho je viděti: grupa 60ti transformací, jež převádějí úplnou konfiguraci Pascalova šestiúhelníka samu v sebe, je isomorfní s grupou ikosaëdrickou. Předpokládejme, že tyto transformace dají se vyjádřiti linearními homog. substitucemi souřadnic bodových a tvoří tedy ikosaëdrickou grupu ternarní. Invariantní kuželosečka grupy K je

$$x_1^2 + x_2 x_3 = 0. \tag{20}$$

Jest ihned patrno, že pól (1 : 0 : 0) neleží na této křivce a tedy 10-četné póly neleží na kuželosečce základní. Avšak každá kuželosečka procházející všemi 10-četnými póly byla by invariantní a tedy totožna s (20). Totéž platí o 10-četných pólech orthogonalní grupy H, protože transformaci grupy mohu, jak známo, interpretovati jako přechod k jinému systemu souřadnic. Kdyby nyní existovala ikosaëdrická grupa ternarní, jejíž 10-četné póly by ležely na invariantní kuželosečce, dala by se, majíc invariantní formu 2. stupně, transformovati v grupu orthogonalní a došli bychom ke sporu s tím, co jsme ukázali o pólech 10-četných výše. Vzpomeneme-li nyní na tu okolnost, že vrcholy Pascalova šestiúhelníka by byly v konfiguraci grupy póly 10-četnými, zaměňujíce se všemi substitucemi grupy jen navzájem, můžeme vysloviti větu:

V. Neexistuje grupa 60ti lineárních substitucí (ternarních, homogenních), vyjadřujících transformace, jimiž přechází úplná konfigurace Pascalova šestiúhelníka sama v sebe.

Součin levých stran rovnic 10-četných os A_{10} je invariantní forma stupně 6., podobným způsobem představuje souhrn os 6-četných A_6 invariant stupně 10. Jest naší úlohou stanoviti souvislost těchto forem se základními formami stupně 2., 6. a 10., jichž užívá Klein (Vorl. über d. Ikosaëder): A (2. st.), B (6. st.), C (10. st.).

Součin levých stran 10-četných os označme F_6 a máme:

$$F_6 = x_1^6 - 5\, x_1^4\, x_2\, x_3 + 5\, x_1^2\, x_2^2\, x_3^2 + x_1 (x_2^5 + x_3^5). \tag{21}$$

Potom Kleinova forma B' (l. c.) dá se vyjádřiti pomocí F_6 a $A = x_1^2 + x_2 x_3$:

$$B' = 16\,x_1^6 - 120\,x_1^4\,x_2\,x_3 + 90\,x_1^2\,x_2^2\,x_3^2 + 21\,x_1\,(x_2^5 + x_3^5) - 5\,x_2^3\,x_3^3$$
$$B' = 21\,F_6 - 5\,A^3$$

a forma $B = \dfrac{-B' + 16\,A^3}{21}$ (Klein, l. c. p. 218) bude vyjádřena:

$$B = -F_6 + A^3. \tag{22}$$

Součin levých stran rovnic os 6-četných nazveme F_{10}. Ke stanovení relace mezi C, F_{10}, F_6 a A stačí srovnati koëfficienty na př. jen při členech, jež neobsahují x_1 a potom při nejvyšší mocnině x_1; koëfficient při x_1^{10} v F_{10} je jednotka, jak je vidět hned z rovnic šestičetných os. Výpočtem dostaneme:

$$F_{10} = x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10} + 2\,x_2^5\,x_3^5 + \cdots$$

a jestliže Kleinova forma C' (l. c.) je:

$$C' = -\,512\,x_1^{10} + 11520\,x_1^8\,x_2\,x_3 - 40320\,x_1^6\,x_2^2\,x_3^2 +$$
$$+ 33600\,x_1^4\,x_2^3\,x_3^3 - 6300\,x_1^2\,x_2^4\,x_3^4 - 187\,(x_2^{10} + x_3^{10}) +$$
$$+ 126\,x_2^5\,x_3^5 + x_1\,(x_2^5 + x_3^5)\,(22176\,x_2^4 - 18480\,x_1^2\,x_2\,x_3 + 1980\,x_2^2\,x_3^2),$$

položíme
$$C' = \lambda\,F_{10} + \mu\,A^5 + \nu\,A^2 . F_6,$$

kde λ, μ, ν jsou jisté numerické hodnoty, pro něž dostaneme srovnáním koëfficientů při x_1^{10}, x_2^{10}, $x_2^5\,x_3^5$:

$$\lambda = -\,187, \qquad \mu = 500, \qquad \nu = -\,825.$$

Pro C, které je dáno rovnicí:

$$C = \frac{-\,C' - 512\,A^5 + 1760\,A^2\,B}{187} = 320\,x_1^6\,x_2^2\,x_3^2 - 160\,x_1^4\,x_2^3\,x_3^3 +$$
$$+ 20\,x_1^2\,x_2^4\,x_3^4 + 6\,x_2^5\,x_3^5 - 4\,x_1\,(x_2^5 + x_3^5)\,(32\,x_1^4 - 20\,x_1^2\,x_2\,x_3 +$$
$$+ 5\,x_2^2\,x_3^2) + x_2^{10} + x_3^{10}$$

nalezneme:
$$C = F_{10} + 4A^5 - 5\,A^2\,F_6. \tag{23}$$

Tuto relaci můžeme snadno potvrditi ještě jinak; píšeme-li

$$C = l F_{10} + m A^5 + n A^2 F_6 \tag{23'}$$

a dosadíme-li postupně za proměnné souřadnice pólů, na př.

$$P_{10}\,(1:0:0), \qquad P_5\,(0:1:0), \qquad P_4\,(0:1:1),$$

pak hodnoty všech funkcí v rov. (23') v těchto bodech dají se velmi snadno vypočísti, aniž bychom znali F_{10} vypočteno ve formě polynomu, a tak obdržíme vztahy:

$$0 = l + m + n$$
$$1 = l$$
$$-4 = -\,m,$$

z nichž plynou hodnoty pro l, m, n zcela v souhlase s rovnicí (23). Můžeme pak formu F_{10} na základě toho vztahu hned vypsati a jest:

$$F_{10} = x_1^{10} - 35\, x_1^8 x_2 x_3 + 260\, x_1^6 x_2^2 x_3^2 - 175\, x_1^4 x_2^3 x_3^3 + \\ + 25\, x_1^2 x_2^4 x_3^4 + (x_2^5 + x_3^5)^2 - 3x\,(x_2^5 + x_3^5)\,(41\, x_1^4 + \\ - 30\, x_1^2 x_2 x_3 + 5\, x_2^2 x_3^2). \tag{24}$$

Součin levých stran 4-četných os A_4 je invariant stupně 15, jejž označuje Klein (l. c.) písmenem D:

$$D = (x_2^5 - x_3^5)\,\{-1024\, x_1^{10} + 3840\, x_1^8 x_2 x_3 - 3840\, x_1^6 x_2^2 x_3^2 + \\ + 1200\, x_2^4 x_2^3 x_3^3 - 100\, x_1^2 x_2^4 x_3^4 + (x_2^5 + x_3^5)\,(352\, x_1^4 + \\ - 160\, x_1^2 x_2 x_3 + 10\, x_2^2 x_3^2)\}. \tag{25}$$

Vypočtěme ještě syzygii mezi formami A, F_6, F_{10}, D; ta bude tvaru:

$$D^2 = \lambda_1 F_6^5 + \lambda_2 F_{10}^3 + \mu_1 A F_6^3 F_{10} + \mu_2 A^2 F_6 F_{10}^2 + \mu_3 A^3 F_6^4 + \\ + \mu_4 A^4 F_6^2 F_{10} + \mu_5 A^5 F^2_{10} + \mu_6 A^6 F_6^3 + \mu_7 A^7 F_6 F_{10} + \\ + \mu_9 A^9 F_6^2 + \mu_{10} A^{10} F_{10} + \mu_{12} A^{12} F_6 + \mu_{15} A^{15}. \tag{26}$$

λ_i, μ_k jsou jisté numerické hodnoty, jež určíme.

Položíme-li nejprve:

$$x_1 = 0, \quad x_2 x_3 = 1, \quad (x_2^5 + x_3^5)^2 = t,$$

dostaneme z (26) rovnici:

$$(t-4)\, t^2 = \lambda_2 t^3 + \mu_5 t^2 + \mu_{10} t + \mu_{15}, \tag{27}$$

a poněvadž (27) musí být splněna identicky, dostanu srovnáním koëfficientů:

$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_5 = -4, \quad \mu_{10} = 0, \quad \mu_{15} = 0. \tag{28}$$

Položme za druhé:

$$x_1 = t, \quad x_2 x_3 = t, \quad x_2^5 + x_3^5 = 0;$$

pak

$$\begin{aligned} A &= t\,(t+1) \\ F_6 &= t^4\,(t^2 - 5t + 5) \\ F_{10} &= t^6\,(t^4 - 35t^3 + 260t^2 - 175t + 25) \\ D^2 &= -4^3 t^{17}\,(-256t^4 + 960t^3 - 960t^2 + 300t - 25)^2. \end{aligned}$$

Když to dosadíme do (26), plyne srovnáním koëfficientů při t^{16}, t^{17}, t^{18}:

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= 0 \\ -1500 &= 5\mu_7 + \mu_9 \\ 36875 &= 125\mu_2 + 25\mu_4 + 5\mu_6 - 5\mu_7 + 7\mu_9. \end{aligned} \tag{29}$$

Srovnáním keëfficientů při jiných mocnostech t plynou buď vztahy již známé nebo obsahující příliš velká čísla. Další vztah získáme snáze položením:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1,$$

tedy $A = 0$, $F_6 = 11$, $F_{10} = 496$ a podle (26) a (28):

$$20008^2 = \lambda_1 11^5 + 496^3,$$

čili

$$\lambda_1 = 1728. \tag{30}$$

Klaďme konečně $x_1 = 1$, $x_2^5 = t$, $x_3 = 0$;

potom $A = 1,\ F_6 = t + 1,\ F_{10} = t^2 - 123t + 1,$

$$D^2 = t^2 \{t^2 + 11 \cdot 2^5 t - 2^{10}\}^2.$$

Srovnáním koëfficientů při t^0, t^1, t^3, t^4, t^5 získáme potřebných ještě 5 rovnic:

$$\begin{aligned}
-1725 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_9 \\
9355 &= 120\mu_1 + 245\mu_2 - 4\mu_3 + 121\mu_4 - 3\mu_6 + 122\mu_7 - 2\mu_9 \\
1122445 &= -365\mu_1 + 14885\mu_2 + 4\mu_3 - 121\mu_4 + \mu_6 + \mu_7 \qquad (31) \\
67830 &= -120\mu_1 - 245\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \\
-655 &= \mu_1 + \mu_2.
\end{aligned}$$

Tyto rovnice spolu s rovnicemi (29) určují všechny dosud neznámé koëfficienty:

$$\mu_1 = -720, \quad \mu_2 = 65, \quad \mu_3 = -3440, \quad \mu_4 = 795,$$
$$\mu_6 = 2275, \quad \mu_7 = -200, \quad \mu_9 = -500.$$

Bude tedy vypočtená syzygie:

$$D^2 = 1728 F_6^5 + F_{10}^3 - 720 A F_{10} F_6^3 + 65 A^2 F_6 F_{10}^2 - 3440 A^3 F_6^4 +$$
$$+ 795 A^4 F_6^2 F_{10} - 4 A^5 F_{10}^2 + 2275 A^6 F_6^3 - 200 A^7 F_6 F_{10} - 500 A^9 F_6^2.$$

Ačkoli tato syzygie není jednodušší, než syzygie mezi formami Kleinovými, má přece zavedení těchto invariantů theoretickou přednost bezprostředního odvození bez použití invariantů grupy binarní.

*

Sur le groupe icosaédrique.

L'object principal de l'article précédent est la configuration du groupe icosaédrique des transformations linéaires à trois variables. Je pars du groupe donné dans la forme de F. Klein et je le transforme en groupe des transformations orthogonalles par une transformation qui n'est pas connue en littérature. Puis, pour simplifier la recherche des pôles des transformations singulières, je démontre un théorème sur les pôles des transformations.

L'introduction des coordonnées de lignes nous met en état de prononcer une condition suffisante pour la dualité de la configuration d'un groupe de transformations quelconque. Alors, les coordonnées d'un pôle étant connues, je peux écrire tout-de-suite l'équation d'un axe correspondant. On voit aisément que la configuration du groupe icosaédrique des transformations linéaires à trois variables est réciproque.

Les produits des premiers membres des équations des axes *n*-aires sont des invariants de degré *n* et je les introduis comme les invariants fondamentaux. Ils diffèrent de ces dont se sert Klein qui les déduit des invariants du groupe binaire. En calculant la rélation entre ces invariants nouveaux, je peux en même temps controler les résultats de Klein.

Enfin, de la déscription de la configuration du groupe icosaédrique on conclut qu'il n'existe aucun groupe de 60 transformations ternaires linéaires transformant en elle même la configuration complète de l'hexagone de Pascal.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 5.

Dr. VLADIMÍR KOŘÍNEK:

O REPRESENTACI ČÍSEL TERNÁRNÍMI KVADRATICKÝMI FORMAMI INDEFINITNÍMI.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 5.

Dr. **VLADIMÍR KOŘÍNEK:**

O REPRESENTACI ČÍSEL TERNÁRNÍMI KVADRATICKÝMI FORMAMI INDEFINITNÍMI.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dr. *Vladimír Kořínek:*

O representaci čísel ternárními kvadratickými formami indefinitními.

1. *G. Humbert* v pojednání uveřejněném v Comptes Rendus 166 str. 925; 167 str. 49, 181, 1918 odvodil vzorce pro počet vlastních representací záporného čísla $M < -1$ rodem kvadratických ternárních forem indefinitních, které leží v základních oborech reprodukčních grup těchto forem. Budiž*)

$$f_1 \quad f_2 \quad f_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f_h \qquad (f)$$

systém neekvivalentních ternárních kvadratických forem indefinitních s reálnými celistvými koeficienty, vybraných po jedné z každé třídy určitého rodu řádu Ω, Δ ($\Omega < 0$ $\Delta > 0$), a značme

$$\mathfrak{F}_1 \quad \mathfrak{F}_2 \quad \mathfrak{F}_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \mathfrak{F}_h \qquad (\mathfrak{F}_h)$$

formy k formám *(f)* reciproké.

Považujeme-li x_1, x_2, x_3 za projektivní souřadnice v rovině, lze základní obor R_i reprodukční grupy (t. j. grupy celistvých automorfií o modulu $+1$) formy $\mathfrak{F}_i$ definovati takto: Jest to mnohoúhelníkový obor omezený přímkami a ležící uvnitř kuželosečky $\mathfrak{F}_i(x_1, x_2, x_3) = 0$ t. j. v části roviny dané nerovninou

$$\mathfrak{F}_i(x_1, x_2, x_3) < 0,$$

takový, že každý bod uvnitř kuželosečky lze převésti určitou celistvou automorfií v jeden bod oboru R_i a, pokud tento neleží na obvodu R_i, jen jeden takový bod. Mimo to, žádný bod uvnitř oboru R_i nelze převésti nějakou celistvou automorfií v jiný bod tohoto oboru. Existenci takových oborů pro ternární kvadratické formy indefinitní dokázal *H. Poincaré.* Protože souhrn bodů, ve které převádí jedna substituce V

*) V tomto pojednání užívám pro tern. kvadr. formy značení jako Bachmann: Zahlentheorie IV. Teil. 1. Abtheilung.

z reprodukční grupy obor R_i, tvoří také mnohoúhelník o stejném počtu stran, lze celý vnitřek kuželosečky $\mathfrak{F}_i = 0$ rozděliti na nekonečný počet mnohoúhelníků o stejném počtu stran. Substituce, které převádějí obor R v obory s ním sousední podle stran, tvoří systém vytvořujících substitucí reprodukční grupy. (Viz *Poincaré*: Les Fonctions fuchsiennes et l'Arithmetique. Oeuvres II. str. 463., *Klein-Fricke*: Automorphe Funktionen I. str. 501.)

Humbertovým vzorcům lze nyní dáti tento tvar: Budiž $M < -1$, nesoudělné s $\Omega\Delta$ a nechť splňuje všechny rodové charaktery forem $(\mathfrak{F}_i)$. Pak počet p vlastních representací tohoto čísla formami $(\mathfrak{F})$, které leží v základních oborech

$$R_1 \quad R_2 \quad R_3 \; . \; . \; . \; . \; R_h \qquad\qquad (R)$$

patřících k těmto formám, jest:

I. (f) i $(\mathfrak{F})$ vlastně primitivní.

a) Ω, Δ liché.

$$p = \frac{S}{2^\sigma}\,[H(-\Omega M) + (2E+1)\;H'(-\Omega M)],$$

kdež

$$S = \frac{1}{2} \qquad \text{pro} \quad M \equiv 1,\ 2,\ 3 \qquad \text{mod } 4,$$

$$S = \frac{E+1}{2} \qquad \text{pro} \quad M \equiv 0, \qquad \text{mod } 4.$$

b) Aspoň jedno z čísel Ω, Δ sudé.

$$p = \frac{S}{2^\sigma}\,H\,(-\Omega M),$$

kdež

$$S = \frac{\left| E' + \left(\frac{2}{M}\right) \right|}{2} \qquad \text{pro} \quad \Omega M \equiv 3 \qquad \Delta \equiv 2 \qquad \text{mod } 4,$$

$$S = 1 \qquad \text{pro} \quad \Omega M \equiv 3 \qquad \Delta \equiv 0 \qquad \text{mod } 4,$$

$$S = \frac{1}{4} \qquad \text{pro} \quad \Omega \equiv 0 \qquad \text{mod } 8,$$

$$S = \frac{1}{2} \qquad \text{pro ostatní případy } \Omega,\ \Delta,\ M.$$

II. (f) nevlastně, $(\mathfrak{F})$ vlastně primitivní.

$$p = \frac{1}{2^\sigma}\,H'\,(\Omega M).$$

Zde značí $H\,(-\Omega M)$ resp. $H'\,(-\Omega M)$ počet tříd vlastně resp. nevlastně primitivních binárních forem negativních tvaru $ax^2 + 2bxy + cy^2$

diskriminantu $-\Omega M$. E, E' jsou tak zvané simultání rodové charaktery

$$E = (-1)^{\frac{1}{2}(\Omega_1 \mathfrak{F} + 1)\frac{1}{2}(\Delta_1 f + 1)}, \qquad E' = (-1)^{\frac{1}{8}(\mathfrak{F}^2 - 1)} E.$$

(Viz *Smith* Papers I., str. 464.) σ jest počet lichých prvočísel z Ω, $\left(\frac{2}{M}\right)$ symbol Legendre-Jacobi-ho.

Representace čísla M, které leží na stranách základního mnohoúhelníka R_i, nutno počítati za $\frac{1}{2}$, neboť pak na obvodu mnohoúhelníku R_i leží ještě druhá representace čísla M s touto representací ekvivalentní. Pro $M = -2$ nutno hoření vzorce znásobiti 2. Hoření vzorce pro Ω liché a Δ liché neb $\Delta \equiv 2$ mod 4 uveřejnil Humbert v uvedeném pojednání. Odvození vzorců pro ostatní případy Ω, Δ způsobem Humbertovým nečiní žádných obtíží.

2. V tomto pojednání budu vyšetřovati vlastní representace kladných čísel M_3 rodem ternárních forem indefinitních ($\mathfrak{F}$). Při tom vyskytují se proti odvození vzorců pro čísla záporná hlavně dvě obtíže. Předně representacím kladných čísel formami ($\mathfrak{F}$) odpovídají representace indefinitních (místo definitních) binárních forem (φ) formami *(f)*. Formy (φ) mají nekonečný počet automorfií. Za druhé reprodukční grupy forem ($\mathfrak{F}$) jsou vně kuželoseček $\mathfrak{F}_i = 0$ (t. j. v oboru $\mathfrak{F}_i(x_1, x_2, x_3) > 0$) nevlastně nespojité t. j. nemají tam základních oborů.

Aby číslo M_3 nesoudělné s $\Omega\Delta$ dalo se vlastně representovati daným rodem ternárních kvadratických forem indefinitních ($\mathfrak{F}$), k tomu jest nutno a stačí,

1. aby
$$\left(\frac{M_3}{\delta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{F}}{\delta}\right), \tag{1}$$

kdež δ jest libovolné liché prvočíslo z Δ;

2. aby M_3 splňovalo rodové charaktery forem ($\mathfrak{F}$) vzhledem k číslu 2, existují-li nějaké;

3. aby existovaly primitivní binární formy deskriminantu $-\Omega M_3$, které se dají vlastně representovati formami (f). Tyto binární formy jsou v našem případě $M_3 > 0$, $\Omega_3 < 0$ indefinitní. (Viz *Smith*: On the Orders and Genera of Ternary Quadratic Forms. Papers I., str. 476).

Representaci čísla M_3 formou $\mathfrak{F}_i$

$$M_3 = \mathfrak{F}_i(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) > 0 \tag{2}$$

odpovídá nekonečné množství representací binárních primitivních forem diskriminantu $-\Omega M_3$ formou f_i. Tyto representace jsou dány rovnicemi

$$x_1 = \alpha_1 \ x + \beta_1 \ y$$
$$x_2 = \alpha_2 \ x + \beta_2 \ y \qquad (3)$$
$$x_3 = \alpha_3 \ x + \beta_3 \ y,$$

kdež α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 jest nějaké celistvé řešení rovnic

$$\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \Gamma_1, \quad \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 = \Gamma_2, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \Gamma_3. \quad (4)$$

Je-li α_1, α_2 atd. jedno řešení těchto rovnic, pak ostatní všechna lze psáti ve tvaru dvou komponovaných matic:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \\ \alpha_3, & \beta_3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{matrix} \right\|, \qquad (5)$$

kdež α, β, γ, δ jsou čtyry celá čísla libovolná, jen splňující rovnici

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

(Bachmann l. c. str. 55.) Nechť substituce (3) převádí f_i v binární primitivní formu φ, pak substituce o matici (5) převádí f_i ve formu φ', kterou dostaneme z φ substitucí

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Odtud plyne, že souhrn binárních primitivních forem, jichž representace formou f_i odpovídají representaci (2) čísla M_3 formou $\mathfrak{F}_i$, tvoří třídu těchto forem.

Vybereme si tedy z každé třídy binárních primitivních forem diskriminantu $-\Omega M_3$, které se dají vlastně representovati formami (f), po jedné formě

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3 \ldots . \varphi_n. \qquad (\varphi)$$

Omezíme-li se jen na tyto formy, pak libovolné representaci (2) čísla M_3 nějakou formou $\mathfrak{F}_i$ z ($\mathfrak{F}$) odpovídají representace jen jedné formy φ z (φ) formou f_i z (f), dané vzorcem (5), kdež za (6) nutno položiti matice všech vlastních automorfií formy φ.

3. Budiž φ jedna forma z (φ), kterou pišme explicitně (m_1, n_3, m_2). Protože φ dá se representovati formami (f), jsou vždy řešitelny kongruence

$$\begin{aligned} \Delta m_1 + N_1^2 &\equiv 0 \\ \Delta n_3 - N_1 N_2 &\equiv 0 \qquad \text{mod } M_3 \qquad (7) \\ \Delta m_2 + N_2^2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

dvěma celými čísly N_1, N_2. Počet řešení těchto kongruencí různých mod M_3 jest $2^{\nu+\lambda}$, kdež ν jest počet lichých prvočísel z M_3, $\lambda = 0$ pro $M_3 \equiv 1, 2, 3$ mod 4, $\lambda = 1$ pro $M_3 \equiv 4$ mod 8, $\lambda = 2$ pro $M_3 \equiv 0$ mod 8. (Bachmann l. c. 76.)

Ke každé formě φ z (φ) a ke každému řešení N_1, N_2 kongruencí (7) lze sestrojiti ternární formu f' s reciprokou $\mathfrak{F}'$ řádu Ω, Δ o koeficientech:

$$f' = \begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{F}' = \begin{pmatrix} M_1, & M_2, & M_3 \\ N_1, & N_2, & N_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Dostaneme tak celkem $l = 2^{\nu+\lambda} n$ forem f':

$$f'_1, \; f'_2, \; f'_3 \; . \; . \; . \; . \; f'_l \qquad (f')$$

s reciprokými

$$\mathfrak{F}'_1, \; \mathfrak{F}'_2, \; \mathfrak{F}'_3 \; . \; . \; . \; . \; \mathfrak{F}'_l. \qquad (\mathfrak{F}')$$

Vždy $2^{\nu+\lambda}$ forem (f') obsahuje jednu formu φ z (φ) jakožto část. Každá forma z ($\mathfrak{F}'$) má za třetí hlavní koeficient číslo M_3 a za první dva vedlejší koeficienty po každé jinou dvojici N_1, N_2 kořenů kongruencí (7). Jest ihned patrno, že formy (f') a ($\mathfrak{F}'$) jsou téhož rodu jako (f) a ($\mathfrak{F}$), a jest tudíž každá forma z (f') ekvivalentní jedné z forem (f). (*Smith* l. c. I. str. 488.)

Budiž

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

nějaká transformace jedné formy f z (f) v jednu formu f' z (f'), pak první dva sloupce představují nám matici representace příslušné formy φ, části formy f' formou f. Platí nyní věta:

První dva sloupce všech transformací forem (f) ve formy (f') představují nám matice vesměs od sebe různých representací forem (φ) formami (f) a tímto způsobem dostaneme všechny representace forem (φ) formami (f). (*Smith* l. c. I., str. 488.)

Označíme-li minory modulu substituce (9) A_1, B_1, Γ_1 atd., pak substituce

$$\begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \Gamma_1 \\ A_2, & B_2, & \Gamma_2 \\ A_3, & B_3, & \Gamma_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

převádí $\mathfrak{F}$ reciprokou k f v $\mathfrak{F}'$ reciprokou k f' a poslední sloupec této substituce nám dává representaci čísla M_3 formou $\mathfrak{F}$ odpovídající representaci binární formy φ formou f dané prvními dvěma sloupci (9). Všechny možné representace čísla M_3 formami ($\mathfrak{F}$) tvoří tedy poslední sloupce transformací forem ($\mathfrak{F}$) ve ($\mathfrak{F}'$). Avšak všechny representace, které těmito transformacemi dostaneme, nejsou od sebe rozdílné, jak plyne z této úvahy:

Nechť substituce (9) transformuje formu f z (f) ve formu f' z (f') s reciprokou $\mathfrak{F}'$, které pišme explicitně ve tvaru (8). Komponujeme-li substituci (9) se substitucí tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \varkappa_2 \\ \gamma, & \delta, & \varkappa_1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

kdež α, β, γ, δ jsou koeficienty vlástní automorfie formy (m_1, n_3, m_2) $\varkappa_2$, $\varkappa_1$ čísla prozatím libovolná, dostaneme transformaci formy f ve formu f'' tvaru

$$f'' = \begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m'_3 \\ n'_1, & n'_2, & n_3 \end{pmatrix}$$

s reciprokou

$$\mathfrak{F}'' = \begin{pmatrix} M'_1, & M'_2, & M_3 \\ N'_1, & N'_2, & N'_3 \end{pmatrix}.$$

Forma f'' obsahuje jakožto část tutéž binární formu jako f' a její reciproká má za třetí hlavní koeficient číslo M_3, za první a druhý vedlejší koeficient jeden pár kořenů kongruencí (7). f'' ovšem nemusí býti jednou z forem (f'), neboť koeficienty m'_3, n'_1, n'_2 nemusí se shodovati. Avšak vždy lze za $\varkappa_2$, $\varkappa_1$ zvoliti dvě celá čísla tak, aby f'' vyskytovala se mezi formami (f'). Substituce, která převádí $\mathfrak{F}$ v $\mathfrak{F}''$, má se substitucí (10) stejný třetí sloupec, neboť první dva sloupce komponované substituce (9) a (11) splňují tytéž rovnice (4) jako první dva sloupce substituce (9). Tudíž všechny representace čísla M_3 formou $\mathfrak{F}$, dané transformacemi této formy ve formy $\mathfrak{F}''$, nejsou různé od representace dané transformací (10). Dosadíme-li v (11) za (6) všechny vlastní automorfie formy φ, dostaneme takto všechny takové representace.

4. Vyšetříme nyní počet forem $\mathfrak{F}''$ t. j. počet forem z $(\mathfrak{F}')$ ve které přejde $\mathfrak{F}'$, dosadíme-li do (11) za (6) všechny vlastní automorfie formy φ. Obecný tvar vlastní automorfie formy $\varphi = (m_1, n_3, m_2)$ jest

$$\begin{pmatrix} \dfrac{t - n_3 u}{\sigma}, & -\dfrac{m_2 u}{\sigma} \\ \dfrac{m_1 u}{\sigma}, & \dfrac{t + n_3 u}{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

kdež $\sigma = 1$ neb 2 podle toho, je-li φ vlastně neb nevlastně primitivní. t, u jest celistvé řešení rovnice Pellovy

$$t^2 + \Omega M_3 u^2 = \sigma^2. \tag{12'}$$

Dosaďme tento tvar automorfie do (11) a vypočtěme N'_1, N'_2. Rovnice, které takto dostaneme, vezměme jakožto kongruence mod M_3. Tím dostaneme vztah

$$\sigma N'_1 \equiv t N_1 \qquad \sigma N'_2 \equiv t N_2 \qquad \text{mod } M_3. \tag{13}$$

Z Pellovy rovnice plyne kongruence

$$t^2 \equiv \sigma^2 \qquad \text{mod } M_3 \tag{14}$$

t. j. výraz $(t-\sigma)\quad(t+\sigma)$
jest dělitelný M_3. Nyní mohou nastati dva případy: buď M_3 jest obsaženo celé v jednom z výrazů $t-\sigma$, $t+\sigma$, neb rozpadá se na dva faktory $M_3 = M'_3 M''_3$ takové, že M'_3 dělí $t-\sigma$, M''_3 dělí $t+\sigma$. Společná míra obou faktorů dělí i $2t$. Protože t jest nesoudělné s M_3, může tato společná míra býti nejvýše 2.

Je-li t_n, u_n n-té kladné řešení Pellovy rovnice pro $D = -\Omega M_2$ a je-li a faktor z D, který dělí výraz $t_1-\sigma$, pak dělí i každý výraz $t_n-\sigma$. Ze známého vztahu totiž:

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n \qquad (15)$$

dostaneme kongruenci

$$\sigma^{n-1} t_n \equiv t_1^n \qquad \text{mod } a,$$

kam zbývá jen dosaditi $t_1^n \equiv \sigma^n$ mod a. Stejným způsobem dostaneme, když a dělí výraz $t_1+\sigma$, že dělí i výraz $t_n-\sigma$ neb $t_n+\sigma$ podle toho, je-li n sudé neb liché.

Stačí tedy při rozboru kongruencí (13) uvažovati jen nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice t_1, u_1. Nechť nejdříve M_3 jest celé obsaženo v jednom z výrazů $t_1-\sigma$, $t_1+\sigma$. V tomto případě, protože vedle t_1 jest kořenem Pellovy rovnice i $-t_1$, mají kongruence (13) pro všecky automorfie formy φ tvar

$$N'_1 \equiv \pm N_1 \qquad N'_2 \equiv \pm N_2 \qquad \text{mod } M_3,$$

kdež v obou kongruencích platí současně znamení $+$ neb $-$. Věc lze shrnouti ve větu:

Všechny representace formy φ formou f, které odpovídají jedné representaci čísla M_3 formou $\mathfrak{F}$, jsou obsaženy v transformacích formy f ve formu f'_1, patřící ke kořenům N_1, N_2 kongruencí (7), neb ve formu f'_2 patřící ke kořenům $-N_1$, $-N_2$. Kořeny tyto jsou vždy různé mod M_3 mimo případ $M_3 = 2$. Representace čísla M_3, které dostaneme transformacemi formy $\mathfrak{F}$ ve formu $\mathfrak{F}'_1$, jsou stejné s representacemi, které dostaneme transformacemi $\mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{F}'_2$.

Nechť za druhé M_3 rozpadá se na dva faktory $M_3 = M'_3 M''_3$ takové, že M'_3 dělí $t_1-\sigma$, M''_3 dělí $t_1+\sigma$. Nejdříve budeme předpokládati M_3 liché. Pak M'_3, M''_3 jsou čísla nesoudělná a hoření rozklad čísla M_3 jest jednoznačný. V tomto případě kongruence (13) jsou splněny mimo čísla N_1, N_2; $-N_1$, $-N_2$ ještě čísly N'_1, N'_2 a $-N'_1$, $-N'_2$, které hoví kongruencím

$$N'_1 \equiv N_1 \qquad N'_2 \equiv N_2 \qquad \text{mod } M'_3,$$
$$N'_1 \equiv -N_1 \qquad N'_2 \equiv -N_2 \qquad \text{mod } M''_3,$$

kteréžto kongruence nám určují jednu a jen jednu z 2^ν dvojic kořenů

kongruencí (7) mod M_3. Tato dvojice jest různá mod M_3 od N_1, N_2 i od $-N_1$, $-N_2$. Podobný výsledek dostaneme stejným způsobem i pro případ, že M_3 jest sudé, a máme tedy větu:

Není-li číslo M_3 celé obsaženo v jednom z výrazů $t_1 - \sigma$, $t_1 + \sigma$, pak všechny representace formy φ formou f, které odpovídají jedné representaci čísla M_3 formou $\mathfrak{F}$, jsou obsaženy v transformacích formy f ve formu f'_1 patřící ke kořenům N_1, N_2 kongruencí (7), ve formu f'_2 patřící ke kořenům $-N_1$, $-N_2$, ve formu f'_3 a f'_4 patřící ke kořenům N'_1, N'_2 a $-N'_1$, $-N'_2$. Representace čísla M_3, které dostaneme transformacemi formy $\mathfrak{F}$ ve formu $\mathfrak{F}'_1$, jsou stejné s representacemi, které dostaneme transformacemi formy $\mathfrak{F}$ ve formy $\mathfrak{F}'_2$, $\mathfrak{F}'_3$, $\mathfrak{F}'_4$.

Nutno ještě poznamenati, že při $-\Omega M_3 \equiv 1$ mod 4 nastává vždy případ první neb druhý současně pro $\sigma = 1$ i pro $\sigma = 2$, jak plyne ihned ze známých vztahů mezi nejmenším kladným řešením Pellovy rovnice pro $\sigma = 1$ a pro $\sigma = 2$. Pro další úvahy zavedeme číslo ζ, které se bude rovnati 1 neb $\frac{1}{2}$ podle toho, zda v jednom z výrazů $t_1 - 1$ $t_1 + 1$ jest neb není celé obsaženo číslo M_3. Při tom t_1 jest nejmenší kladné řešení Pellovy rovnice pro $\sigma = 1$ a $D = -\Omega M_3$.

5. Nechť substituce (10) převádí formu $\mathfrak{F}$ ve formu $\mathfrak{F}'_1$. Poslední sloupec této substituce dává nám representaci (2) čísla M_3 formou $\mathfrak{F}$. Ostatní všechny transformace $\mathfrak{F}$ v $\mathfrak{F}'_1$ mají tvar

$$\begin{pmatrix} R_1, & S_1, & T_1 \\ R_2, & S_2, & T_2 \\ R_3, & S_3, & T_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \Gamma_1 \\ A_2, & B_2, & \Gamma_2 \\ A_3, & B_3, & \Gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

kdež na levo nutno položiti všechny celistvé automorfie formy $\mathfrak{F}$. Je-li $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ representace čísla M_3 formou $\mathfrak{F}$ daná jednou transformací (16), pak platí

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= R_1 \Gamma_1 + S_1 \Gamma_2 + T_1 \Gamma_3 \\ \Gamma'_2 &= R_2 \Gamma_1 + S_2 \Gamma_2 + T_2 \Gamma_3 \\ \Gamma'_3 &= R_3 \Gamma_1 + S_3 \Gamma_2 + T_3 \Gamma_3 . \end{aligned}$$

Dostaneme tudíž všechny representace dané transformacemi (16) z representace Γ_1, Γ_2, Γ_3, když tuto representaci dosadíme do všech substitucí reprodukční grupy forny $\mathfrak{F}$. Tvoří tedy všechny tyto representace dané transformacemi formy $\mathfrak{F}$ ve formu $\mathfrak{F}'_1$ skupinu representací takových, že libovolné dvě representace z této skupiny lze v sebe převésti nějakou automorfií formy $\mathfrak{F}$. Jest dále patrno, že skupiny representací čísla M_3, odpovídající transformacím formy $\mathfrak{F}$ v jiné z forem ($\mathfrak{F}'$), jsou s touto skupinou buď úplně totožné neb úplně různé. Tutéž skupinu representací při $M > 2$ dávají ještě transformace formy $\mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{F}'_2$ neb

$\mathfrak{F}'_2$, $\mathfrak{F}'_3$, $\mathfrak{F}'_4$ podle toho, je-li $\zeta = 1$ neb $\frac{1}{2}$. Počet forem $(\mathfrak{F}')$ jest však $l = 2^{\nu - \lambda} n$, takže dospíváme k větě:

Všechny vlastní representace čísla $M_3 > 2$ rodem ternárních indefinitních forem $(\mathfrak{F})$ lze rozděliti v

$$p = \frac{2^{\nu + \lambda}\, n\, \zeta}{2} \tag{17}$$

skupin takových, že každou representaci nějaké skupiny lze převésti v libovolnou jinou representaci téže skupiny jistou substitucí z reprodukční grupy formy, k níž tato skupina patří a žádnou jinou representaci čísla M_3 touto formou nelze převésti v representace této skupiny substitucemi z reprodukční grupy.

6. Číslo n ve vzorci (17) značí počet tříd binárních primitivních forem φ diskriminantu $-\Omega M$, jež se dají vlastně representovat rodem ternárních forem indefinitních (f). Naznačím, jak se dá číslo n stanoviti aspoň v případě forem (φ) i (f) vlastně primitivních. Nutnou a dostatečnou podmínkou, aby φ se dalo vlastně representovati rodem ternárních forem indefinitních, jest, aby mělo tyto rodové charaktery:

1) $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{\omega}\right)$,

2) $\left(\frac{\varphi}{\mu}\right) = \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)$,

3) $(-1)^{\frac{1}{2}(\Delta\varphi + 1)} = 1$ pro $M \equiv 4 \mod 8$,

$(-1)^{\frac{1}{2}(\Delta\varphi + 1)} = 1$, $(-1)^{\frac{1}{8}(\Delta^2\varphi^2 - 1)} = 1$ pro $M \equiv 0 \mod 8$,

4) φ splňovalo rodové charaktery forem (f) vzhledem k číslu 2, existují-li jaké. Zde značí ω resp. μ libovolné liché prvočíslo z Ω resp. M. (Smith l. c. I. str. 476.)

Rodové charaktery forem (f) mohou býti libovolné, jen když splňují existenční rovnici:

$$E\, \alpha^{\frac{1}{8}(f^2 - 1)}\, \beta^{\frac{1}{8}(\mathfrak{f}^2 - 1)} \left(\frac{f}{|\Omega_1|}\right) \left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta_1}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\Omega_1 + 1)\, \frac{1}{2}(\Delta_1 + 1)}, \tag{18}$$

kdež E jest tak zvaný simultání rodový charakter

$$E = (-1)^{\frac{1}{2}(\Omega_1 \mathfrak{f} + 1)\, \frac{1}{2}(\Delta_1 f + 1)}.$$

Dále $\alpha = 1$ neb -1 podle toho, je-li Ω dělitelno sudou nebo lichou mocninou čísla 2. β má stejný význam pro Δ jako α pro Ω. Indexem 1 při Ω, Δ naznačujeme číslo, jež dostaneme dělením Ω resp. Δ největším

čtvercem v Ω resp. Δ obsaženým, a když takto vzniklé číslo zbavíme ještě případně faktoru 2. (Smith l. c. str. 470, 478.)

Rodové charaktery binárních, vlastně primitivních forem indefinitních diskriminantu $-\Omega M$ mohou býti libovolné, jen když splňují existenční rovnici

$$\delta^{1/2(\varphi-1)}\ \varepsilon^{1/8(\varphi^2-1)}\left(\frac{\varphi}{|\Omega_1 M_1|}\right)=1, \tag{19}$$

kdež $\delta=(-1)^{1/2(\Omega_1 M_1+1)}$, ε má pro ΩM tentýž význam jako α pro Ω.

Z rovnice (18) dostaneme pomocí zákonu reciprocity, rovnice (1) a podmínek 1) až 4), jež musí splňovati rodové charaktery forem (φ), po úpravě

$$\left(\frac{\varphi}{|\Omega_1 M_1|}\right)=\delta^{1/2(\Delta_1+1)}\ \alpha^{1/8(\varphi^2-1)}\ \gamma^{1/8(\Delta_1^2-1)}E,$$

kdež γ má pro M týž význam jako α pro Ω. Tento výraz dosadíme do rovnice (19) a zjistíme nyní pro různé případy Ω, Δ, M, kolik rodových charakterů forem (φ) není určeno požadavky 1) až 4) a rovn. (19). Počet těchto charakterů udává nám pak počet rodů binárních forem shora udaných vlastností a tudíž i počet tříd. V případě forem (φ) neb forem (φ) i (f) nevlastně primitivních postupujeme úplně stejně, jen místo rovnice (19) neb rovnice (19) a (18) nutno použíti příslušných existenčních rovnic pro rod nevlastně primitivní.

Máme tudíž tyto vzorce: Všechny representace rodem ternárních kvadratických forem indefinitních $(\mathfrak{F})$ čísla $M>2$ a splňujícího rodové charaktery těchto forem, dají se rozděliti na p skupin vlastností na str. 11. vytčených, kdež

I. (f) i $(\mathfrak{F})$ vlastně primitivní.

a) Ω, Δ liché

$$-\Omega M\equiv 1 \mod 8 \quad p=\frac{(1+E)\,\zeta}{2^{\sigma}}\,h\,(-\Omega M),$$

$$-\Omega M\equiv 5 \mod 8 \quad p=\frac{\zeta}{2^{\sigma+1}}\left[(1+E)\,h\,(-\Omega M)+(1-E)\,h'\,(-\Omega M)\right],$$

$$-\Omega M\equiv 2, 3 \mod 4 \quad p=\frac{\zeta}{2^{\sigma+1}}\,h\,(-\Omega M),$$

$$-\Omega M\equiv 0 \mod 4 \quad p=\frac{(1+E)\,\zeta}{2^{\sigma+1}}\,h\,(-\Omega M),$$

b) Ostatní případy Ω, Δ

$$p=\frac{S\,\zeta}{2^{\sigma}}\,h\,(-\Omega M),$$

při čemž $S = \frac{1}{2}$ mimo tyto případy:

$$S = \frac{\left| E' + \left(\frac{2}{M}\right) \right|}{2} \quad \text{pro} \; -\Omega M \equiv 1, \quad \Delta \equiv 2 \quad \text{mod } 4,$$

$$S = \quad 1 \quad \text{pro} \; -\Omega M \equiv 1, \quad \Delta \equiv 0 \quad \text{mod } 4,$$

$$S = \quad \tfrac{1}{4} \quad \text{pro} \quad \Omega \equiv 0 \quad \text{mod } 8.$$

II. (f) nevlastně a $(\mathfrak{F})$ vlastně primitivní.

$$p = \frac{\zeta}{2^\sigma} h' (-\Omega M).$$

Zde značí h, resp. h' počet tříd binárních indefinitních forem vlastně resp. nevlastně primitivních daného diskriminantu, ζ viz str. 10., ostatní symboly stejné jako ve vzorcích pro M záporné Ω (§ 1.). V případě $M = 2$ jest počet skupin representací dvojnásobný, než udávají hoření vzorce.

7. Při záporných číslech M šlo z každé skupiny representací vybrati jednu určitou požadavkem, aby bod jí odpovídající ležel uvnitř základního oboru R příslušné formy. Toho při číslech kladných nelze učiniti, neboť reprodukční grupa jest vně kuželosečky $\mathfrak{F}(x_1, x_2, x_3) = 0$ nevlastně nespojitá, t. j. neexistují tam základní obory. Ukáži, jak lze postupovati v tomto případě, abychom z celé skupiny representací vybrali ne sice jednu, nýbrž konečný počet representací, které tvoří jakýsi řetězec a to tak, že každá representace přechází v representaci po ní v řetězci následující nějakou vytvořující substitucí reprodukční grupy (definovanou v § 1.). K tomu cíli dokážeme si nejdříve jednu pomocnou větu, užívajíce postupu udaného v *Klein-Fricke*: Automorphe Funktionen I., str. 508, § 3.

Mějme representaci (2) čísla $M > 0$ formou $\mathfrak{F}$, při čemž aspoň jedno z čísel $-\Omega$, M není úplný čtverec. Pak existuje v reprodukční grupě formy $\mathfrak{F}$ cyklická podgrupa, která převádí bod $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ sám v sebe. Pišme explicitně:

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{pmatrix}.$$

Polára bodu $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ vzhledem ke kuželosečce $\mathfrak{F} = 0$ jest

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 = 0, \tag{20}$$

kdež

$$\begin{aligned} \nu_1 &= A_1 \Gamma_1 + B_3 \Gamma_2 + B_2 \Gamma_3 \\ \nu_2 &= B_3 \Gamma_1 + A_2 \Gamma_2 + B_1 \Gamma_3 \\ \nu_3 &= B_2 \Gamma_1 + B_1 \Gamma_2 + A_3 \Gamma_3. \end{aligned} \tag{21}$$

Zvolme si celá čísla λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 tak, aby

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ \lambda_3, & \mu_3, & \nu_3 \end{vmatrix} = 1. \tag{22}$$

Značíme-li minory tohoto determinantu Λ_1, M_1, N_1 atd., pak substitucí S:

$$x_k = \Lambda_k z_1 + M_k z_2 + N_k z_3 \tag{23}$$

přejde $\mathfrak{F}$ ve

$$\mathfrak{F}' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \end{pmatrix}.$$

Polára (20) nabude tvaru

$$z = 0. \tag{24}$$

Předpokládejme, že bod $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ jest skutečně pólem jisté substituce U z reprodukční grupy. U převádí pak v sebe i poláru (20) tohoto bodu. Substituce, již dostaneme z U transformací pomocí substituce (23) S, t. j. substituce $S^{-1} U S$, jest celistvou automorfií formy $\mathfrak{F}'$ a převádí tudíž v sebe poláru (24). Jest tedy nutně tvaru

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2 + m y_3 \\ z_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 + n y_3 \\ z_3 &= \qquad\qquad\quad y_3. \end{aligned} \tag{25}$$

Odtud ihned plyne, že binární celistvá substituce

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

převádí v sebe binární formu (A'_1, B'_3, A'_2). Tato forma jest forma indefinitní. Reciproká forma k $\mathfrak{F}$ f přejde totiž v f' reciprokou k $\mathfrak{F}'$ substitucí o matici (22). Platí tedy pro třetí hlavní koeficient formy f':

$$a'_3 = f(\nu_1, \nu_2, \nu_3).$$

Odtud plyne na základě rovnic (21), známého vztahu mezi f a $\mathfrak{F}$ a nerovniny (2)

$$a'_3 = f(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \Omega \Delta \mathfrak{F}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) < 0.$$

Tudíž diskriminant uvažované formy binární $-\Delta a'_3 > 0$.

Předpokládejme nejdříve, že $-\Delta a'_3$ není úplný čtverec. Pak uvažovaná forma má nekonečně mnoho automorfií tvaru (12), kdež ovšem místo m_1, n_3, m_2 třeba položiti A'_1, B'_3, A'_2. Jednu z těchto automorfií položme za α, β, γ, δ do (25). Číslo m, n stanovíme nyní z podmínky že i koeficienty B'_1, B'_2 substitucí (25) se nemění. Z této podmínky dostáváme pro m, n rovnice

$$\begin{aligned} m\, d &= \quad (\alpha - 1)\, B'_1 B'_3 - \beta B'_2 B'_3 + \gamma A'_2 B'_1 - (\delta - 1)\, A'_2 B'_2 \\ n\, d &= -(\alpha - 1)\, A'_1 B'_1 + \beta A'_1 B'_2 - \gamma B'_1 B'_3 + (\delta - 1)\, B'_2 B'_3, \end{aligned}$$

kdež d jest deskriminant formy (A'_1, B'_3, A'_2). Protože unimodulární

substituce nemění diskriminantu, nechává nutně substituce (25) i koeficient A'_3 beze změny. Jest to tedy automorfie formy $\mathfrak{F}'$. Obecně však tato automorfie nemá celistvých koeficientů, neboť m, n mohou býti i čísla lomená. Vždy lze však automorfii tvaru (12) vybrati tak, aby platilo

$$\begin{matrix} \alpha \equiv \delta \equiv 1 \\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \end{matrix} \qquad \text{mod } d, \qquad (26)$$

a pak m i n jsou čísla celá, neboť ze vztahu (15) plynou kongruence

$$\sigma^{n-1}\, t_n \equiv t_1^{\,n} \qquad \sigma^{n-1}\, u_n \equiv \binom{n}{1}\, t_1^{\,n-1}\, u_1 \qquad \text{mod } d.$$

Zvolíme-li si nyní $n = 2d$, pak na základě (14) dostaneme

$$t_n \equiv \sigma \qquad u_n \equiv 0 \qquad \text{mod } d$$

a kongruence (26) jsou splněny.

Existuje tedy cyklická podgrupa reprodukční grupy formy $\mathfrak{F}'$, jejíž substituce mají tvar (25). Transformujeme-li tuto podgrupu substitucí (22) S, dostaneme podgrupu reprodukční grupy formy $\mathfrak{F}$, která má pól v bodě $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ a převádí tudíž tuto representaci čísla M samu v sebe. Tím jest naše věta dokázána, neboť případ, že diskriminant $-\Delta a'_3 = -\Delta^2 \Omega M$ jest úplný čtverec, jest jen tehdy možný, když $-\Omega$ i M jsou úplné čtverce.

Nastane-li tento poslední případ, pak polára bodu $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ protíná kuželosečku $\mathfrak{F} = 0$ ve dvou racionálních bodech. Forma $\mathfrak{F}$ jest tedy forma „nulová“. Lze nyní snadno dokázati větu: V reprodukční grupě nulové formy $\mathfrak{F}$ existuje vždy cyklická podgrupa, která má za pól libovolný racionální bod na kuželosečce $\mathfrak{F} = 0$.

8. Uvažujme nyní jednu skupinu representací čísla M formou $\mathfrak{F}$, která má vlastnosti vytčené na str. 11. Místo bodů odpovídajících representacím skupiny a ležících vně kuželosečky $\mathfrak{F} = 0$ budeme uvažovati poláry těchto bodů vzhledem ke kuželosečce. Tyto poláry kuželosečku protínají v reálných bodech. Vybereme si z celé skupiny jen ty representace, jichž poláry procházejí určitým základním oborem R formy $\mathfrak{F}$ a dokážeme, že těchto takto vybraných represantací jest jen konečný počet.

Ze všech základních oborů uvnitř kuželosečky vyberme si jeden určitý R. Substituce, které převádějí obory s ním podle stran sousedící v tento obor, označme

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3 \; . \; . \; . \; . \; V_m \quad . \; (V).$$

Jsou to vytvořující substituce reprodukční grupy.

Předpokládejme, že aspoň jedno z čísel $-\Omega, M$ není úplný čtverec, a polára p representace (2) čísla M formou $\mathfrak{F}$ nechť prochází oborem R.

Mimo obor R prochází p ještě nekonečným množstvím jiných oborů uvnitř kuželosečky. Tyto obory, jimiž p prochází, označme po řadě od R na pravo i na levo:

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3 \; . \; . \; . \; .$$
$$R_{-1}, \quad R_{-2}, \quad R_{-3} \; . \; . \; . \; .$$

Jest ihned patrno, že každá substituce, která převádí nějaký obor, kterým p prochází, v obor R, dá nám z representace $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ opět representaci, jejíž polára prochází R, a že dostáváme tímto způsobem všechny representace z naší skupiny, jejíž polára prochází R. Budiž dále U vytvořující substituce podgrupy, která má pól v bodě $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, a která podle věty v předešlém odstavci dokázané vždy existuje. U převádí poláru p samu v sebe a tudíž obor R v nějaký jiný obor, značme jej R_n, jímž p prochází. Jest zřejmo, že R_1 přejde substitucí U v R_{n+1}, obecně R_k v R_{n+k}.

Obor R_{-1} nechť přejde substitucí V z (V) v obor R. Touto substitucí přejde representace $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ v jinou representaci $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ a polára p v jinou poláru p', která opět prochází oborem R. Obor R_{-2} sousední s R'_{-1} přejde v nějaký obor R'_{-1} sousední s R. Označme V' substituci z (V), která převádí R'_{-1} v R'. Dostáváme tak representaci $\Gamma''_1, \Gamma''_2, \Gamma''_3$ s polárou p'', která opět prochází R. Obor R_{-2} přejde v R složenou substitucí $V'V$. Označme R''_{-1} obor, ve který přejde obor R_{-3} substitucí $V'V$. Obor R''_{-1} sousedí s R a prochází jím polára p''. Nyní opakujeme celý postup pro R''_{-1} jako pro R'_{-1}. Totéž uděláme pro obor R'''_1 vzniklý z oboru R_4 substitucí $V''V'V$ atd. Tím dostáváme řadu representací čísla M:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3 \quad \text{s polárou } p, \\ &\Gamma'_1, \quad \Gamma'_2, \quad \Gamma'_3 \quad \text{s polárou } p', \\ &\Gamma''_1, \quad \Gamma''_2, \quad \Gamma''_3 \quad \text{s polárou } p'' \text{ atd.} \end{aligned} \tag{27}$$

Všechny poláry procházejí oborem R a každou representaci dostaneme z předcházející nějakou substitucí (V). Tyto substituce jsme značili po řadě V, V', V'' atd.

Po n krocích dostaneme representaci $\Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \Gamma_3^{(n)}$, s polárou $p^{(n)}$. Při tom substituce $V^{(n-1)} V^{(n-2)} \ldots . V'V$ převádí representaci $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ v representaci $\Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \Gamma_3^{(n)}$. Avšak tatáž substituce převádí obor R_{-n} v R a jest to tudíž substituce U. Representace $\Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \Gamma_3^{(n)}$ jest tudíž totožná s $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Pokračujeme-li dále, převedeme nejdříve obor R_{-n-1} substitucí U v obor R_{-1} a tento substitucí V v obor R. Representace $\Gamma_1^{(n+1)}, \Gamma_2^{(n+1)}, \Gamma_3^{(n+1)}$ jest totožná s representací $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$. Representace v řadě (27) se tudíž po n členech opakují znovu.

Postupujeme-li od oboru R po poláře p na druhou stranu k oborům R_1, R_2 atd., dostáváme representace

$$\Gamma_1^{(n-1)},\ \Gamma_2^{(n-1)},\ \Gamma_3^{(n-1)};\quad \Gamma_1^{(n-2)},\ \Gamma_2^{(n-2)},\ \Gamma_3^{(n-2)};\ \text{atd.},$$

jak lze ukázati tímtéž způsobem. Máme tedy v celé uvažované skupině representací jen konečný počet n representací, jichž poláry procházejí určitým základním oborem R. Tyto representace dají se seřaditi v řetězec tak, že každou následující dostávám z předcházející a z poslední dostávám první jistou substitucí z (V). Každá representace v řetězci určuje jednoznačně representaci v řetězci ji předcházející a representaci po ní následující.

V případě, kdy $-\Omega$, M jsou úplné čtverce, neexistuje cyklická podgrupa o pólu Γ_1, Γ_2, Γ_3. V tomto případě existují však dvě cyklické podgrupy, které mají za póly oba průsečíky poláry p s kuželosečkou $\mathfrak{F} = 0$. Polára p prochází pak jen konečným počtem oborů R. Dostaneme tudíž i v tomto případě konečný počet representací z každé skupiny.

*

Sur la représentation des nombres par les formes quadratiques ternaires indéfinies.

(Extrait de l'article précédent.)

M. G. Humbert donne dans les Comptes Rendus 166, p. 925; 167 p. 49, 181, 1918 les formules pour les nombres des représentations propres d'un entier négatif par un genre donné des formes quadratiques ternaires indéfinies d'ordre Ω, Δ, qui se trouvent dans les domaines fondamentaux des groupes reproductifs appartenant à ces formes. Ces formules sont reproduites à la page 4. Je conserve la notation de M. Humbert, mais je donne les formules pour tous les cas possibles tandisque M. Humbert ne traite que le cas de Ω impair et Δ impair ou $\Delta = 2$ mod 4. Dans le présent article je m'occupe des représentations des entiers positifs. Quand on applique les méthodes de M. Humbert à ce cas, on rencontre deux differences.

1°. A la représentation d'un entier positif par une forme ternaire répond la représentation d'une forme binaire indéfinie par la forme ternaire réciproque. Or, les formes binaires indéfinies ayant une infinité des substitutions semblables de forme (12), on est obligé d'introduire dans la démonstration le facteur ζ qui signifie 1 ou $\frac{1}{2}$ suivant qu'un des nombres $t_1 - 1$, $t_1 + 1$ est divisible ou non par le nombre M. t_1 est ici la plus petite solution positive de l'équation de Pell (12′) pour $\sigma = 1$.

2°. Le domaine fondamental du groupe reproductif d'une forme $\mathfrak{F}$ n'existant qu' à l'interieur de la conique $\mathfrak{F}=0$ (c'est-à-dire dans la partie du plan où $\mathfrak{F}<0$), on ne peut choisir parmi l'infinité des représentations propres d'un entier positif un nombre fini des représentation par le postulat que ces représentations se trouvent dans le domaine fondamental. Donc on peut énoncer seulement le théorème suivant:

On peut diviser les représentations d'un entier positif M par un genre des formes ternaires indéfinies en p groupes. Il est possible de transformer deux représentations quelconques d'un de ces groupes l'une à l'autre par une substitution du groupe reproductif, mais cette chose est impossible pour deux représentations appartenant à deux groupes différents. Le nombre p est donné par les formules de la page 12.

Soit $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ une représentation de M par $\mathfrak{F}$. Au lieu du point $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ envisageons sa polaire (20). Cette polaire coupe la conique $\mathfrak{F}=0$ en deux points réels et passe par conséquent à l'intérieur de la conique. On peut maintenant choisir dans chacun de ces groupes un nombre fini des représentations par le postulat que leurs polaires traversent le domaine fondamental de $\mathfrak{F}$. Cette chose repose sur le fait, que dans le groupe reproductif il y a un sousgroupe cyclique admettant le point $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ comme un point fixe. On peut ordonner ces représentations élues dans une suite telle que chaque représentation détermine d'une manière uniforme la représentation qui la précède et celle qui la suit.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 6.

O NÁZORU A PRIORI V MATEMATICE.

NAPSAL

Prof. Dr. VÁCLAV LÁSKA.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ — EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 6.

O NÁZORU A PRIORI V MATEMATICE.

NAPSAL

Prof. Dr. VÁCLAV LÁSKA.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Prof. Dr. *VÁCLAV LÁSKA:*

O názoru a priori v matematice.[1])

Nechceme-li v axiomech viděti jen výron zkušenosti — můžeme je vždycky ještě přiřaditi k syntetickým soudům a priori. Tím ovšem neodstraňujeme obtíže problémů, nýbrž dáváme jim jen jiné jméno. *Poincaré.*

Moderní kritika nezastavila se ani před matematikou, která byla vždy považována za symbol jistoty. Ukázala se potřeba zkoumati její základy, ve kterých seznány slabiny potřebující vyztužení. Povstala rozsáhlá literatura, která jedná o axiomech a jiných základních větách, na nichž jest vybudována aritmetika a geometrie. Díky úmorné práci badatelů můžeme dnes považovati pojmy matematické za dostatečně ustálené. *Víme nyní, co jest matematika i geometrie.* Tím připravena i půda pro filosofii, aby mohla přistoupiti k probadání problému: *proč matematika jest taková, jaká se nám jeví býti?*

K tomu nutno, abychom především kriticky probadali cesty, jimiž jsme dospěli k matematice a geometrii. Úvahy toho druhu nemají sice pro ryzí matematiku valného významu. Myslící matematik nemůže se jim však vyhnouti, právě tak jako myslící člověk nemůže se ubrániti otázkám: proč jsem, odkud jsem, jaký jest můj životní cíl? Avšak nejen

---

[1]) K následujícím úvahám nalezne čtenář hojně citátů a dokladů ve spisech A. Vossa, zvláště v následujících:

A. Voss: Über das Wesen der Mathematik, 1908.

Týž: Über die mathem. Erkenntniss, v díle »Die Kultur der Gegenwart«, III. 1. 3. 1914.

Vyvolány byly spisem *K. Vorovky* »Úvahy o názoru v matematice«, vydáno Č. Akad. 1917, jehož známost k úplnému porozumění našich úvah jest nezbytna.

matematik-filosof, nýbrž i každý, kdo matematice vyučuje a ji aplikuje, má zájem na podobných úvahách, aby mohl přesně rozlišovati to, co v matematice plyne ze zkušenosti, a co z logického rozumování, a co jest v ní intuice.[2]) Původně jsou zajisté matematické pravdy zidealisovanou zkušeností, ale ve své vědecké dokonalosti představují se jako něco od jsoucna neodvislého, jako jakýsi svět pravd pro sebe.

Proto vnucuje se nám vždy znovu otázka, odkud pochází ona obdivuhodná shoda mezi výpočtem a přírodním děním, jak jest vůbec možno ryze logickou úvahou předvídati přírodní dění?[3]) Odkud pochází onen soulad mezi zákony našeho rozumování a skutečností? A na tuto otázku musíme hledati odpověď. Neboť jak bychom jinak mohli na příklad rozhodnouti, zdali věta o skladu sil jest větou fysikální, t. j. experimentem dokázanou — lhostejno, zda přímo či nepřímo — aneb větou metafysickou, o které byl *Bolzano*[4]) přesvědčen, že ji lze obdržeti cestou výhradně spekulativní; anebo, abych konečně mluvil s *Poincarém,* konvencí, poněvadž jest účelnější říci, že síly skládají se podle geometrického sčítání úseček, než nějak jinak.[5])

Bez takových úvah nelze totiž myslícím posluchačům vyložiti ani základy mechaniky. Jsou to sice otázky filosofické, ale což není konečně každá naše věda vlastně filosofií?

Rozumí se samo sebou, že navzájem otázky toho druhu jsou důležity i pro filosofii, jejíž pokrok, jak dokazuje moderní zkoumání aristotelovské logiky, závisí v netušené míře na pokrocích v matematice, jež jest jedinou spolehlivou cestou k logickému poznávání hyperreálného světa. Tak více a více i mezi filosofy razí sobě cestu přesvědčení, že budoucnost filosofie dlužno hledati v matematice, jejíž netušený vývoj otevřel našemu poznávání v poslední době nedozírné horizonty.[6])

---

[2]) *E. Study:* Das Raumproblem, Jahresbericht der d. Mathematiker-Vereinigung, 1914, str. 322.

[3]) Viz *A. Föppel,* Vorlesungen über technische Mechanik, I., Úvod (1917).

[4]) Versuch einer objektiven Begründung von der Zusammensetzung der Kräfte, Praha 1842.

[5]) Dr. *Schönbaum,* Přehled 1912. H. Poincaré, matematik a filosof. K tomu Bull. de la Soc. Astr. de France 1904, 216.

[6]) »Budoucnost kritické filosofie jest podmíněna jejím poměrem k exaktním vědám. Kdyby se podařilo přetrhnouti pouto mezi filosofií a matematikou, byla by tím i filosofie zbavena svého obsahu a své ceny. Z toho hlediska může býti každý pokus o logické osvětlení a prohloubení základů matematiky jist, že bude s největším zájmem sledován filosofií.« *G. Cassirer* (Kantstudien).

Abychom mohli stanoviti, co jest v matematice logicism, co psychologism a co intuice, uvažujme především o ryzí matematice. Ta představuje se jako ryzí logický systém, založený na určitých axiomatických postulátech. Nutno konstatovati, že logika sama — ať míníme klasickou, nebo algebraickou, či konečně moderní logistiku — nestačí pro vybudování matematiky. Logika nepozoruje, nevynalézá, neobjevuje, nýbrž jen soudí *(Mill)*.[7]) Vedle logiky jest proto zkušenost — založená na studiu jsoucna — nezbytnou složkou matematického poznávání. Zkušenost sama nemůže nám však poskytnouti ryzí pojmy, s jakými operuje čistá matematika; také logika je netvoří. Bez ryzích pojmů není však ryzí věda myslitelna. Za zkušenost děkujeme vjemům. Logika jest věcí rozumu. Most mezi oběma může proto vytvořiti jen intelekt jako orgán syntese, a to jen intuitivně, t. zv. instinktivně, jakýmsi názorem vyššího druhu, který jest sám sebou přesvědčivý a evidentní. Názorem toho druhu — nedokázatelným v systému té které vědy, ale rozumově nutným — jest v aritmetice podle Poincaréa věta o matematické indukci.[8]) Opírajíc se o takový názor zaujímá čistá matematika isolované postavení mezi ostatními exaktními vědami, takže již *Kant* mohl matematiku prohlásiti za nejskvělejší příklad vědy, jež bez pomoci zkušenosti sama ze sebe šťastně se rozšiřuje.

»Také v jiných vědách, na př. v chemii máme sice určité základní poznatky a jasně formulovaná pravidla, ale jejich rozvoj jest dosud možný hlavně jen experimentem; kdybychom se pokusili — jako to v matematice činíme — rozmnožiti na př. naše chemické poznatky výhradně perem a rozumováním, nedošli bychom daleko.«[9]) Že však i pro chemii není podobná cesta neschůdnou, dokazují u nás práce Waldovy.

V aritmetice jest to však možné, neboť její tvůrčí síla jest obsažena ve větě o matematické indukci. To znamená, že tato věta stačí, abychom — vycházejíce z číselné řady

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

dospěli k soustavě matematických pravd cestou výhradně logickou.

Aby vysvětlil, proč princip matematické indukce má onu obdivuhodnou schopnost, považuje *Poincaré* (viz heslo) větu o matematické in-

---

[7]) Srovnej: *L. Koenigsberger,* Jahresb. der deut. Mathem. Verein. 1914. Str. 1. Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft?

[8]) O větě samé srovnej: *M. Pasch:* Veränderliche und Funktionen, 1914, 143. *H. Poincaré,* La Science et l'Hypothèse, r. 1906.

A. Padoa, La Valeur et les rôles du Principe d'Induction. Int. Congress 1913. Cambridge.

[9]) *J. Rosanes:* Jahresb. der d. Math. Vereinigung. 1904. Str. 30.

dukci za syntetický soud a priori;[10]) syntetický proto, že naše vědění rozšiřuje, a a priori, poněvadž jest sice rozumově nutný, ale nedokázatelný. Při tom byl si dobře toho vědom, že »tím neodstraňujeme obtíže problémů, nýbrž dáváme jim jen jiné jméno«. Obtíže ty spočívají jednak v predikátu »syntetický« a potom v interpretaci pojmu »a priori«.

Abychom si to ujasnili, analysujme především jednoduchý matematický soud

$$2 + 3 = 5.$$

Soud ten může býti i syntetickým i analytickým, závisle na tom, jak znaménko + pojímáme. Znamená-li + jen sloučení dvou skupin jednotek v jednu, t. j.

$$(1 + 1) + (1 + 1 + 1) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1),$$

potom dospějeme k uvědomění, čemu se rovná $(1 + 1) + (1 + 1 + 1)$, jen tím, že souhrn $(1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ skutečně spočítáme. V symbolu $2 + 3$ není symbol 5 obsažen, neboť, jak *Kant* praví: »Jest samozřejmo, že ať obracíme symbol $2 + 3$ jak chceme, nikdy, nevezmeme-li ku pomoci názor (počítání), nedospějeme k pojmu 5.« *Kantovi* jest proto věta

$$2 + 3 = 5$$

soudem rozšiřujícím, t. j. syntetickým. Jinak jest však, znamená-li symbol +, že máme postup, jímž jsme v číselné řadě

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

dospěli k číslu 2, opakovati ještě třikráte. Potom symbol $2 + 3$ znamená jen opakování známého postupu, t. j.

$$\overset{\frown\frown}{0, 1, 2,} \underset{\smile\smile\smile}{3, 4, 5,} 6, \ldots,$$

neboť v číselné řadě jest svrchu uvedené počítání uskutečněno

[10]) *Kant* rozdělil kategorické soudy v syntetické a analytické. Syntetickým soudem vypovídáme o definovaném pojmu, že má jistou, v definici neobsaženou vlastnost. Tím pojem A rozšiřujeme o vlastnost Q, takže přechází ve zvětšený $A + Q$. Analytickým soudem zase vypovídáme, že mezi praedikáty $a, b, c, \ldots$, v definici pojmu A již obsaženými, určitý, na př. b se nachází. Tím pojem A rozebíráme, analysujeme a vysvětlujeme. O který z obou soudů v konkrétním případě jde, to závisí na přesnosti definice. Obsahuje-li ona i tu nejmenší, byť i jen subjektivní nejasnost, potom těžko často rozhodnouti, zda předložený soud je analytickým, či syntetickým. Věta »tělesa jsou těžká« jest pro nefysika soudem syntetickým; pro fysika však soudem analytickým, neboť fysikovi jest tíže nutným praedikátem tělesa.

jednou pro vždy uspořádáním číselných značek v číselnou řadu. V symbolu *2 + 3* jest potom symbol 5 obsažen a tím se soud stává soudem analytickým.[11])

Tak interpretujeme dnes symbol 5. *Kant,* vycházeje ve své době ze všeobecně uznávané euklidovské definice čísel jako skupiny jednotek, soudí jinak. Euklidovská definice není však udržitelná. Vždyť ve skupině jednotek

$$1 + 1 + 1 = 3$$

není obsažen vztah symbolu *3* k číselné řadě, kterou počíná teprve aritmetika. Poněvadž vztah ten jest však podle dnešního stavu našeho vědění podstatným praedikátem čísla 3, není euklidovská definice úplná.[12])

Přihlédneme-li k tomu, co bylo uvedeno, vidíme, že uspořádání čísel v řadu číselnou jest syntesou, kterou pojmy: jeden, dva, ... rozšiřujeme v nové: první, druhý ... Slova: prvý, druhý rozšiřují obor našeho vědění o důležité pojmy: seřadění a kladný a záporný směr, které jsou původu názorného. Číselná řada představuje proto názornou syntesu.

Pojem názoru[13]) vyžaduje však ještě bližšího vysvětlení. Slovo »názor« znamená zde »matematický názor«, jak jej poprvé naivně pojal *Pestalozzi.* Idee *Pestalozziho* nalezneme matematicky

---

[11]) Pro čistou matematiku jsou dle *Vossa* (l. c.) čísla značkami seřazování činnosti našeho rozumu.

[12]) Kantovi se ostatně nejednalo o základy matematiky, nýbrž jen o kardinální otázku filosofie: jsou syntetické proudy a priori« vůbec možny? Nejsou-li totiž matematické soudy syntetickými, potom padá celá Kantova kritika intelektu. Zajímavo jest, že novější doba vzkřísila do jisté míry ideály, jež Kant tušil. Jemu byla matematika »die Vernunfterkenntniss aus der Konstruktion der Begriffe«. Na otázku, co znamená pojem sestrojiti, odpovídá: »die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen«. To uskutečnila teorie množin. *Cantor* sestrojuje v ní transfinitní čísla názornou konstrukcí. Jest to jakýsi druh vyššího počítání na prstech, jímž my ona čísla sestrojujeme a vnímáme. Slepému žáku by bylo těžko sledovati jeho vývody, poněvadž nutno — abych se tak vyjádřil — ona čísla názorně viděti. — K uvedenému budiž doporučena četba spisu: *L. Couturat:* Les principes des mathématiques (německý překlad, pořízený *C. Siegelem,* vyšel v Philosophisch-soziologische Bücherei, 7); dodatek. *B. Bolzano,* Beiträge zur ..... Mathematik, Praha, 1810.

[13]) Budeme užívati slova »názor« — na jehož nevhodnost upozornil již *Bolzano* (1810) — abychom zavedením nového pojmenování nezvětšili dosavadní chaos mezi nomenklaturou a pojmy.

správně formulované teprve u *Timerdinga.*[14]) Jemu slovo názor znamená názor spojený s abstrakcí a blíží se tak k pojmu Kantovu. *Kantovi* jest totiž názorem každá představa něčeho určitého, co jen na jediný způsob může býti dáno.[15]) Tedy na př. »trojúhelník«, pokud máme na mysli to, co si všeobecně představujeme při vyslovení slova »trojúhelnk«. U Kanta jest tedy názor pojmem kolektivním. »Ryzí názor« naproti tomu jest mu uvědoměním souřadné formy (časové a prostorové), ve které se nám všeobecné představy presentují. K »ryzímu názoru« dospíváme, když všechno, co má původ v pocitech z vjemů, eliminujeme, takže na konec zbude nám vlastně jen souvislost času a prostoru jako poslední prvek našeho nazírání.

Dodejme k tomu ještě moderní, logickou definici čísel podle *Sigwarta:* »Z uvědomění činností, které se dostavují při každé představě více objektů, vyrůstá počítání a pojem čísla, v němž se uvědomují rozdíly od jednoho aktu k druhému a jich syntesa současně«, a budeme rozuměti Kantovi, jemuž »číslo jest syntesou času a prostoru«. Dlužno podotknouti, že obtíže rozluštění toho, co *Kant* nazývá ryzím názorem, jsou značné. Již sama nejasnost *Kantovy* teorie času a prostoru vyvolala i mezi jeho přívrženci mnohé diskuse.[16]) *Vaihinger* ve svém komentáři kritiky ryzího intelektu referuje o tom s uvedením četné literatury. Podle úsudku *Studyho* mlátila se však ve všech těch spisech jen sláma, neboť žádný z autorů — *Vaihingera* nevyjímaje — nepoznal hlavní kořen zla. Ten tkví v následujícím. Jistojistě lze souhlasiti s *Kantem* v tom, že původ všech poznatků dlužno hledati ve zkušenosti a dále, že vybavujeme si vjemy a jich pozdější představy (Erinnerungsbilder) v určitém a priori daném pořádku. Z toho však neplyne nutně — jak tomu *Kant* chce — že čas a prostor byl by jenom subjektivní, ryzí aprioristickou formou lidského nazírání, neboť jest jisto, že jak času, tak i prostoru přísluší jistá objektivní existence, ovšem zcela jiného rázu než u věcí, které poznáváme v času a prostoru bezprostředně smysly. Krátce řečeno, čas a prostor, podobně jako jiné kategorie bytují

---

[14]) *H. E. Timerding,* Die Erziehung zur Anschauung (zvláště v předmluvě): *W. K. Cliford,* Der Sinn der exakten Wissenschaft. K uvedenému též: *O. Perron,* Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik (Jahresb. der d. Math. Ver. 1911. str. 203.) a co se *Kanta* týče: *Weber-Wellstein,* Encyklopädie der Elementar-Mathematik, I. & II. (1903, 1905).

[15]) Die Vorstellung, die nur durch einen einzigen Gegenstand gegeben werden kann, ist aber eine Anschauung. K tomu však srovnej *Bolzano:* Wiissenschaftslehre I., § 79.

[16]) *Study E.,* Die realistische Weltansicht. Str. 31., poznámka.

nejen intelektuálně, nýbrž i reálně, ovšem jinak než předměty, které jsou přímo dostupné smyslovým vjemům.

Od *Kanta* můžeme ihned přejíti k *Poincarému,* u kterého ryzím názorem aritmetiky jest věta o matematické indukci. Abychom si její účinnost náležitě objasniti, mysleme si vědu definovanou řadou logických soudů

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots\ \text{in inf.},$$

tak seřazených, že každý následující jest n u t n ě a d o s t a t e č n ě podmíněn předcházejícími a všechny jsou důsledkem soudu a_0, jejž nazveme axiomem, anebo vystižněji axiomatickým postulátem. Potom d ů k a z správnosti soudu a_n provádíme redukcí na axiomatický soud a_0, t. j. sestrojením řetězu analytických soudů

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ a_0.$$[17])

To jest jedině oprávněný postup. Podobně vymáhá důkaz správnosti soudu a_{n+1} konstrukci řetězu

$$a_{n+1},\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots\ a_2,\ a_1,\ a_0,$$

který vykazuje vůči předešlému jen novum

$$a_{n+1},\ a_n.$$

To platí očividně pro veškerá n. K soudu a_{n+1} dospíváme však původně vždy indukcí, neboť rozšíření našich vědomostí jest možné jenom syntesou. Máme-li tedy větou a_{n+1} znamenati rozšíření věty a_n, musíme předpokládati existenci syntetické vazby $\overset{\frown}{a_n\ a_{n+1}}$. V důsledku toho analytický řetěz dedukce

$$a_{n+1},\ a_n\ \ a_{n-1},\ \ldots\ a_2.\ a_1,\ a_0,$$

skládá se vlastně ze syntetického řetězu i n v e n č n í i n d u k c e

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1},$$

---

[17]) Chceme-li na př. v číselné řadě dokázati větu

$$(n)+3=(n+3),$$

kde závorka charakterisuje číslo, postupujeme takto:

$$(n+3)=(n+2)+1 \text{ ex definitione},$$
$$(n+2)=(n+1)+1 \text{ ex definitione},$$
$$(n+1)=(n)+1 \quad \text{ ex definitione},$$

z čehož plyne

$$(n+3)=(n)+3.$$

neboť kdyby tomu tak nebylo, bylo by naše vědění očividně jen velkou tautologií. Aritmetice stačí úplně jeden takový soud[18])

$$\widehat{a_n,\ a_{n+1}},$$

představený větou o matematické indukci, jež platí i pro nekonečno. Soud $\widehat{a_n\ a_{n+1}}$ nahradí nám nekonečné množství analytických řetězů

$$a_{n+1},\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots\ .\ a_2,\ a_1,\ a_0,$$

pomocí nichž mohla by se jedině věda — byť i formálně — rozšiřovati, kdyby neexistovaly syntetické soudy $\widehat{a_n\, a_{n+1}}$. Pro $n = \infty$ nelze analytický řetěz přímo sestrojiti, tam přestává tedy přímá evidence.[19]) Soud $\widehat{a_n\, a_{n+1}}$ jest však pro $n = \infty$ v aritmetice něčím — abych tak řekl — názorným, něčím, co se intuitivně samo sebou podává, ale zároveň nutným axiomatickým postulátem. Proto mohl Poincaré větu o matematické indukci prohlásiti za jakýsi druh názoru a priori, za větu, jejíž přesvědčivá a důkazná síla jest již obsažena v ní samé.

Činíme-li rozdíl mezi r o z u m e m (Verstand) jako orgánem analysy a mezi i n t e l e k t e m (Vernunft ve smyslu *J. F. Friese*) jako orgánem syntesy, potom jest samozřejmě syntetický soud aprioristický věcí intelektu.[20]) Predikát »a p r i o r i« charakterisuje tudíž soudy (principy, věty atd.) nedokázatelné sice v systému té které vědy, ale instinktivně a evidentně nutné, které každý člověk jako správné »per se« aplikuje a apli-

---

18) V číselné řadě se soud

$$\widehat{a_x\ a_{x+1}}$$

představuje asi následovně: Předpokládejme platnost věty

$$(n) + x = (n + x),$$

kde x jest skupinou jednotek a (n) n-tým číslem řady

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots$$

Přidáme-li ve svrchu uvedené rovnici oboustranně jednotku, bude

$$(n) + x + 1 = (n + x) + 1.$$

Ale ex definitione

$$(n + x) + 1 = (n + x + 1),$$

ergo

$$(n) + \overline{x + 1} = (n + x + 1).$$

Platí-li věta ta pro x, platí i pro x + 1.

19) Připomenut budiž výrok *Kanta:* Wo die Vernunft vorher nichts verbunden hat, kann auch der Verstand nichts aufösen.

20) Zajímavo jest, že původně již *M. Cusa* (zemřel r. 1464), kterým počíná obrození filosofie, shledal v s e n s u a r a t i o n e prvé dvě složky podmiňující sice exaktní rozumování, ale neschopné stvořiti filosofický systém, obsahující abstraktno a nekonečno. K tomu jest nutný i n t e l l e k t u s.

kovati musí, aby bylo rozumování vůbec možné. Za takovou složku našeho filosofování lze na př. považovati princip kausality.[21])

Názorem a priori nazveme proto onu základní nutnou hypotesu,[22]) ke které jsme vedeni při budování nějaké vědy instinktivně a intuitivně, která je však nedokázatelná v systému vědy samé. Tak nemůže na př. princip matematické indukce býti dokázán v systému aritmetiky. Tím není ovšem vyloučena možnost důkazu vůbec. Představme si na př., že číselná řada jest jen zjednodušeným případem všeobecnějšího systému Ω teorie množin. Potom může se státi, že názor a priori, potřebný k vybudování aritmetiky, vybaví se v dokázatelnou větu uvažovaného systému Ω. Tím padá i jeho noetická záhada. Proto také představuje názor a priori vlastně jakousi dočasnou, rozumově nutnou konvenci.[23]) V tom smyslu bývá pojímán zejména v novější době, která syntetické soudy a priori vůbec považuje za konvence. Uvážíme-li však, že matematika a geometrie se vyvinuly z naivního názoru, nemůžeme alespoň názoru a priori — pojatému v širším a tudíž ne jen v aritmetice platném toho slova smyslu — upříti jistou psychologickou oprávněnost, podobně jako principu kausality, který také někdy bývá prohlašován za konvenci.

Naše dosavadní úvahy vztahovaly se hlavně k rozboru pojmu »názor a priori«. Předložme si nyní otázku: odkud se béře to, co jest příčinou jeho síly a všeobecnosti. Odpověď na předloženou otázku, která jest zároveň vysvětlením noetické záhady názoru a priori, není snadná. Zdá se mi však, že nebude vysvětlení daleko od principu isotypie, který lze formulovati větou: rozumujeme a soudíme vždy tak, aby risiko našeho rozumování bylo co možná nejmenší.[24])

---

[21]) Podle *Kanta* neexistuje mezi příčinou a faktem logicky vysvětlitelný vztah, též zkušenost ukazuje vždy jen co a jak, ale nikdy proč. Uvědomění kausality není tedy ani důsledkem logických úvah, ani názorné zkušenosti, nýbrž povstává uvědoměním nutného určitého pořadí vjemů. Kausalita je proto sama sebou (t. j. aprioristicky) podávající se asociace, tedy názorem a priori.

[22]) To značí, že každá uznaná věta v dotyčné vědě platí nutně i dostačitelně za předpokladu názoru a priori.

[23]) *H. Dingler,* Jahresbericht der deutsch. Mathem. Ver. 1908. Str. 267. a *C. Hessenberg,* tamtéž str. 159.

[24]) V tvaru variačních principů lze princip isotypie následovně psáti:

$$\text{Buďtež } X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots \infty$$

možné hypothesy pravdy X_0 a předpokládejme, že jejich pravděpodobnosti (nekonečně malé) lze měřiti differenciály

$$df_1, df_2, \ldots df_n \ldots ;$$

Jsme-li nuceni voliti cestu a priori, volíme instinktivně nejjednodušší a tou jest isotypická, která zachovává typ a směr našeho předcházejícího myšlení tak dlouho, dokud nejsme donuceni k jinému postupu. V principu isotypie jest obsažena »přímá cesta« ve smyslu *Hilberta,* princip »der einfachsten Naturerklärung« *F. Kleina,* princip »Minimum der Denkfreiheit« *Vossa* a »jednoduchost a zákon úměry« *H. Poincarého.*[25]) Princip isotypie možno považovati

---

budiž dále $F(X_K - X_0)$ kladnou funkcí rychle rostoucí, a která zároveň vyhovuje rovnici

$$\Sigma\, F\,(X_K - X_0)\, df_K = \min.$$

Potom za předpokladu isotypie

$$df_1 = df_2 = df_3 = \ldots\ldots = df_n,$$

lze princip ten psáti ve formě variační

$$\delta \int F\,(X - X_0)\, df = O$$

[25]) *Hilbert:* Göttinger Nachricht. 1916. — *Klein:* Anwendung der Differencial- und Integralrechnung auf Geometrie, 1907, str. 43. — *Voss:* Über die math. Erkenntniss, str. 104. — *Poincaré:* La Science et l' Hypothèse (rněm. překlad str. 177.). Tamtéž čteme na str. 148. toto: »Mnoho jevů řídí se zákonem úměry; proč tak činí? Proto, poněvadž v nich něco jest, co je velmi malé. Zákon úměry není proto ničím jiným než transkripcí analytického zákona, podle něhož malým přírůstkům argumentu odpovídá i malý přírůstek funkce. Poněvadž ve skutečnosti neexistují infinitesimálně malé, nýbrž jen malé veličiny, platí uvedený zákon approximativně.« — Zákon ten vyslovil *Aristoteles* větou, že příroda nečiní skoků. Nazývá se též principem Leibnizovým a zní »malým variacím příčin odpovídají i malé variace následků«. Srovnej *Chasles-Sohncke,* Geschichte der Geometrie, str. 379.

Že princip Leibnizův (datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata) není vždy platným světovým zákonem, dokazuje novější fysika (*Planck*). Ostatně možno to lehce dokázati. Lze-li v rovnici

$$f\,(x + \delta) - f\,(x) = \delta\, f'\,(x)$$

považovati $f'(x)$ za veličinu stálou, bude

$$\Sigma\,\{f\,(x + \delta) - f\,(x)\} = f'\,(x)\ \Sigma\, \delta_K.$$

Tam kde veličiny δ_K seskupují se v kolektivum normované rovnicí

$$\Sigma\, \delta_K = O,$$

kde totiž mají charakter nahodilých chyb klasické teorie, platí i rovnice

$$\sum_1^n f\,(x + \delta_K) - nf\,(x) = O,$$

z čehož

$$f\,(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n f\,(x + \delta_K).$$

Tudíž jen v tomto případě jest funkce $f(x)$ určitelná. Naše přírodní zákony, pokud vyhovují principu kontinuity, vyhovují i principu Leibnizovu. Zároveň vidíme, jakou základní roli hraje zákon náhody v přírodě. — Viz *Smoluchowski,* Die Naturwiss., 1918. *R. Fürth:* Phys. Zeitschr. 1919.

za jakousi schopnost rozumovati co nejekonomičtěji vrozenou nám dlouhodobou zkušeností.

Máme-li na př. řadu náležitě pozorovaných hodnot x_K a nic více, bude risiko nejmenší, uznáme-li každou z nich za rovnocenného svědka pravdy. Matematicky lze to vyjádřiti systémem rovnic

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ x &= x_2 \\ &\vdots \\ x &= x_n \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

Princip isotypie vyzní pak syntesou ve větu

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \qquad \text{II.}$$

Že při tom vyhověno jest postulátu, aby risiko našeho rozumování bylo co nejmenší, dokazuje se v počtu pravděpodobnosti. Věta II. jest tak »názorem a priori« klasické teorie chyb; neplatí však všeobecně, nýbrž jen pro chyby normované zákony matematické náhody.

Princip isotypie platí ovšem jen pro vědy, které jsme stvořili podle míry jsoucna. Tak vede na př. k euklidovské geometrii. *Hamel* vyložil to pěkně slovy: »Mohu si neeuklidovskou geometrii představiti jako matematik, jsem dokonce přesvědčen o její logické existenci, ale v názoru bytuje pro mne jen geometrie euklidovská, neboť si nedovedu názorně představiti, že by nebylo možné sestrojiti k danému trojúhelníku podobný, nebo že by křivka stejně vzdálená od přímky nebyla přímkou.«

I ve větě o matematické indukci máme něco podobného, neboť — předpokládajíce její všeobecnou platnost — měříme mírou z n na $n+1$ stejně konečno jako nekonečno, podobně jako v euklidovské geometrii, kde vzdálenost přímek v nekonečnu považujeme za stejnou s onou v konečnu.

Zároveň jest evidentní isotypická povaha názoru a priori. Může-li dále v nekonečnu býti neznámá veličina stejně větší jako menší, jest očividně soud, že jest kvalitativně stejná s onou v konečnu, soudem nejmenšího risika.

Zda-li isotypický názor a priori nevede v konkrétních případech k nepřijatelným důsledkům, to nelze samozřejmě předem věděti. Proto mohou věty, jež zrodil isotypický názor, uzříti denní světlo teprve potom, když prošly ohněm logiky a zkušenosti. Tak jest — abychom užili slov *Vossa* — logika vlastně jenom kmotrou, kdežto matkou je názor, ale křest

ohněm logiky a zkušenosti je nezbytný.[26]) Názor a priori jest filosofickým slohem logického systému matematiky a proto něčím, co volíme svobodně, ale ovšem i účelně. Do jakého stupně jest jím vystiženo jsoucno, o tom nás může poučiti jen užitá matematika.

Neboť »ani logika, ani filosofie, ani metafysika nerozhodují v poslední instanci o tom, co jest pravdou, nýbrž čin. Co nás vede k správným činům, nazýváme pravdou. Neboť kdybychom nedospěli k praktickým výsledkům, nevěděli bychom, jak správně rozumovati. Jen soudy, jež se v praksi osvědčují, jsou správné. Nám se ovšem zdá, že logické metody, vyzkoušené během tisíců let našimi předky a nám sdělené, jsou a priori správné. Přes to musíme je čas od času činem zjistiti.«[27])

L'intuition à priori en mathématique.

La mathématique, bien qu'elle soit incontestablement sortie de l'expérience, constitue, dans sa perfection actuelle, un monde qui se suffit à lui-même c'est-à-dire un système logique indépendant de la réalité. La coïncidence entre le calcul et les phénomènes est cependant telle, que nous sommes forcés de supposer une harmonie préétablie entre le monde des déductions mathématiques et le monde de l'expérience. Mais une telle hypothèse fait reculer le problème sans le résoudre. Poincaré s'efforce de le résoudre, du moins à propos de la question des nombres, par l'intuition à priori. Comme Poincaré n'a fait qu'esquisser ce problème, Vorovka a essayé de trouver la solution en s'appuyant sur le psychologisme. L'auteur tente d'expliquer l'efficacité du concept d'intuition par le principe d'»isotypie« d'aprés lequel nous raisonnons, et nous jugeons toujours de telle sorte, que le risque de notre raisonnement soit réduit au minimum. De cette manière le difficile concept de l'intuition à priori est traduit dans une formule, dont on peut contrôler les conséquences, de sorte que devient possible de vérifier exactement la légitimité de l'emploi de ce concept en mathématiques.

---

[26]) Srovnej: *O. Perron*, Über Wahrheit und Irrtum in der Mathem. — Jahresbericht der d. Mathemat. Verein. 1911.

[27]) *L. Boltzmann*, Populäre Schriften, 1905.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 7.

ANATOMIE OČÍ NAŠICH TRICLAD.

(PLANARIA GONOCEPHALA A VITTA.)

S 2 TABULKAMI.

NAPSAL

Dr. JAROSLAV HAHN.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 7.

ANATOMIE OČÍ NAŠICH TRICLAD.

(PLANARIA GONOCEPHALA A VITTA.)

S 2 TABULKAMI.

NAPSAL

Dr. JAROSLAV HAHN.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Anatomie očí našich Triclad.

(Planaria gonocephala a vitta.)

S 2 tabulkami.

Napsal Dr. Jar. Hahn.

Planaria gonocephala (tab. I.) naše velmi hojná ploštěnka, vyskytuje se spolu s blešivcem v studených vodách; nejčastěji nalezneme ji pod kameny v šeru, neboť jest fotofobní, nemiluje prudkého osvětlení a vždy co nejrychleji snaží se uniknouti do tmy před dráždivým světlem. Intensitu světelnou vnímá zvláštními orgány umístěnými na přídě těla, párem očí, které již oku neozbrojenému jsou patrny jako bílé skvrnky, ohraničené na straně vnitřní a poněkud vzadu pigmentovými buňkami. Kromě očí i celý povrch těla je fotosensibilní, jak se můžeme přesvědčiti na dekapitovaných *Planariích,* ale reakce na světlo není již tak rychlá a spontanní jako u *Planarií* vidoucích. Oči umístěny jsou na přídě těla po obou stranách osy mediální, jsouce vzdáleny od kraje těla 0·308 *mm,* mezi sebou pak 0·528 *mm* (Ude). Mohou býti vtaženy silnou svalovinou hlouběji do těla, normálně však leží v parenchymu těsně pod dorsální stěnou tělní. *Planarie* může oči poněkud i stáčeti jednostranným stahováním svalů, takže tím se mění úhel, který svírá optická osa oka s podélnou osou tělní (přibližně úhel 45°). Optická osa směřuje šikmo do předu a vzhůru.

Na oku můžeme rozeznati: 1. Pigmentový pohárek, 2. vlastní elementy percepční, 3. apparát světlolomný, 4. nerv optický.

1. Pigmentový pohárek je ve směru optické osy otevřený a slouží jako isolator, v němž jednak část paprsků se pohlcuje, jednak odráží. Vnitřní stěna v místě proti očnímu otvoru je často vypouklá. Je ovšem otázka, je-li vydutí toto původním, či děje-li se tak jen vlivem fixace. Uvážíme-li však, že oko *Planarie* je obklopeno silnými svaly tělními (dorsoventrálními) a parenchymovým pletivem, které se silně fixací smršťují, přijdeme k názoru, že tvar oka na fixovaných praeparátech v definitivní

podobě je výsledkem konservace (srovnej obr. 1. a 2.)*) Proto používáme-li různých tekutin, dostáváme různý tvar pohárku očního (dobře se osvědčila fixace chrom-octo-formol), který za živa, pokud ovšem můžeme vyšetřiti, má tvar koule zkrácené ve směru optické osy.

Pohárek je složen z velikého počtu buněk, asi 150, jichž jádra leží na zevní straně v úzkém pruhu plasmy chudé pigmentem. Blány buněčné jsou nezřetelné. Pigmentová zrnéčka v silné vrstvě jsou černá, proto pohárek na živých *Planariích* tvoří tmavou linii kolem jasného dvůrku, na řezech pak jsou hnědá. V obojím případě však pigment prosvítá v zatemnělém poli červeno-hnědě. Zrnéčka jsou stejně veliká, jak se již Jänichen zmiňuje proti názoru Carrièrovu.

2. Vlastní elementy zrakové jsou uloženy uvnitř pohárku. Srovnáváme-li vyobrazení oka *Planarie gonocephaly* v různých pracích, překvapí nás dvě věci. Obrázky totiž nápadně se liší za prvé počtem, za druhé tvarem zrakových elementů. Není možno si mysleti, že by dva autoři tak rozdílně viděli a posuzovali týž předmět, že tedy není zde chyba v pozorování, nýbrž že popsané zjevy odpovídají skutečnosti. Není totiž myslitelno, aby na př. Jänichen viděl v pohárku 25 zrakových elementů a Hesse naopak napočítal jich 150—200, kdyby v pravdě tomu tak nebylo. Tato nápadná a veliká různost v počtu, kromě toho vyobrazení Weniga a jiných vyvolala samozřejmě otázku, co jest příčinou, že některé *Planarie* mají oči tak chudé na vlastní útvary fotosensibilní, jiná individua téhož druhu pak pohárek oční přímo přecpaný zrakovými paličkami. Poněvadž jsou to elementy dráždivé na světlo, je nejpravděpodobnější názor, že světlo jest tu pravou příčinou. Wenig již narazil na tuto otázku a pokusiv se experimentálně ji rozřešiti dospěl k názoru, že ačkoli nedají se zcela přesně vytknouti hranice vlivu intesivního světla, obyčejného světla a úplné tmy, přec dospíváme po častějších střídavých pokusech k přesvědčení, že rozestavení zrakových elementů v očích *Planarií* naprosto není konstantní, že to nejsou elementy nehybné a ztrnulé, nýbrž schopné měniti svou polohu.

Na základě vlastních pokusů, při nichž bohužel nemohl jsem použíti přímého světla slunečního, poněvadž pokusy byly dělány v zimě, musel jsem se tedy omeziti na světlo elektrické, které co do intensity a chemických účinků (žárové světlo je poměrně chudé na ultrafialové paprsky) daleko zůstává za přímou insolací, dospěl jsem k výsledku:

*) Pohárek na obr. 2. je velmi silně deformován, poněvadž v tomto případě zrakové elementy nevyplňují jej úplně a tedy neantogonují tak proti zevnímu tlaku.

a) *Tvar zrakových elementů se nemění světlem.*

b) *Množství zrakových paliček je nepřímo závislé na intensitě světelné, resp. na délce působení zdroje téže intensity, tedy čím déle světlo působí, tím více se počet zrakových elementů zmenšuje.*

Abych nemusel vždy pracně počítati paličky celého oka, vzal jsem za základ počet v nejširším průřezu oka (na řezech příčných), při čemž bral jsem průměr z několika individuí. Vzal jsem 25 *Planarií* chovaných v basenu za týchž okolností tepelných a hlavně světelných (byly v silném šeru) a z nich jsem některé fixoval hned, abych měl materiál k srovnávání, a ostatní byly nepřetržitě osvětlovány mléčnou žárovkou 50svíčkovou ve vzdálenosti 25 *cm*. Osvětlené planarie byly pak fixovány po 11, 30 a 80 hodinách.

Výsledek byl:	*Planarie*	neosvětlená:	40 paliček
	11 hod.	osvětlená:	28 „ *)
	30 „	„	23 „
	80 „	„	20 „

Redukce zrakových paliček je poměrně rychlá a sice hlavně na počátku, tak po 11 hodinách osvětlení vymizelo 12 zrakových elementů, po 80 hodinách však již jen 8. Pravděpodobně k další redukci by již nedošlo, nebo již jen malý počet paliček by zmizel, poněvadž nastala rovnováha mezi intensitou osvětlení a percepčními elementy. Můžeme si totiž představiti, že zrakový nerv je zařízen na vedení podráždění určité intensity a proto jestliže je silněji drážděn, redukují se přijímací elementy, až zas intensita dráždění rovná se onomu stálému indexu. Jestliže bychom tedy užili silného zdroje světelného, zrakové paličky by se opět redukovaly co do počtu, až by zas byla získána rovnováha (funkcionellní přizpůsobení). Proto čím více se blížíme stavu rovnovážnému, tím pomaleji mizí zrakové elementy.

Obdobou redukce očí, resp. zrakových elementů, působením intensívního světla je pokus B e r n i n g e r ů v, který hladem (ale jen u *Planarií* ve tmě) během 7—8 měsíců docílil úplné redukce očí. Pohárek nejprve se rozdělil, pigment se rozpadl a konečně i paličky a nerv zmizely. Ponechal-li *Planarie* na světle, oči nemizely, ježto to byl orgán fungující, a teprve ve tmě, kdy staly se zbytečnými, nastala jich atrofie na účet ostatní činnosti životní.

Ačkoli tedy pokus B e r n i n g e r ů v je jaksi protichůdný pokusům našim, přec mají společno to, že tehdy, kdy určitý orgán stává se úplně

---

*) Paličky v osvětleném oku (obr. 2.) nedotýkají se navzájem jako v oku chovaném v šeru, jsou mezi nimi prostory za živa pravděpodobně vyplněné zvláštní hmotou, která i v oku normálním se uvádí. Některé paličky jsou jakoby rozleptány.

zbytečným, nebo nadbytečně komplikovaným, dochází k jeho redukci buď úplně nebo jen částečně.

Ovšem Lang (1912) uvádí, že redukce očí nastala i na diffusním světle slunečním (pracoval s *Planariemi* regenerujícími, které nepřijímaly potravu) a vykládá zjev ten hladověním. Pigment oční při tom putoval do střeva a tam byl ztráven. Staví se tak proti Stevens-ovi a O'Niel, kteří tvrdí, že pigment ve střevu je novotvarem. Je ovšem otázkou, zda k redukci došlo následkem hladovění, či vlivem slunečního světla a jest proto nutno celou věc podrobiti revisi. Během léta hodlám věnovati pozornost celé věci a pokračovati v pokusech o vlivu světla a hladovění na oči *Planarii* a hlavně na elementy zrakové.

Našimi pokusy tedy docházíme k zdánlivě absurdnímu závěru, že totiž nejen tma působí redukci očí (na př. u *Proteus anguineus),* nýbrž že i světlo v určitých případech má týž vliv. Domyslíme-li tento zjev do důsledku, musíme přiznati, že při použití světla určité intensity a při dostatečné délce působení docílili bychom úplného zániku očí, resp. elementů světločivných, tehdy totiž, kdy dráždění samotného nervu dostoupilo by téže intensity jako v případě normálním, kdy jsou přítomny paličky zrakové.

Tma i světlo tedy působí dvojím způsobem na zrakové orgány, jednak positivně, jednak negativně. Zvyknou-li si totiž zvířata původně na světle žijící na prostředí temné, tu buď oči jejich vymizí, poněvadž jich nepotřebují *(Macarát, Slepec slovanský),* to je vliv negativní, nebo naopak jejich zrakové orgány se zdokonalí do té míry, že dovedou využíti i slabých záblesků světelných (ryby hlubinné), vliv positivní. Podobně působí světlo. Buď vede k zdokonalení očí, anebo k jejich redukci, jestliže totiž oči jsou zařízeny na využití velmi malé intensity světelné *(Planarie).*

Pozorujeme-li normální oko neosvětlené *Planarie* tu seznáme, že zrakové paličky nejsou uloženy nahodile, nýbrž že jsou uspořádány v 5—6 vrstvách rovnoběžných se stěnami pigmentového pohárku. Je zde tedy jaksi několik sítnic uspořádaných koncentricky. Již z tohoto uspořádání můžeme souditi, že vidění *Planarii* je ještě jednoduché, že v oku netvoří se obrázek okolí, nýbrž že je to prostý orgán k rozeznávání světla a stínu.

V rozvrstvení sítnic mohli bychom snad viděti zvláštní způsob akkomodace oka. Předpokládáme však zde dvě oči, za prvé, že v oku *Planarii* nevytvořuje se obrázek okolí, za druhé, že shluk buněk před otvorem očním, o němž ještě se zmíníme, funguje jako světlolomný apparát, třebas ještě nedokonalý. — Víme, že k zaostření obrázku na sítnici u různých druhů očí slouží rozmanitá zařízení, tak u člověka mění

se křivost čočky, u ryb pak se čočka přibližuje nebo vzdaluje od sítnice. U *Planarie* však, dle našeho předpokladu, netýkala by se akkomodace ostrosti obrázku, nýbrž jen maxima dráždění. — Vzdálenost předmětu vysílajícího světelné vlny od čočky se mění, ale recepční elementy zrakové mají konstantní polohu. Jsou pak nejvíce drážděny, když příslušný světelný bod nalézá se v určité vzdálenosti od oka. Tedy každý percepční element je zařízen na určitou vzdálenost, v níž se musí bod nalézati, aby dráždil tuto zrakovou paličku maximálně. Rozvrstvením sítnic je pak docíleno, že zona v níž bod musí se nalézati, aby působil na některé elementy maximálně, je značně rozsáhlá. Blíží-li se v této zoně světelný bod oku, přeskakuje maximální dráždění z vrstvy paliček, které jsou světlolomnému apparátu nejbližší, na vrstvy stále vzdálenější, až bod nejbližší oku (v oné zoně) dráždí zrakové elementy těsně přiléhající k pigmentovému pohárku.

Jak již řečeno, všechno svědčí pro to, že *Planarie* prostě rozeznávají jen světlo a stín, nevidí tudíž obrázek, nýbrž oko signalisuje pouze intensitu a směr paprsků světelných, neboť je poměrně ještě velmi primitívní, nedokonalý je rovněž světlolomný apparát.

Svému účelu, totiž rozeznávati různou intensitu světelnou, vyhovují jistě velmi dobře. Především mějme na mysli, že *Planarie* žijí v šeru pod kameny a proto jejich elementy čivné jsou uspořádány ve vrstvách za sebou, aby při sebe slabší intensitě světelné co nejvíce zrakových elementů bylo podrážděno. Paprsek světelný prochází všemi vrstvami drážde příslušné paličky, na stěně pigmentového pohárku se pak částečně pohlcuje, ale částečně odráždí zpět, takže dráždí ještě další paličky. Summace podráždění dává pak vědomí intensity světla. Těžko ovšem můžeme se přesvědčiti o odrazu na stěně pohárku, ale můžeme tak souditi per analogiam, neboť u dokonalejších očí k reflexi dochází a pak je přirozeno, že prostředí určitě světlolomné, podložené černou látkou, působí jako zrcadlo.

Pokud si všímáme tvaru zrakových paliček, zaráží nás u různých autorů veliká rozmanitost formy. Jinak kreslí a popisuje je Hesse, jinak Jänichen, jinak Wenig a sice i pokud se týče zevního tvaru i pokud jde o vnitřní strukturu. Máme-li na mysli jen část uzavřenou v pigmentovém pohárku, můžeme rozeznávati: Nerv, který ponenáhlu přechází v rozšířenou část, jakýsi krček, a konečně vějířovitou čepičku.

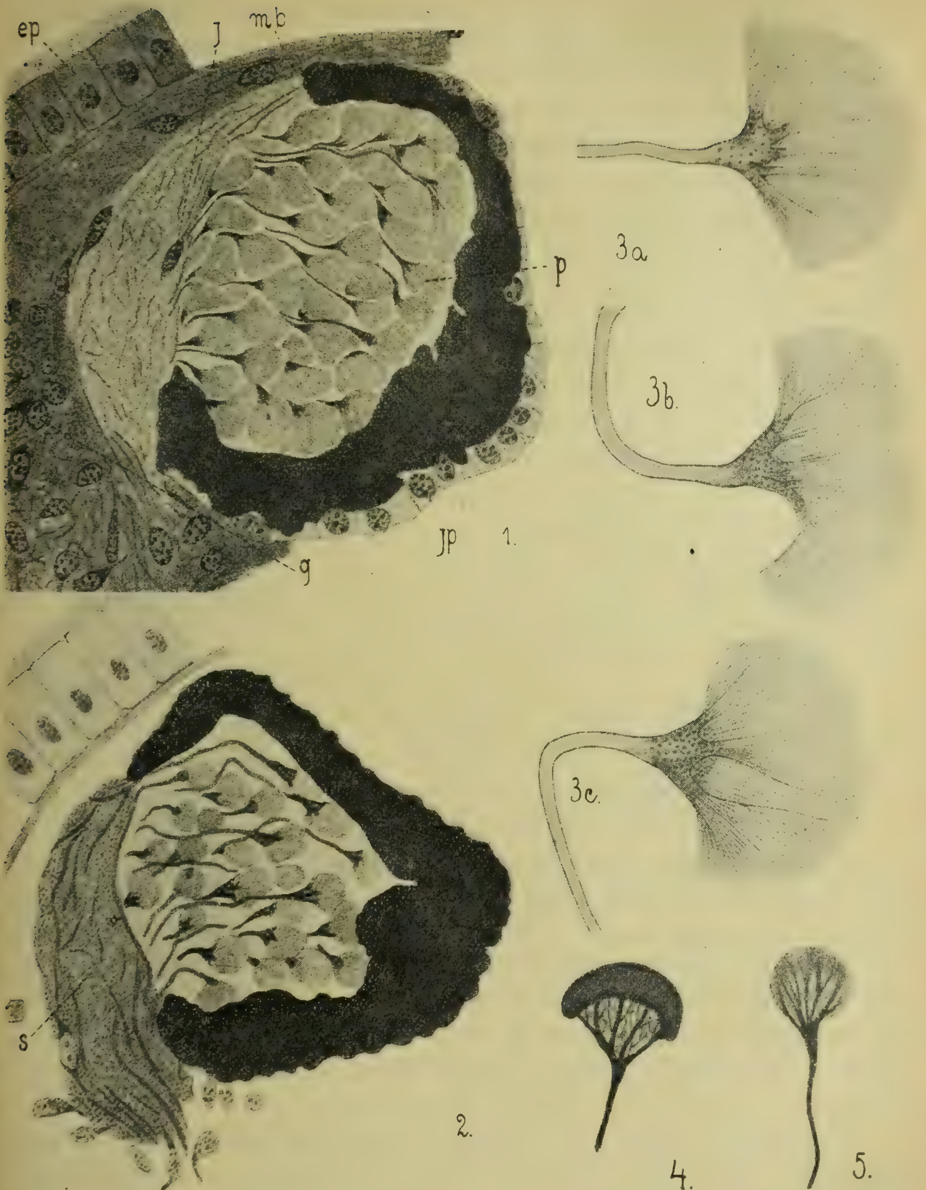
Hesse kreslí zrakovou paličku jako vějířovitě rozšířený konec nervu, v němž jsou patrny nervové fibrilly přecházející na distálním konci v zrakové čípky (sesílené to fibrilly). Vyobrazení Jänichenova činí dojem útvarů rozleptaných a také se mu činí výtka, že užíval macerace kyselinou solnou (ač fixoval i normálními tekutinami konservač-

nimi). Rozeznává: 1. Stvol, resp. nerv, který se skládá z obalu a středního vlákna, 2. krček, v němž se střední vlákno rozvětvuje a tím roztahuje i obal. V krčku tomto nalezl zduřeninu, která vypadala jako jádro. 3. »Kolbenplatte«, na jejímž distálním kraji jsou malé zoubky, které slouží k pevnějšímu přilnutí zrakových paliček. Sama »Kolbenplatte« složena je ze tří částí. Tmavší přiléhá těsně k části krčkovité (Haube), pak následuje jasnější vláknitá část (Zwischenstück) a ta je zase pokryta tmavší zrnitou plasmou (vlastní Kolbenplatte). Silnější vlákna, vycházející z krčku, prostupují prvními dvěmi částmi a sahají až k tmavší plasmě zrnité. Poznamenává, že v některých paličkách se tato struktura neobjevila. Na obrázcích Wenigových můžeme též rozeznati nerv, krček a vlastní čepičku. Celkem stotožňuje se s Hessem, avšak na místě jeho čípků kreslí řídký hřebínek, zuby obrácený ke krčku. Též Ude ve formě paliček srovnává se s Hessem. Tvar jejich je trychtýřovitý s úzkou zonou čípků. Čípky uloženy jsou v homogenní základní hmotě. Na rozdíl od Hesseho zakresluje však další detaily. Neurofibrilla v paličce přechází v »basální část čípku« (Wurzelstück) v podobě malého zrníčka, které vláknem je spojeno s podobným útvarem (inneres Stück des Sehstiftchen), na nějž pak nasedá vlastní čípek.

Je nyní otázka, zda mýlili se autoři, když tak různě popisovali zrakové elementy, nebo skutečně existuje taková rozmanitost paliček zrakových. Odvažuji se odpověděti záporně na obě možnosti. Nikoli, nemýlili se, ale de facto neexistuje taková morfologická různost paliček. Jedinou příčinou jest fixace, a sice nejen používání různých tekutin, nýbrž i délka působení jedné a téže fixace. Na svých praeparátech podle toho zjistil jsem případy, které úplně korespondovaly s obrázky jak Jänichenovými (používal jsem sublimat-octové), tak i Hesseho, vystupovala vrstevnatost paliček i anastomose silnějších větví (Jänichen), ale neviděl jsem nikdy tak zřetelných čípků, jak je kreslí Hesse, třeba jsem užíval sublimatu a Heidenhainova haematoxylinu (již Wenig se o tom zmiňuje). Na obr. 4. a 5. jsou nakresleny různé tvary paliček. Nejčastěji zrakový element vypadá jak zachycuje obr. 5. (Schneider ve své Histologii zakresluje úplně totožný obrázek.)

Poněvadž tedy nemohl jsem si získati přesné představy o tvaru zrakových elementů na materiálu fixovaném, zkoumal jsem oči *Planarii* za živa ve fysiologickém roztoku. Oko bylo opatrně vypraeparováno a pak jemnými jehlami roztrženo. Jak vypadají zrakové paličky za živa, ukazuje obr. 3 *a. b. c.* Nerv, na němž nepozoroval jsem obalu ani osního vlákna, silně se leskne a v pohárku pigmentovém se kyjovitě rozšiřuje. Z rozšířeniny vybíhá pak několik větví, které někdy vysílají vedlejší větve, ty pak nesou na konci chvost jemných vláknének, takže celek vy-

Tabulka I.



Planaria gonocephala: 1. Normální oko (ok. 5. obj. 8a). 2. Oko 11 hodin osvětlené (ok. 4. obj. 8a). 3. Zrakové paličky ve fysiologickém roztoku. 4., 5. Zrakové paličky fixované subl.-octovou po různou dobu a barvené Heidenhainovým haematoxylinem.

g = gangliová buňka, *j* = centrální jádro, *jp* = jádro pigmentové buňky, *ep* = epidermis, *mb* = membrana basilaris, *p* = palička zraková, *S* = světlolomný apparát, *n* = nervová soustava, *a* = oko accesorní.

padá jako chochol vějířovitě rozestřený. Z každé větve vybíhá tedy chvost samostatný, což někdy jde tak daleko, že jedno vlákno nervové nese na konci těsně vedle sebe dvě štětičky, po případě celý chvost vypadá jako smeták. Pravděpodobně oddělují se jednotlivé chvosty tlakem krycího sklíčka, neboť případy ty jsou celkem vzácné. Na krčkové části, kde nerv je zduřelý, jsou patrna malá tmavá zrnéčka. Na konci vlákének, přes to, že jsem používal hom. immerse $^1/_{12}$ i kompensačních okulárů, nezjistil jsem žádného stluštění nebo odchylnou lomnost, která by poukazovala na přítomnost Hesseho čípků, nechci však naprosto tvrdit, že by zde podobné útvary nemohly existovati. Avšak ani prohlížení v zatemnělém poli nedalo positivního výsledku, vždy zraková palička vypadala jako štětička, podobala se trochu zrakovým elementům *Helix pomatia*, jak je kreslí Hesse. Jednotlivá vlákénka vějířku jsou snad elementární fibrilly Apathyho, které po několika spojují se v neurofibrillu. Neurofibrilly celé paličky tvoří pak nervové vlákno, které vbíhá do gangliové buňky.

Změříme-li za živa zrakové paličky, tedy jsou skoro dvakrát tak veliké jako fixované. Kdežto rozměry za živa se relativně nemění, dostaneme u materiálu fixovaného různá čísla dle tekutiny konservační.

Rozměry percepčních elementů:

Za živa:		fixované:
šířka vějířku	= 25 μ	15 μ
výška „	= 12·5 μ	= 7·5 μ
délka krčku	= 7·5 μ	= 7 μ
tloušťka vlákna	= 0·7 μ	= 0·5 μ

Použijeme-li nyní pod krycím sklíčkem fixace, přesvědčíme se přímo, jak se nápadně změní tvar zrakových paliček. Celý útvar se smrští, zakulatí, vlákénka stanou se nezřetelnými, takže vějířek zdá se býti tvořen zrnitou plasmou. Na fixovaných praeparátech vlastní čepička odpovídá jemným vlákénkům, proto větve nervové končí zde náhle (obr. 4.). Nejvíce ovšem se smrští distální kraj paličky a snad proto na fixovaných a barvených řezech objeví se zde temnější linie (čípky Hesseho?).*)

Pigmentový pohárek je dle některých autorů uzavřen jemnou blankou (Hertwig, Wenig, Jänichen, Schneider, Graff), jiní se o ní nezmiňují (Böhmig), nebo ji nezakreslují (Hesse),**) nebo ji vůbec popírají (Carrière). Poslední praví: »Die Grenze des Ganglions

*) Vlastní palička barví se intensivně eosinem, světlou zelení, kys. pikrovou. anilinovou modří, nerv a krčkovitá část pak haematoxylinem Heidenhainovým. orangí g.

**) V pozdějších pracích doplnil původní obrázek touto blankou.

und des Innenkörpers an der Beugenstelle der Fassern ist meist eine sehr scharfe, doch konnte ich keine Membran wahrnehmen, welche das Innere des Pigmentbechers an dieser Stelle abschlösse und von Fassern durchbrochen würde, so dass ich noch im Zweiel bin, ob die sehr feine Grenzlinien nicht durch die hier stattfindende Knickung der Fassern erzeugt wird.« Na základě pozorování na praeparátech barvených Heidenhainem souhlasil jsem zprvu s názorem Carrièrovým, neboť nikdy jsem bezpečně nezjistil žádné membrány. V případech, kdy se zdálo, že zde skutečně existuje hraniční blanka, ukázalo se při silném zvětšení a prohlížení celé serie, že je to nervové vlákno, které jedním koncem vbíhalo do pigmentového pohárku, nebo se od něj vzdalovalo, nikdy neprobíhalo od jednoho kraje k druhému. Kdyby se ovšem jednalo o přerušení blány následkem prostupu nervu, museli bychom zastihnouti zároveň i ono vlákno. Je pravda sice, že Wenigův nález malého jádra na hranici pohárku by svědčil pro existenci blány, ale vlastní své nálezy podobného jádra musel jsem bráti opatrně, poněvadž podlouhlé jadérko nikdy neleželo v rovině předpokládané blány, nýbrž vždy šikmo a ještě poněkud za hranici ganglia (obr. 1.), takže se zdá, ze se zde jedná o jádro buňky gangliové. Měla by ovšem buňka ta význačné postavení. Ani přítomnost zrnéček pigmentových podél zdánlivé blány, jak uvádí Jänichen a jak sám jsem pozoroval, není pro řešení otázky směrodatnou, poněvadž nalezneme leckdy pigment i v pohárku a pak pigment stejně dobře mohl by sledovati nervové vlákno jako onu blánu. Ani při použití zatemnělého pole (pomocí centrální clonky) nepodařilo se mi zjistiti jemnou blanku. V několika případech shledal jsem však poměry takové, že klonil jsem se k názoru Hesseho (v pozdějších pracích prosloveného), který existenci této blanky popírá, maje za to, že jen zúžené kraje pigmentových buněk přimykají se ke stonečkům paliček.

Jemnou blanku podařilo se mi zjistiti teprve při použití barvení dle Malloryho. Membranu tu není možno ztotožniti s vláknem nervovým, poněvadž se barví modře, kdežto vlákno hnědě oranžově. Nepodařilo se mi však rozhodnouti, zda blána tato je přímým pokračováním pigmentových buněk, či tvořena je přilehlými buňkami. Snad bude možno otázku tu řešiti pomocí regenerace očí na dekapitovaných planariích.

Před otvorem očním nalézá se zvláštní čočkovitý útvar (dle Carrièrea ganglion opticum, dle Jänichena zellig-nervöse Retina). Skládá se ze dvou částí, z vlastní čočkovité hmoty jasné, jemně vláknité, tvaru konkav-konvexní spojky, a z tmavší vrstvy povrchové, která se přikládá jen na vypouklé zevní straně, hlavně v dolní části, tedy vlastně již pod očním otvorem (obr. 1.). V ní uložena jsou jádra, resp. buňky gangliové. Počet jader na řezu přibližně odpovídá počtu zrakových paliček

týmž řezem zachycených. Buňky gangliové jsou chudé plasmou, která jen ve slabé vrstvě obklopuje jádro, vybíhajíc na dvou protilehlých stranách ve vlákna. Jedno vlákno probíhá čočkovitou jasnější částí a přechází v pohárku pigmentovém ve zrakovou paličku, druhé vlákno pak běží ke gangliu mozkovému; soubor těchto vláken tvoří nerv optický. Je přirozeno, že nerv zrakový a pak větev běžící z gangliové buňky do očního pohárku svírají spolu úhel, neboť zrakový nerv běží od buňky nervové dolů k centru ventrálně položenému, kdežto druhá větev vbíhá do pohárku očního se strany. Někdy sama tato větev se ohýbá jednou i dvakráte, jak je též viděti na obr. 3. Jasnější část činí dojem čočky, a také předpokládáme, že slouží jako apparát světlolomný, třebas ještě nedokonalý. Pokusil jsem se sice dokázati lomnost tohoto útvaru pomocí úzkého paprsku vrženého se strany, ale nedocílil jsem uspokojivého výsledku pro totální reflex na krycím sklíčku.

*

Věci, v nichž se stotožňuji s jinými autory a k nimž nemohu přičiniti vlastních poznámek, zde neuvádím, odkazuje na práce uvedené v literatuře.

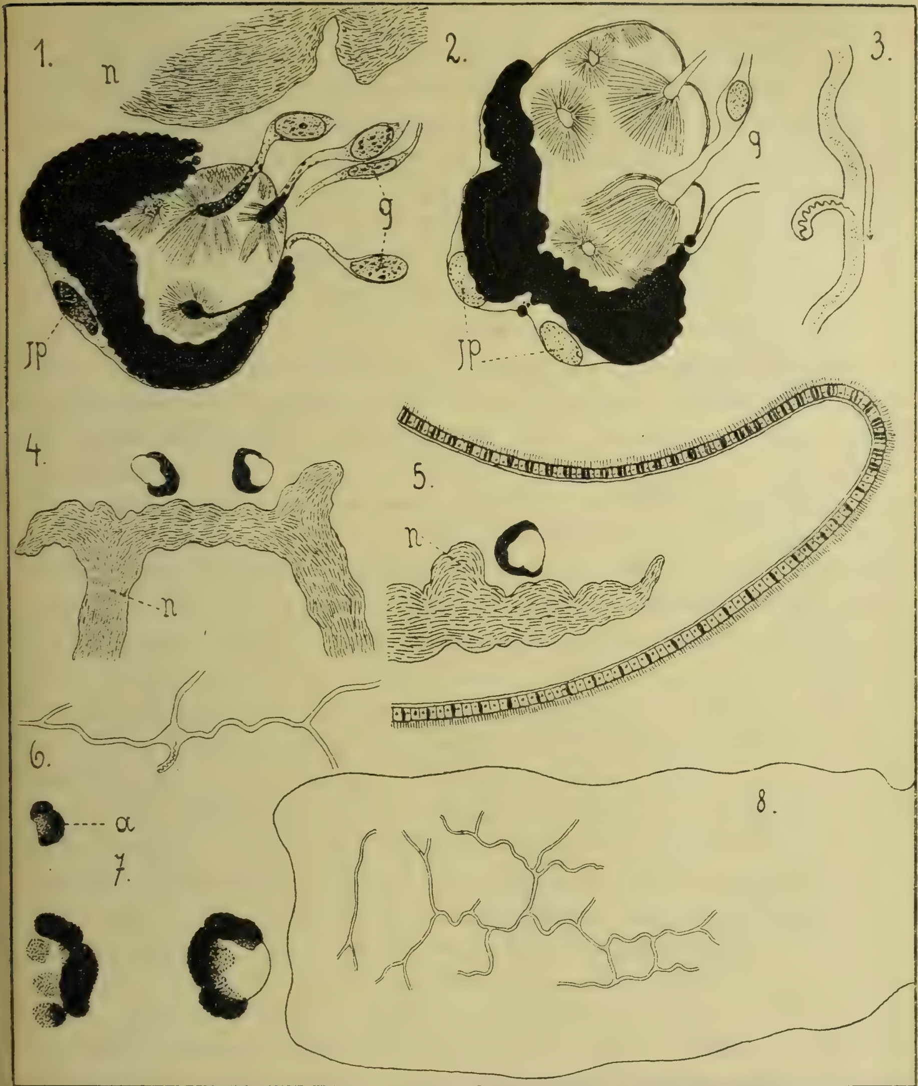
Planaria vitta Dugès.

Tab. II.

Složením svých očí řadí se *Planaria vitta* úzce ke *gonocephale*. Opatřena je též párem očí, které jsou položeny více u sebe a poměrně dosti daleko od předního okraje těla. Ani u této *Planarie* není vzácností větší počet očí (v několika případech nalezeny 3) obr. 7.); někdy ze dvou očí jedno bývá vyvinuto méně dokonale, je menší a chudší pigmentem.

Oči, na rozdíl od *gonocephaly,* leží hluboko v těle těsně na nervové soustavě (obr. 4., 5.). Tato poloha však nevadí jejich funkci, neboť *Planarie* postrádá vůbec pigmentu, takže stěna tělní nečiní překážek paprskům světelným. Snad se také zde již jedná o orgány degenerující, které jsouce uloženy hluboko v těle, ztrácejí již svůj význam jako orgány fotoreceptorické. Na to by poukazovalo snad to, jak již jsme se zmínili, že někdy jedno z očí, po případě obě, bývají slaběji vytvořeny, skoro bez pigmentu. Že by se zde jednalo o regeneráty, je nepravděpodobno, zvláště v případě, kdy jen jedno oko je slaběji vyvinuto, neboť oči ty leží velmi blízko sebe a těžko poraníme jedno, abychom nezasáhli druhé. Ostatně i způsob života by poukazoval na to, že oči jsou zde na ústupu, neboť *Planaria* vitta žije v bahně a zetlelém listí, po případě jeskyních, tedy na místech neosvětlených, kde celkem nepotřebuje očí; proto orgány fotoreceptorické jsou zde již silně labilní.

Tabulka II.



Planaria vitta: 1. Příčný řez okem (Heidenhain). 2. Příčný řez (Mallory). 3. Část exkrečního apparátu v jícnu s vířivým plaménkem (in vivo). 4. Horizontální řez; poloha očí a nervové soustavy. 5. Sagitální řez. 6. Exkreční apparát v proximální části jícnu s vířivým plaménkem ústícím do rozšířeného dvůrku (in vivo). 7. Poloha accesorního oka vzhledem k normálním (in vivo). 8. Síť exkrečního apparátu v jícnu.

Náš materiál pochází z mokřadla na vrchu Medníku u Prahy, plného spadaného listí a bahna, kde tato *Planarie* spolu s *Nyphargem* vyskytuje se hojně.

Nemohu se shodovati s Hessem, který pokládá oko *Planarie vitta* za jednobuněčné, totiž praví, že pigmentový pohárek tvořen je jedinou buňkou a objímá rovněž jen jediný zrakový element. Z několika řádků, které autor, tak zasloužilý právě o poznání očí nižších forem, věnuje *Planarii vitta*, je patrno, že se spokojil s materiálem velmi skrovným. Dle vlastních pozorování mohu říci, že oko to je složeno podobně jako oko *gonocephaly*, jenže je menší a chudší na zrakové elementy. I na něm rozeznáváme tři hlavní části: 1. pohárek pigmentový, 2. elementy zrakové, 3. nerv optický.

Pohárek pigmentový je složen z několika buněk, počet nepodařilo se mi však zjistiti, nalezl jsem ale v jednom případě 2 jádra na zevním okraji pohárku. Soudíme-li pak dle analogie s okem *Planaria gonocephala*, byl by poháren tvořen přibližně tolika buňkami, kolik uzavírá zrakových paliček. Na vícebunečnost pigmentového pohárku ukazuje i tvar očí in vivo (obr. 7.). Uzavřen je tenkou blanou, silně vyklenutou a velmi ostře se rýsující, která vychází z krajů pohárku jakoby přímé pokračování buněk pigmentových. Pigment sám složen je ze zrnéček kulatých, asi téže velikosti, barvy a vlastností jako u *Planaria gonocephala*.

Uvnitř pohárku jsou vlastní elementy zrakové. Poněvadž oči jsou nepatrné, je vyloučeno pozorování elementů za živa na rozpreparovaných očích, ale z obrázků, které nám poskytuje fixovaný materiál, můžeme souditi bezpečně na shodný tvar paliček s elementy *gonocephaly*. I zde se nerv zrakový v pohárku rozšiřuje kyjovitě (obr. 1., 2.) a nese chvost jemných vlákenek, která tu a tam tvoří oddělené štětičky. Kyjovitá rozšířenina nervu barví se železitým haematoxylinem (a vůbec barvivy jadernými), je totiž naplněna silně barvitelnými zrnéčky, která jsou čím dále od vějířku řidší, až v samotném nervu mizí docela. Nerv proráží zmíněnou již blanku a přechází v protaženou gangliovou buňku, která druhým vláknem, tvoříc tak vlákno nervu optického, vstupuje do mozku. Poněvadž oko leží těsně na nervové soustavě (obr. 1.), je optický nerv kratičký. Před blanou oční chybí zřetelný čočkovitý útvar, neboť zrakových elementů je velmi málo. Oční otvory směřují asi podobně jako u *gonocephaly*.

Co se týče počtu zrakových elementů, můžeme říci, že počet jejich není přesně stabilisován. Celkem můžeme odhadnouti celkové množství asi na 6—10 zrakových paliček.

Poznámka. Při studiu příslušné literatury shledal jsem v práci Paul Langově jakési zaujetí vůči methodě pozorování za živa, a poněvadž tam, kde Lang, přes positivní výsledky Chichkoffovy, Sekerovy a nejnověji Mrázkovy, nenašel ničeho, podařilo se mi s použitím jich proskribované methody poměrně snadno potvrditi nálezy Mrázkovy u *Planaria vitta*, zmiňuji se zde o tom krátce spíše pro methodu než k vůli věci samé, neboť se jedná o exkreční apparát ve pharyngu a ne o oči.

Třebas Lang používal roztoku solného, jak doporučuje Mrázek, nezjistil ve pharyngu žádného exkrečního systému. Doslovně praví:

»Aber auch dann konnte ich nichts von Excretionsgefässen entdecken. Dagegen kann es leicht geschehen, dass die vielen Drüsenausführgänge sowie die Muskel des Pharynx am lebenden Präparat mit Excretionsgefässen verwechselt werden.« K tomu nemohu poznamenati ničeho, leč citovati slova Mrázkova: »Vor Beobachtungsfehlern schützt überhaupt keine Methode.«

Vlastní moje nálezy shodují se úplně s poznatky Mrázkovými, jen tolik dodávám, že u dospělých *Planarii* větve exkrečního systému v jícnu spolu anastomují, tvoříce tak hustou síť kanálků (obr. 8.). V proximální části jícnu nalezl jsem pak v několika případech rozšířeninu kanálku, jakýsi dvůrek, z něhož vybíhalo několik větví (obr. 6.); tamtéž ústil vířivý plamének. Při použití immerse objevila se v kanálcích jemná zrnéčka pohybující se činností plaménků distálno-provimálně (obr. 3.). Co se týče průběhu kanálků a ostatních podrobností, odkazuji na práci Mrázkovu.

To vše uvádím jako důkaz důležitosti methody pozorování za živa, která namnoze podá kladný výsledek i tam, kde doposud seriové řezy zklamaly. Jest ovšem methoda ta méně pohodlnou a vyžaduje veliké trpělivosti a opatrnosti, ale přes to neměla by se opomíjet nikde, kde se pro příznivost materiálu podává sama sebou, a měla by sloužiti jako kontrola a potvrzení seriových nálezů. Jsem ovšem dalek toho, přeceňovati pozorování živého materiálu pod mikroskopem, ale popsané detaily morfologické rozhodně mluví proti podceňování nebo zanedbávání této methody, jak často nalézáme v literatuře. Počáteční nezdar nesmí nás ovšem ihned odraditi. Často je třeba hodinového pozorování i více, než se nám podaří postihnouti hledanou věc, neboť musíme vystihnouti vhodný okamžik k pozorování. Tak při hledání exkrečního apparátu v jícnu často půl hodiny i déle marně pátráme po kanálcích, až náhle se nám objeví zcela zřetelně; je totiž nutno, aby pharynx byl pod určitým tlakem krycího sklíčka, čehož docílíme nejlépe tím, že necháme kapalinu pod mikroskopem vypařovati, až najednou v příznivém okamžiku

kanálky náhle vystoupí. Je-li tlak již příliš velký, kanálky zmizí. Promeškáme-li tedy vhodnou dobu, jest naše námaha marnou. Nestačí pak rozpreparovati jen několik individuí, často je třeba desítek, ba i set exemplářů k positivnímu výsledku. Při zkoumání očí preparoval jsem na padesát planarií, než se mi podařilo najíti bezpečně a zřetelně zrakové paličky. Ovšem, že tu hraje velikou úlohu i náhoda, ale máme-li ji do jisté míry ovládnouti, nesmíme šetřiti materiálem.

Na konec budiž mi dovoleno poděkovati panu prof. Dr. Jar. Wenigovi a prof. Dr. Al. Mrázkovi za cenné pokyny a veliký zájem, s kterým moji práci sledovali. Žel však, že tragická smrt odvolala prof. Mrázka tak záhy z vědecké a učitelské činnosti. Celé obci vědecké odešel veliký učenec a ryzí člověk, který tak plně chápal a rozuměl jak vědeckým potřebám, tak i lidským bolestem vysokoškolského dorostu.

V Praze v listopadu 1923.

Résumé.

L'oeil du Planaria gonocephala (pl. I.) est formé des parties suivantes: 1. d'un gobelet pigmentair, 2. des éléments perceptibles proprement dits, 3. d'un appareil dioptrique, 4. d'un nerf ophthalmique (nervus opticus).

Le gobelet pigmentair se compose à peu près de 150 cellules dont les noyaux se trouvent à la partie extérieure, dans une étroite bande de plasme un peu pigmentair. Sur les coupes les grains pigmentairs sont d'une couleur brune, noirs sur les exemplaires vivants, mais observés au champs obscure ils sont toujours d'un rouge-brunâtre.

Dans le gobelet nous trouvons les propres éléments de la vue proprement dits rangés en 5—6 couches formant ainsi des rétines concentriques. Il s'âgit vraisemblablement ici d'une accomodation de l'oeil à l'irritation maximale. Le nombre des baguettes de vue est très différent (*Hesse* en mentionne 150—200), selon les différences d'intensité de lumière dans laquelle le Planaria gonocephala vit.

Les résultat des mes expériences sont:

1. La forme des éléments de vue ne change pas sous l'influence de lumière.

2. Le nombre de baguettes de vue est indirectement dépendant de la lumière ou de la durée de l'influence de

la source lumineuse d'une intensité donné, donc plus la lumière agit, plus le nombre des éléments perceptibles diminue.

La composition morphologique d'éléments perceptibles ayant été décrite différement par divers auteurs (voir *Jänichen, Hesse, Ude...)* j'en fis l'examen in vivo dans une solution physiologique (fig. 3 a, b, c).

Le nerf sans enveloppe et sans fil d'axe est très brillant et s'élargit dans le gobelet pigmentair en forme de massue. De cet élargissement partent quelques branches portant encore quelquefois des rameaux secondaires; ces derniers ont à l'extremité une touffe de fils fins (peut-être des fibrilles élémentaires *d'Apathy*). Tout a la forme d'une houppe élargie en éventail. Chaque branche porte une seule touffe. Quelquefois nous trouvons un seul nerf qui muni de petites touffes, une autrefois la baguette complète a la forme d'un balai. Vraisemblablement les petites touffes s'écartent sous la pression de la lamelle. Au cou là où le nerf est renflé nous voyons des petits grains foncés. A l'extrémité des fils (des fibrilles élémentaires) je n'ai trouvé aucun renflement (malgré l'emploi de l'immersion) ni aucune refringence anormale pouvant prouver la présence des papilles de *Hesse*.

Chez les sujets vivants les baguettes sont deux fois plus grandes que celles des préparations fixées (voir la page 9.). Sous l'influence de la fixation toute la forme de cet organe est modifiée; il se ressere, les neurofibrilles ne sont pas évidents; l'éventail semble être formé de plasme grainu. Sur les préparations fixées la calotte correspond au fils fins et c'est pourquoi les branches nerveuses se terminent subitement (fig. 4.). Il est vrai que le bord distal de la baguette se contracte le plus et c'est sans doute la cause qui nous y montre des lignes foncées sur les coupes colorées (les papilles de *Hesse*?). — Devant l'orifice du gobelet, c'est-à-dire devant la fine membrane qui le ferme (membrane rendue visible par la tinction de Mallory) se trouve un corps lenticulaire (ganglion opticum *Carrière,* zellig-nervöse Retina *Jänichen*), qui se compose:

1. D'une substance claire finement fibreuse en d'une lentille concave-convex (fig. 1., 2.).

2. d'une couche superficielle où se trouvent des cellules ganglionnaires faisant partie des baguettes. Nous supposons que ce corps lenticulaire sert d'appareil dioptrique imparfait bien qu'il soit.

Planaria vitta Dugès (Planche II.).

Les yeux de ce Planaria sont du même type que chez le gonocephala. Mais ils sont moins grands et parsuite plus pauvres en éléments perceptibles; ensuite ils sont enfoncés plus profondément dans le

parenchyme tout près du système nerveux (fig. 5.). Peut-être s'âgit-il là d'organes déjà dégénérés. Il se produit aussi une multiplication des yeux (fig. 7.). Le gobelet pigmentaire est formé de plusieurs cellules (au contraire de l'affirmation de *Hesse*) (fig. 1., 7.); il ne m'est pas possible d'en déterminer le nombre precis; peut-être est-il égale au nombre des éléments photosensitifs (selon l'analogie du gonocephala). Le gobelet est fermé par une membrane prenant naissance sur le bord des cellules pigmentaires comme si elle les continuait. Les éléments perceptibles proprement dits se trouvent dans le gobelet. Nous n'avons observé que des exemplaires fixés, mais malgré cela nous pouvons assurer, que la forme de ces éléments photosensitifs est pareille à celle du gonocephala. L'élargissement du nerf contient un amas de fines granulations, qui disparassent entièrement dans le nerf même et qui se colorent par les couleurs nucléolaires. Devant la membrane se trouvent des cellules ganglionnaires, mais elles ne constituent pas de corps lenticulaire (à cause de leur petit nombre). L'oeil du Planaria vitta contient en tout à peu près 6 à 10 éléments photoréceptoriques.

Note:

Mrázek décrit dans son travail*) un appareil excrétaire placé dans le pharynx du Planaria. Ses observations furent faites in vivo. Mais ceci est contredit par *Paul Lang* qui dans ses séries de préparations n'a rien trouvé de pareil. A ce qu'il dit »... kann es leicht geschehen, dass die vielen Drüsenausführgänge sowie die Muskel des Pharynx am lebenden Präparat mit Excretionsgefässen verwechselt werden« —, je ne puis qu'ajouter les paroles du prof. *Mrázek*: »Vor Beobachtungsfehlern schützt überhaupt keine Methode.«

Mes propres recherches sont d'accord avec celles de *Mrázek*. Il est seulement nécessaire de constanter, que les branches de l'appareil excrétaire du pharynx des animaux adultes s'anastomosent (fig. 8.). Il y élargissement du canal excrétaire dans la partie proximale (dans certains cas), d'où partent plusieurs branches et où aboutit aussi un solenocyte (fig. 6.). Quant au parcours des canaux et à d'autres détails je renvoie au travail de *Mrázek*.

Je cite tout cela comme nouvel argument de l'importance de la méthode d'observation in vivo, qui même lorsque les coupes d'une série ne donnaient aucun résultat positif, nous permets souvent de faire des conclusions justes.

---

*) Einige Bemerkungen über das Excretionssystem einige Süsswassertricladen. Z. f. w. Zool. Bd. XCIII. 1909.

Explications des figures:

g = cellule ganglionnaire, *j* = noyau central, *jp* = noyau de la cellule pigmentaire, *ep* = épiderme, *mb* = membrane basilaire, *p* = élément perceptible, *S* = appareil dioptrique, *n* = système nerveux, *a* = oeil excédant.

Planche I. Planaria gonocephala.

1. — Oeil normal (oc. 5., obj. 8*a*). 2. — Oeil éclairé pendant 11 heures. 3. — Eléments perceptibles dans la solution physiologique. 4.—5. — Eléments perceptibles fixés au sublimé-acide acétique, pendant des délais variés et préparés à l'haematoxylin de Heidenhain.

Planche II. Planaria vitta.

1. — Section à travers l'oeil (Heidenhain). 2. — La même (Mallory). 3. — Partie du système excrétaire du pharynx avec le solenocyte dessiné d'après sujet vivant. 4. — Coupe horizontale: position des yeux et du système nerveux. 5. — Coupe sagitale. 6. — Organe exrétaire dans la partie proximale du pharynx avec le solenocyte pénétrant dans un élargissement du canal. 7. — Position de l'oeil excédant à l'égard d'un oeil normal (dessiné d'après sujet vivant). 8. — Système excrétaire dans le pharynx.

Literatura.

Hertwig R.: Das Auge der Planarien. Jenaische Zeitsch. f. Naturw. Bd. XIV. Supl. 1. 1881.

Carrière: Die Augen von Planaria polychroa Schmidt u. Polycelis nigra Ehrb. Arch. f. m. Anat. Bd. XX. 1881.

Ijima: Untersuchungen über den Bau u. die Entwickelungsgeschichte der Süsswasserdendrocoelen. Zeit. f. wiss. Zool. XL. 1884.

Böhmig: Zur Kenntnis der Sinnesorgane der Turbellarien Zool. Anz. Bd. X. 1887.

Jänichen: Beiträge zur Kenntnis des Turbellarienauges. Zeit. f. wiss. Zool. LXII. 1897.

Schmidt: Zur Kenntnis der Tricladenaugen u. der Anatomie von Polycelis Gayi. Zeit. f. wiss. Zool. LXXII. 1902.

Hesse: Untersuchungen über die Organe der Lichtempfindung bei niederen Tieren. VIII. Zeit. f. wiss. Zool. LXXII. 1902.

Wenig: Studie o očích sladkovodních planarií. Výroční zpráva české vyšší reálné školy v Pardubicích 1904.

Hesse: Das Sehen der niederen Tiere. Fischer, Jena, 1908.

Ude J:. Beiträge zur Anatomie und Histologie der Süsswassertricladen. Zeit. f. wiss. Zool., Bd. 39. 1908.

Böhnig u. Graff: Turbellaria (Süsswasserfauna Deutschlands, 1909).

Berninger: Ueber die Einwirkung des Hungers auf Planarien. Zool. Jahrb. Physiol. Bd. 30. 1910.

Lang P.: Ueber Regeneration bei Planarien. Arch. f. m. Anat. LXXIX. 1912.

Lang P.: Beiträge zur Anatomie u. Histologie von Planaria polychroa. Zeit. f. wiss. Zool. CV. 1913.

Lang P.: Experimentelle u. histologische Studien an Turbellarien. Arch. f. m. Anat. Bd. LXXXII. 1913. I. a II.

Lang A.: Handbuch der Morphologie der wirbellosen Tiere. 1913.

Schneider: Lehrbuch der vergleichenden Histologie. Jena 1902.

Graff: Zeitsch. f. wiss. Zoologii. Suppl. 1878.

Graff: Zool. Anz. 1879.

Graff: Monographie der Turbellarien. I. 1882. II. 1899.

Vejdovský: Exkreční apparát Planarií. Sitz.-Berich. böhm. Ges. Wiss. 1882.

Sekera E.: Příspěvky ku známostem o Planariích sladkovodních. Sitz.-Berich. böhm. Ges. Wiss. 1882.

Chichkoff G.: Recherches sur les Dendrocoeles d'eau douce. Arch. Biol. I. XII. 1892.

Micoletzky: Beiträge zur Morphologie des Nervensystemes und Excretionsapparates der Süsswassertricladen. Zool. Anz. Bd. XXX. 1906.

Wilhelmi: Untersuchungen über die Excretionsorgane der Süsswassertricladen. Z. f. wiss. Zool. LXXX. 1906.

Mrázek: Einige Bemerkungen über das Excretionssystem einiges Süsswassertricladen. Z. f. w. Zool. Bd. XCIII. 1909.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 11.

K. PETR:

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE JORDAN SUR LES COURBES CONTINUES.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 11.

K. PETR:

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE JORDAN SUR LES COURBES CONTINUES.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Une démonstration du théorème de Jordan sur les courbes continues.

Par **K. Petr.**

Je donne, dans le travail actuel, une démonstration du théorème de Jordan qui affirme qu'une courbe fermée C, continue et ne se coupant pas, divise tous les points du plan, n'appartenant pas à C, en deux domaines, celui des points extérieurs et celui des points intérieurs dont la frontière commune est C. Pour démontrer ce théorème, j'emploie le réseau quadratique des parallèles aux axes X, Y et des polygones contenant un nombre fini de carrés de ce réseau. Je fais voir, en particulier, que, si l'on choisit le côté du carré plus petit qu'un certain nombre positif dépendant d'un autre nombre positif δ, on peut former, en réunissant plusieurs de ces carrés, deux polygones Γ, γ tels que chaque point dont la distance à C est supérieure (ou égale) à δ se trouve à l'extérieur de Γ ou à l'intérieur de γ; c'est de là que suit facilement la démonstration du théorème de Jordan.

J'ai donné cette démonstration, en me bornant à ses traits essentiels, dans le „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky" (Journal de mathématiques et de physique) t. 53., p. 149; ici, je vais donner une démonstration qui est, d'une part, un peu simplifiée, d'autre part, plus détaillée dans plusieurs de ses parties.

Voici, tout d'abord, quelques notations dont je ferai usage assez fréquemment. Le point aux coordonnées rectangulaires x, y est désigné par $[x, y]$; s'il est déterminé, sur une courbe aux équations paramétriques, par la valeur t du paramètre, il sera désigné aussi par $[t]$ L'écart (la distance) de deux points $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ est toujours égal au plus grand des nombres $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$ et est désigné par $d(t_1, t_2)$, si t_1, t_2 sont les paramètres de ces deux points. De même, $d(A, t)$ signifie la distance du point A au point $[t]$ de la courbe. $O(A, \delta)$ signifie le domaine du point A, il est défini comme un carré ayant A pour son centre de

coté égal a 2δ, et dont les côtés sont parallèles aux axes X, Y. J'espère que des notions, comme: la distance minimum de deux courbes continues, d'un point à une courbe continue, l'étendue maximum d'une courbe, d'un polygone, etc. soient assez claires pour ne pas exiger d'explication; je ne fais que remarquer que toutes ces longueurs seront mésurées dans ce qui suit, comme l'écart (distance) de deux points, défini ci-dessus.

I.

Soit donnée une courbe C continue, fermée et ne se coupant pas, aux équations

$$x = \varphi\ (t),\ y = \psi\ (t)$$

où t parcourt l'intervalle $(t_0,\ T)$, $T > t_0$. La courbe étant fermée, on a $\varphi\ (t_0) = \varphi\ (T)$, $\psi\ (t_0) = \psi\ (T)$. Si l'on pose $T - t_0 = \omega$ et si l'on définit les fonctions $f\ (t)$, $g\ (t)$ par les équations

$$f\ (t) = \varphi\ (t),\ g\ (t) = \psi\ (t)$$

pour toutes les valeurs de t de l'intervalle $(t_0,\ T)$, et, en général, par les équations

$$f\ (t + \omega) = f\ (t),\ g\ (t + \omega) = g\ (t)$$

pour toutes les valeurs de t, on peut écrire les équations de la courbe C comme il suit:

$$x = f\ (t),\ y = g\ (t),$$

t parcourant l'intervalle de longueur ω, à partir d'une origine quelconque. Les fonctions $f\ (t)$, $g\ (t)$ sont des fonctions définies dans l'intervalle tout entier et ayant la période ω. Ce sont, de plus, des foctions partout continues (C étant une courbe continue) et les équatitons

$$f\ (t') = f\ (t),\ g\ (t') = g\ (t)$$

se trouvent satisfaites exclusivement par

$$t' = t + k\ \omega$$

(puisque C ne se coupe pas elle-même).

Comme $f\ (t)$ et $g\ (t)$ sont des fonctions continues et périodiques, ayant la période ω, on peut toujours, pour un nombre positif δ, choisi à volonté, trouver un nombre entier n tel que

$$d\ (t',\ t'') < \delta \tag{I}$$

pour toutes les valeurs t', t'' pour lesquelles

$$|t' - t''| < \frac{\omega}{n}. \tag{a}$$

Nous introduirons encore une notation abrégée en posant

$$\frac{\omega}{n} = \varepsilon.$$

De plus, puisque la courbe C ne se coupe pas elle-même, on peut trouver, pour le nombre positif ε qui vient d'être déterminé, un nombre positif η tel que

$$d\,(t', t'') \geqq \eta \tag{II}$$

pour toutes les valeurs de t', t'' satisfaisant à la relation

$$|t' - t''| \geqq \varepsilon, \tag{b}$$

à condition qu'on choisisse les paramètres t', t'' (en ajoutant, s'il le faut, ou en retranchant un multiple entier de la période ω) des points en question de sorte que l'expression

$$|t' - t''|$$

possède, pour ces deux points, la plus petite valeur possible. On en fera autant pour (a).

On peut déterminer η comme la valeur minimum de la fonction continue

$$d\,(t', t'')$$

des variables t', t'', liées par ex. par les relations

$$0 \leqq t' \leqq \omega, \quad 0 \leqq t'' \leqq \omega, \quad \varepsilon \leqq t' - t'' \leqq \omega - \varepsilon.$$

Le domaine délimité par ces conditions est continu et fermé; donc, le minimum existe, en fait, pour un couple (des couples) de variables, p. ex. pour $[t', t''] = [t'_1, t''_1]$; il est positif, comme C est une courbe ne se coupant pas.

Les deux nombre δ, η sont liés, évidemment, par la relation

$$\eta \leqq \delta.$$

II.

1. J'introduirai, d'abord, quelques notions auxiliaires, concernant la courbe C et ses parties, et les nombres δ, ε choisis plus haut. Soit C' une portion de la courbe C, qui peut aussi être identique à ía courbe C, contenant tous les points de la courbe C dont les paramètres appartiennent à l'intervalle (t_0, t'_0). Pour que tout point soit caractérisé par une seule valeur, on aura

$$0 < t'_0 - t_0 \leqq \omega.$$

Nous désignerons dans ce qui suit, la portion C' parfois par la notation plus ample $\{t_0, t'_0\}$.

Construisons, maintenant, un réseau de carrés, engendré par deux systèmes de droites, parallèles, respectivement, à l'axe X et à l'axe Y, et dont la distance mutuelle est $\alpha \leqq \frac{1}{4}\,\eta$. On obtient ainsi un réseau de carrés, au côté α, étendu sur le plan XY tout entier. On marquera

les carrés qui contiennent un point de C' (ce point peut être situé aussi sur le périmètre du carré en question) en les rayant. Les carrés rayés remplissent, ce qui suit de la continuité des fonctions $f(t)$, $g(t)$, une partie connexe du plan. J'appelle, en ce sens, connexe une portion de plan, si deux points quelconques de cette portion peuvent être joints par un trait polygonal situé à l'intérieur de cette portion (n'ayant pas de point commun avec la frontière de cette partie). Nous démontrerons, dans ce qui suit, en détail, que la frontière de la portion rayée du plan se compose, avant tout, d'un polygone Γ', formé par les côtés de carrés du réseau, à l'intérieur duquel la portion rayée toute entière est située. Le polygone Γ' est un polygone qui ne se coupe pas et il contient, à l'intérieur, un certain nombre de carrés, en partie rayés, en parties non rayés.*) Les carrés non rayés forment plusieurs „îles“ qui sont limitées, elles-aussi, par des polygones ne se coupant pas, composés de côtés des carrés du réseau, et ne contenant, à l'intérieur, que de carrés non rayés; nous désignons ces polygones par γ'_1, γ'_2, ... Les polygones Γ', γ'_1, γ'_2, . . . ne se traversent pas mutuellement, bien etendu, mais ils peuvent avoir de sommets communs (mais pas de cotés communs). Nous appellerons *Γ' polygone extérieur appartenant à C' dans le réseau donné au côté α*; *γ'_1, γ'_2, . . . polygones intérieurs appartenant à C' dans ce réseau.* Nous désignons le domaine rayé (dont la frontière est composée des polygones Γ', γ'_1, γ'_2, . . .) par $\mathbf{G}'$ et nous l'appellerons *segment de plan appartenant, dans le réseau, à C'.* Nous nommerons aussi *Γ' polygone extérieur*, *γ'_1 . . . polygones intérieurs du segment* $\mathbf{G}'$.

2. Pour démontrer ce que nous avons dit sur les frontières du segment $\mathbf{G}'$, partons d'un côté d'un des carrés du réseau, désigné par $\overline{12}$, où *1*, *2* sont les extrémités de ce côté (et, en même temps, des sommets du réseau), et supposons que $\overline{12}$ se trouve à la frontière du segment $\mathbf{G}'$; par suite $\overline{12}$ est, en même temps, côté d'un carré rayé et d'un carré non rayé.

Si l'on *tient compte de la direction de côté $\overline{12}$,* l'un des deux carrés se trouve à sa droite, l'autre à sa gauche. Supposons p. ex. que *le carré rayé contigu à $\overline{12}$, soit situé à gauche de $\overline{12}$.* Le côté $\overline{12}$, aboutissant au point *2*, rencontre, en ce point, un côté, ou bien trois côtés de carrés du réseau qui séparent les carrés rayés des carrés non rayés. S'il y rencontre un seul de ces côtés, désignons le point final de ce

*) Il peut se faire, bien entendu, que dans des cas particuliers, l'intérieur du polygone ne contient que des carrés rayés.

côté par *3*; le côté $\overline{23}$ aura, si l'on tient compte du sens de parcours, le carré rayé contigu encore à sa gauche.*)

Si, cependant, il rencontre trois de ces côtés, désignons par $\overline{23}$ le côté appartenant au même carré non rayé que $\overline{12}$; en ce cas encore, le carré rayé contigu à $\overline{23}$ est situé à gauche de $\overline{23}$. De cette sorte, $\overline{23}$ est déterminé d'une manière univoque, et inversement, $\overline{12}$ est déterminé d'une manière univoque, par $\overline{23}$.

En continuant de la sorte on parvient à des côtés $\overline{34}$, $\overline{45}$, . . . qui ont tous cette propriété qu'à la gauche de $\overline{i, i+1}$ se trouve un carré rayé dont $\overline{i, i+1}$ est un côté, tandis qu'à la droite se trouve un carré non rayé; après avoir fait un nombre suffisant de ces pas, on retombe sur le côté $\overline{12}$, par lequel on a commencé, puis de nouveau sur $\overline{23}$, et ainsi de suite. Car chaque coté détermine, d'une manière univoque, le côté suivant et le côté précédent, et le nombre de carrés séparant les carrés rayés des carrés non rayés est fini. Nous avons trouvé, ainsi, un polygone fermé *123 . . . N1* qui est une partie de la frontière — ou même cette frontière elle-même — entre le domaine des carrés rayés et des carrés non rayés.

On ne peut pas encore affirmer, bien entendu, qu'un des sommets *1, 2, 3, . . . , N* du polygone ne coïncide pas avec un autre (nous savons seulement que cela n'a pas lieu pour les côtés $\overline{12}, \overline{23}, \ldots, \overline{N1}$). Soit p. ex. i_1 le premier parmi les points *1, 2, 3, . . . , N* qui coïncide avec un point k_1, pour $k_1 > i_1$ (une coïncidence d'un nombre de points supérieur à deux n'est pas, évidemment, possible). Alors, au point $i_1 = k_1$ se rencontrent quatre cotés de carrés du réseau, séparant les carrés rayés des carrés non rayés. D'après ce qu'on a dit sur le choix des côtés du polygone *12 . . . N1* on sait que $\overline{i_1 - 1\ i_1}$, $\overline{i_1, i_1 + 1}$ sont les côtés d'un carré non rayé, $\overline{k_1 - 1, k_1}$, $\overline{k_1, k_1 + 1}$ les côtés d'un autre carré non rayé, ces deux carrés ayant le sommet commun $k_1 \equiv i_1$. On considérera, en ce cas, au lieu du polygone *123 . . . N1*, le polygone $123 \ldots i_1\ (k_1 + 1)\ (k_1 + 2) \ldots N1$.**) On passe du premier polygone au deuxième en supprimant, dans le premier, le trait polygonal fermé $i_1\ (i_1 + 1) \ldots k_1$. Il se peut que, dans ce polygone encore, deux sommets coïncident, en ce cas on supprimera encore un tel trait polygonal. On répètera cette opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un polygone $12 \ldots i_1\ (k_1 + 1) \ldots i_2\ (k_2 + 1) \ldots i_\mu\ (k_\mu + 1) \ldots N1$ dans lequel aucun

---

*) En ce cas, $\overline{23}$ est un côté du carré rayé ou non rayé dont l'autre côte est $\overline{12}$, ou bien $\overline{23}$, on l'obtient en prolongeant $\overline{12}$ au de-là du point *2*, de la longueur a.

**) Cette façon d'écrire suppose que $i_1 > 3$.

couple de points $1, 2\ldots, i_1, (k_1+1),\ldots i_2, (k_2+1)\ldots, N$ ne coïncide. Nous désignerons ce polygone par Π et, pour mettre en évidence la propriété qui vient d'être mentionée, nous le nommerons polygone fermé ne se coupant pas, ou *polygone simple* tout court.

3. Cela posé, démontrons, tout d'abord, sur les polygones simples, un théorème important dans la suite.

Soit donné, d'abord, un ensemble fini de carrés du réseau donné, p. ex. de carrés rayés; un tel ensemble est donné, p. ex., par le segment **G**'. Les points de ces carrés forment un domaine de points du plan, dont la frontière se compose de côtés des carrés du réseau. Considérons les lignes brisées composées de segments parallèles, respectivement, aux axes X, Y et joignant les centres des carrés du réseau. Alors, on peut affirmer, que deux lignes brisées ayant les mêmes extrémités coupent la frontière de l'ensemble considéré en des points dont les nombres ont même parité. Cet enoncé est facile à démontrer. (Il suffit, pour le faire, de considérer le nombre de points d'intersection des deux lignes brisées avec les côtés de tous les carrés rayés, et de se rendre compte, en premier lieu, du fait que si le trait polygonal coupe le côté d'un carré rayé, qui n'appartient pas à la frontière, le point d'intersection relatif, est, en même temps, l'intersection de la ligne brisée avec le côté du carré rayé voisin, en deuxième lieu, que les deux lignes brisées, prises ensemble, coupent tout carré — y compris le premier et le dernier — en un nombre pair de points.)

Nous ferons voir maintenant que, étant donné un polygone simple Π dont le périmètre se compose de côtés des carrés du réseau, on peut partager tous les carrés du réseau en deux espèces, de sorte que les points de tous les carrés de chaque espèce forment un domaine de points dont Π est la frontière (donc, Π est la frontière commune des deux domaines qu'on obtient ainsi). Il suffit pour cela, de faire la convention suivante: Si une demi-droite, menée par le centre d'un carré parallèlement au sens positif de l'axe X, coupe le polygone Π en un nombre impair de points, ce carré appartiendra à la première espèce des carrés du réseau, et ses points sont du domaine Q; s'il coupe en un nombre pair de points, ce carré appartiendra à la deuxième espèce, ses points seront du domaine Q_1. Par-là, les domaines Q, Q_1 sont fixés et il est évident, en même temps, ce qui suit du théorème sur les lignes brisées démontré plus haut, qu'on parviendrait aux mêmes domaines Q, Q_1, si l'on remplaçait les demi-droites ayant la direction positive de l'axe X, par des demi-droites ayant sa direction négative, ou par des demi-droites ayant la direction positive (négative) de l'axe Y. Il

suit de là que le polygone Π est la frontière des domaines Q et Q_1. Nous dirons que les carrés du domaine Q, ainsi que les points de ces carrés qui ne sont pas situés sur Π sont *à l'intérieur de* Π, ou bien, que ce sont *des points (des carrés) intérieurs à* Π. On emploiera, au sens analogue, l'expression *extérieur* par rapport a Q_1, Π.

Si l'on rayait tous les carrés du réseau, intérieurs à Π et si l'on procédait d'une manière analogue à celle employée dans la construction du polygone $12\ldots N1$, éxécutée plus haut, en partant, bien entendu, d'un côté du carré du réseau situé sur Π, on parcourrait le polygone Π tout entier et tous les carrés rayés seraient situés d'un même côté par rapport à la direction choisie (p. ex. du côté gauche, comme ci-dessus). C. à d.: si l'on parcourt Π en un sens déterminé, tous les carrés intérieurs à Π se trouvent du même côté par rapport aux carrés du réseau parcourus.

4. Reprenons les considérations sur le polygone $\Pi = 12\ldots i_1 (k_1+1)\ldots N1$; d'après la supposition faite, à gauche des côtés $\overline{12}$, $\overline{23}, \ldots \overline{N1}$ se trouvent les carrés rayés contigus à ces côtés (tandis qu'à droite se trouvent les carrés non rayés.) Il y a deux cas possibles: à gauche des côtés $\overline{12}$, $\overline{23}, \ldots$ se trouvent, ou des carrés intérieurs à Π, ou des carrés extérieurs à Π. Considérons ces deux cas, l'un après l'autre.

A) Les carrés contigus aux côtés $\overline{12}$, $\overline{23}\ldots$, situés à leur gauche et, par conséquent, rayés (appartenant à $\mathbf{G}'$) sont intérieurs à Π. En ce cas, tous les carrés rayés (appartenant à $\mathbf{G}'$) se trouvent à l'intérieur de Π; car, s'il y avait des carrés rayés aussi à l'extérieur de Π, le domaine $\mathbf{G}'$ (domaine des points des carrés rayés) ne serait pas connexe. Par conséquent, le polygone $123\ldots N1$ est, dès l'abord, un polygone simple et il ne se peut pas que deux des points $1, 2, \ldots N$ coïncident, comme on l'a supposé p. ex. pour les points i_1, k_1. Car s'il en était ainsi, il se trouverait, à l'extérieur de Π, un carré rayé aux côtés $\overline{i_1 (i_1+1)}$, $\overline{(k_1-1) k_1}$ concourant au point $i_1 \equiv k_1$.

Par suite, le polygone $123\ldots N1$ est un polygone simple et à son intérieur se trouvent tous les carrés du segment $\mathbf{G}'$, c. à d. ce polygone est le polygone extérieur Γ' du segment $\mathbf{G}'$. Un tel polygone existe en tout cas, et il n'en existe qu'un seul.

B) Les carrés contigus aux cotés $\overline{12}$, $\overline{23}\ldots$, situés à gauche (et, par conséquent, rayés, appartenant à $\mathbf{G}'$) sont extérieurs à Π. En ce cas tous les carrés situés à l'intérieur de Π sont des carrés non rayés (c. à d., aucun des carrés intérieurs à Π n'appartient à $\mathbf{G}'$), car, s'il en était autrement, le domaine $\mathbf{G}'$ ne serait pas connexe. Par suite, le

polygone $123 \ldots N1$ est, dès l'abord, un polygone simple, et il ne peut se faire que deux des points $1, 2, 3 \ldots N$ coïncident. Car, si i_1, k_1 coïncidaient, le carré rayé aux côtés $\overline{i_1 (i_1 + 1)}$, $\overline{(k_1 - 1) k_1}$ tomberait à l'intérieur de Π, et tous les carrés intérieurs à Π ne seraient pas de carrés non rayés.

Par suite, le polygone $123 \ldots N1$ est un polygone simple et tous les carrés du segment $\mathbf{G}'$ se trouvent à son extérieur, en d'autres termes, ce polygone est un des polygones γ' intérieurs du segment $\mathbf{G}'$. $\mathbf{G}'$ étant donné, un tel polygone n'existe pas nécessairement; mais il peut en exister plusieurs.

Donc, tous les énoncés, faits sur le segment $\mathbf{G}'$, ainsi que sur sa frontière composée de polygones simples Γ', γ'_1, $\gamma'_2, \ldots$ sont démontrés, ou bien, leur exactitude est évidente par ce qui précède.

En même temps, le sens précis et l'exactitude de l'énoncé suivant sont évidents: Si l'on parcourt le périmètre du polygone Γ', ou bien des polygones γ'_1, $\gamma'_2 \ldots$, en un sens déterminé, les carrés rayés du réseau se trouvent toujours du même côté par rapport aux lignes parcourues.

Si l'on parcourt un polygone simple de sorte que les carrés intérieurs à ce polygone se trouvent à gauche par rapport aux côtés parcourus, on dit qu'on le parcourt au sens positif par rapport à l'intérieur de cette île. Une signification analogue possède l'expression: le sens négatif; et, de même, le sens positif par rapport aux carrés rayés situés sur le périmètre du polygone Γ', etc.

5. Si l'on a deux portions de la courbe fermée C, ayant les équations (1), qui n'ont pas de point commun, ces deux portions étant $\{t_0, t'_0\}$, $\{t_1, t'_1\}$, et les valeurs des paramètres t_0, t_1, t'_0, t'_1 pouvant être choisies de sorte que $t_0 < t'_0 < t_1 < t'_1 < t_0 + \omega$, et si, de plus $t_1 - t'_1 > \varepsilon$, $(t_0 + \omega) - t'_1 > \varepsilon$, les segments, que nous désignerons par $\mathbf{G}'_0$, $\mathbf{G}'_1$, qui leur appartiennent, n'ont pas de point commun. Car la distance minimum des deux portions est, d'après (II), supérieure ($\geqq$) à η et, par suite, la distance minimum des deux segments est supérieure à $\eta - 2\alpha$, c. à d., supérieure à $\frac{1}{2}\eta$.

L'utilité de cette remarque se manifestera, à plusieurs reprises, dans ce qui suit.

III.

Nous considérerons maintenant, avec plus de détails, le segment de plan, appartenant, dans le réseau des carrés, à $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$, où $m < n$. Nous démontrerons, sur cette espèce de segment, un théorème

fondamental pour les raisonnements qui nous occupent; nous considérerons, dans ces raisonnements, le segment appartenant à $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$ comme étant produit par la réunion des segments appartenant à

$$\{t_0, t_0 + \varepsilon\}, \{t_0 + \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon\}, \ldots, \{t_0 + \overline{m-1}\varepsilon, t_0 + m\varepsilon\}.$$

Je désignerai, pour être court, par $\mathbf{g}_{ik}$ le segment de plan appartenant, dans le réseau des carrés, à la portion $\{t_0 + i\varepsilon, t_0 + k\varepsilon\}$. On voit, tout d'abord, que $\mathbf{g}_{0,1}$ est un segment qui ne contient pas d'île dont la dimension maximum soit supérieure ($\geqq$) à 2δ; car la portion de la courbe $\{t_0, t_0 + \varepsilon\}$, à laquelle appartient ce segment, se trouve, d'après (I), à l'intérieur du carré $O\ (t_0, \delta)$. Si l'on ajoute à $\mathbf{g}_{0,1}$ le segment $\mathbf{g}_{1,2}$, on obtient (en réunissant ces deux segments) le segment $\mathbf{g}_{0,2}$; ce segment ne contient pas, non plus, à l'intérieur, d'îles dont la plus grande dimension soit $\geqq 2\delta$; car la portion respective $\{t_0, t_0 + 2\varepsilon\}$ de la courbe se trouve, d'après (I), à l'intérieur du carré $O\ (t_0 + \varepsilon, \delta)$.

Nous démontrerons, par induction, qu'il n'y a pas dans le segment $\mathbf{g}_{0,m}$ (pour $m > 2$), non plus, d'île dont la plus grande dimension soit supérieure à 2δ. A ce but, supposons que cela ait lieu pour les segments $\mathbf{g}_{0,k}$, où $k = 1, 2, \ldots, m-1$, et démontrons, qu'il en est de même de $\mathbf{g}_{0,m}$.

On obtient le segment $\mathbf{g}_{0,m}$ en réunissant les segments $\mathbf{g}_{0,m-2}$ $\mathbf{g}_{m-1,m}$ (qui n'ont pas, d'après II. **5.**, de point commun) avec le segment $\mathbf{g}_{m-2,m-1}$. Il y aura trois espèces d'îles qui seront produites par cette réunion:

1. Des îles qui se trouvaient, avant la réunion, dans $\mathbf{g}_{0,m-2}$ et $\mathbf{g}_{m-1,m}$ et qui, ou restent inaltérées, dans le segment produit par la réunion, ou sont remplacées, le segment $\mathbf{g}_{m-2,m-1}$ empiétant sur elles, par des îles plus petites.

2. Des îles qui se trouvaient, avant le réunion, dans $\mathbf{g}_{m-2,m-1}$ et qui, ou restent inaltérées, dans le segment produit, ou sont remplacées, les segments $\mathbf{g}_{0,m-2}$, $\mathbf{g}_{m-1,m}$ empiétant sur elles, par des îles plus petites.

3. Des îles nouvelles, résultant, d'une part, de la réunion des segments $\mathbf{g}_{0,m-2}$ et $\mathbf{g}_{m-2,m-1}$ (il en résulte le segment $\mathbf{g}_{0,m-1}$; donc, les îles en question sont situées dans $\mathbf{g}_{0,m-1}$), de l'autre part, de l'union des segments $\mathbf{g}_{m-2,m-1}$ et $\mathbf{g}_{m-1,m}$ (d'où résulte le segment $\mathbf{g}_{m-2,m}$); ce deux espèces d'îles, ou restent telles quelles dans le segment final, ou bien elles sont remplacées par des îles plus petites, ce qui se produit par ce que le segment $\mathbf{g}_{m-1,m}$, dans un cas, ou le segment $\mathbf{g}_{0,m-2}$, dans l'autre, empiètent sur elles. Il suffit de considérer, parmi

ces îles, celles qui sont limitées par les polygones extérieurs des segments en question, car chaque île dont la frontière est formée, en partie, par la frontière d'une île d'un des trois segments réunis, est située à l'intérieur de cette île et on a le cas 1. ou le cas 2.

Des îles, autres que celles des trois cas précédents, ne peuvent pas se produire. Pour le démontrer, admettons, plus généralement, qu'on obtienne, par la réunion de trois segments **G**′, **G**″, **G**‴, où **G**′ et **G**‴ n'ont pas de point commun (pas même aux frontières) et qui donnent, par leur réunion, le segment **G**, une île limitée par un polygone γ, et laquelle ne fasse pas partie d'une île résultant ou de la réunion de **G**′ et **G**″, ou de la réunion de **G**‴ et **G**″.*)

On voit d'abord, en ce cas, que le polygone extérieur Γ du segment résultant **G** sera composé de portions de tous les trois polygones Γ', Γ'', Γ''' qui sont polygones extérieurs des segments **G**′, **G**″, **G**‴. Car s'il ne contenait que des portions des polygones Γ', Γ'' sans contenir une portion du polygone Γ''', toutes les îles résultant de la réunion des segments **G**′, **G**″, **G**‴ seraient situées sur des îles résultant de la réunion de **G**′ et **G**″. Il en serait de même dans les autres cas.

Le polygone γ se compose, de même, de portions de tous les polygones Γ', Γ'', Γ''' (de sorte que les portions des polygones Γ', Γ''' n'ont pas de point commun, ce qui est une conséquence de la supposition faite sur **G**′, **G**‴). Supposons que γ se compose de la portion $A_1\ A_2$ du polygone Γ'', de la portion $A_2\ A_3$ d'un des polygones Γ', Γ''', de la portion $A_2\ A_4$ du polygone Γ'', ..., de la portion $A_{2\lambda-1}\ A_{2\lambda}$ du polygone Γ'' et enfin de la portion $A_{2\lambda}\ A_1$ appartenant ou à Γ' ou à Γ'''. Supposons, de plus, que les points A_1, A_2, A_3, ..., $A_{2\lambda}$, A_1 sont rangés dans le sens positif déterminé sur γ par rapport à l'intérieur de l'île. Je dirai tout à l'heure quel point sera désigné par A_1; par là sera aussi déterminé, d'une manière univoque, le sens, en lequel sont employées les lettres A_2, ... $A_{2\lambda}$.

Soit B un point situé, en même temps, sur Γ et Γ''. Si l'on parcourt, en partant de B, Γ'' (le polygone extérieur du segment **G**″) dans le sens négatif, on parcourt ce polygone tout entier. C'est le premier point de γ qu'on atteindra, que nous désignerons par A_1. Alors, en continuant, à partir de A_1, de parcourir Γ'' dans le sens indiqué, on parcourra $A_1\ A_2$, puis, quittant γ et continuant de parcourir Γ'' dans le même sens, on parviendra à A_3 et on parcourra $A_3\ A_4$, portion de γ, etc., jusqu'à ce qu'on aura parcouru toutes les portions du polygone

*) C. à d. on aurait une île que ne serait pas située sur une île résultant de la réunion de **G**′ et **G**″, ou de **G**‴ et **G**″.

Γ'' qui font partie du polygone γ; ce parcours sera effectué dans l'ordre, dans lequel ces points seront parcourus si l'on avance sur γ dans le sens positif par rapport à l'intérieur du polygone γ. Car le polygone Γ'' ne se coupe pas lui-même, et ne passe pas par l'intérieur de l'île limitée par le polygone γ. Mais la portion $A_1\ A_{2\lambda}$ du polygone Γ'', parcourue de cette manière, délimite, avec la portion $A_{2\lambda}\ A_1$ du polygone γ, laquelle appartient au polygone Γ' ou Γ''', un polygone dont l'intérieur contient l'île, limitée par le polygone γ, tout entière; il en suit que l'île limitée par le polygone γ est située ou sur l'île résultant de la réunion de Γ'' et Γ' ou sur l'île résultant de la réunion de Γ'' et Γ''', ce qui est en contradiction avec la supposition faite sur cette île.

Donc, les îles résultant de la réunion des trois segments $\mathbf{g}_{0,\,m-2}$, $\mathbf{g}_{m-2,\,m-1}$, $\mathbf{g}_{m-1,\,m}$ appartiennent à l'une des trois espèces: 1., 2., 3. et il n'en résultent pas d'autres. Toutes ces îles ont la propriété que leur plus grande dimension est inférieure à 2δ. Faisons le voir pour les îles de l'espèce 3. Ces îles font partie des îles résultant ou de la réunion de $\mathbf{g}_{0,\,m-2}$ et $\mathbf{g}_{m-2,\,m-1}$, ou de la réunion de $\mathbf{g}_{m-2,\,m-1}$ et $\mathbf{g}_{m-1,\,m}$. Dans le premier cas, c'est $\mathbf{g}_{0,\,m-1}$ qui se produit; on suppose que le segment $\mathbf{g}_{0,\,m-1}$ ne possède pas d'île dont la dimension maximum ne soit moindre que 2δ. Dans le deuxième cas, la réunion produit $\mathbf{g}_{m-2,\,m}$; ce segment ne possède pas, non plus, de telles îles (la raison en est la même que pour $\mathbf{g}_{0,\,2}$).

Donc, le segment $\mathbf{g}_{0,\,m}$ ne possède pas d'île dont la dimension maximum soit supérieure ($\geqq$) à 2δ. Le résultat auquel nous sommes parvenus est donné par le théorème:

Le segment de plan appartenant, dans le réseau de carrés considéré, à $\{t_0,\ t_0 + m\varepsilon\}$, où

$$m < n,\ \varepsilon = \frac{\omega}{n}$$

ne possède pas d'îles dont la dimension maximum soit supérieure ($\geqq$) à 2δ.

C'est d'une considération analogue que suit encore le théorème:

Le segment de plan appartenant, dans le réseau de carrés, à $\{t_0,\ t_0 + m\varepsilon\}$ ne possède pas d'îles qui contiennent des points dont la distance minimum à $\{t_0,\ t_0 + m\varepsilon\}$ soit supérieure ($\geqq$) à δ.

Il suffit, en effet, de se rendre compte qu'il n'y a pas à l'intérieur du carré $O\ (A,\ \delta)$ de points sur $\{t_0,\ t_0 + m\varepsilon\}$, si la distance minimum du point A à $\{t_0,\ t_0 + m\varepsilon\}$ est $\geqq\ \delta$.

On voit, en fin de compte, qu'au lieu d'ajouter, à la fin, aux segments précédents, le segment $\mathbf{g}_{m-1,\,m}$, appartenant à $\{t_0 + (m-1)\ \varepsilon,$

$t_0+m\varepsilon\}$, on peut ajouter le segment appartenant à $\{t_0+(m-1)\ \varepsilon,$ $t_0+(m-1+\vartheta)\ \varepsilon\}$, où ϑ est un nombre positif inférieur à l'unité, sans que cet échange exerce de l'influence sur la propriété essentielle, démontrée pour le segment final; donc, on peut énoncer encore le théorème suivant:

Le segment de plan, appartenant, dans le réseau quadratique considéré, à $\{t_0, t_1\}$, où $t_1 > t_0$, $t_0+\omega \geqq t_1+\varepsilon$, $\varepsilon=\omega : n$, ne possède ni d'îles dont la dimension maximum soit supérieure ($\geqq$) à 2δ, ni d'îles contenant des points dont la distance minimum à $\{t_0, t_1\}$ soit supérieure ($\geqq$) à δ.

Il suit, en même temps, de la considération donnée ci-dessus, que toutes les îles du segment $\mathfrak{g}_{0,m}$ sont des portions: ou des îles sur les segments

$$\mathfrak{g}_{i,\ i+1} \qquad i=0,\ 1,\ 2, \ldots, m-1$$

ou des îles résultant de la réunion des segments

$$\mathfrak{g}_{i-1,\ i},\ \mathfrak{g}_{i,\ i+1} \qquad i=1,\ 2, \ldots, m-1$$

deux à deux.

Car, si l'on suppose que ce qui vient d'être affirmé a lieu pour le segment $\mathfrak{g}_{0,\ m-1}$, on déduit, de suite, de la considération faite, qu'il en est ainsi encore de $\mathfrak{g}_{0,\ m}$.

Il reste d'examiner le segment de plan appartenant, dans le réseau des carrés, à la courbe fermée C tout entière. On obtient ce segment en ajoutant au segment $\mathfrak{g}_{0,\ n-1}$ le segment $\mathfrak{g}_{n-1,\ n}$. A ce but, il faut déduire d'autres propriétés des segments $\mathfrak{g}_{0,\ m}$, $m<n$, en faisant une supposition qui restreint le nombre positif δ.

IV.

Dans ce qui suit, je supposerai, tout le temps, que

$$\delta \leqq \frac{1}{6}\Delta, \qquad (\pi)$$

ou Δ signifie la dimension maximum de la courbe C. Il est évident, d'abord, que si l'on ajoute le segment $\mathfrak{g}_{i,\ i+1}$ au segment $\mathfrak{g}_{0,\ i}$, le segment résultant $\mathfrak{g}_{0,\ i+1}$ contient un nombre de carrés du réseau supérieur à celui contenu dans $\mathfrak{g}_{0,\ i}$, car $\mathfrak{g}_{i,\ i+1}$ contient, p. ex., le point $[t_0+(i+1)\ \varepsilon]$ dont la distance à tous les points de la portion $\{t_0, t_0+i\varepsilon\}$, à laquelle appartient le segment $\mathfrak{g}_{0,\ i}$, est $\geqq \eta$; donc, etc. Mais il se pourrait que tous les carrés du réseau qui font la différence entre $\mathfrak{g}_{0,\ i+1}$ et $\mathfrak{g}_{0,\ i}$ (les carrés nouveaux) tombassent à l'intérieur de l'île située dans $\mathfrak{g}_{0,\ i}$. En ce cas, l'intérieur de cette île contiendrait encore le segment $\mathfrak{g}_{i+1,\ i+2}$

qui n'est en connexion qu'avec les carrés du segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ et n'est pas rattaché au segment $\mathbf{g}_{0,\,i}$ (leur distance mutuelle surpassant $\frac{1}{2}\,\eta$); et de même, les segments qui suivent: $\mathbf{g}_{i+2,\,i+2}$, $\mathbf{g}_{i+3,\,i+4}, \ldots$, ajoutés un à un, se trouveraient à l'intérieur de cette île.

Supposons que, dans la série de segments $\mathbf{g}_{k,\,k+1}$, $k = 1, 2, 3 \ldots, n-2$, le segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ soit le premier à posséder la propriété qui vient d'être mentionnée (celle que tous les carrés ajoutés à $\mathbf{g}_{0,\,i}$ par addition du segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ se trouvent à l'intérieur d'une île du segment $\mathbf{g}_{0,\,i}$). En ce cas, ces carrés tomberaient, ou dans l'île se trouvant dans $\mathbf{g}_{i-1,\,i}$, ou dans l'île formée par les polygones extérieurs des segments $\mathbf{g}_{i-2,\,i-1}$, $\mathbf{g}_{i-1,\,i}$, ou bien dans l'île formée par les polygones extérieurs de $\mathbf{g}_{i-3,\,i-2}$, $\mathbf{g}_{i-2,\,i-1}$; cette île contiendrait encore une partie de carrés qui s'ajoutent aux précédents lorsqu'on joint $\mathbf{g}_{i-1,\,i}$ à $\mathbf{g}_{0,\,i-1}$ (auxquels se joindrait encore le segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$, qui tomberait tout entier dans cette île.)*)

Examinons le dernier de ces trois cas (c'est celui qui est le moins favorable pour notre raisonnement). En ce cas, l'île formée par les polygones extérieurs des segments $\mathbf{g}_{i-3,\,i-2}$, $\mathbf{g}_{i-2,\,i-1}$ contient le segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ tout entier et contient, par suite de ce qui vient d'être dit, de même les segments

$$\mathbf{g}_{i+1,\,i+2},\ \mathbf{g}_{i+2,\,i+3}, \ldots, \mathbf{g}_{n+i-5,\,n+i-4} \equiv \mathbf{g}_{i-5,\,i-4}$$

si on les ajoute un à un; c. à d. la courbe C tout entière, à l'exception de la portion $\{t_0 + (i-4)\,\varepsilon,\ t_0 + (i-3)\,\varepsilon\}$ se trouve à l'intérieur du polygone extérieur du segment $\mathbf{g}_{i-3,\,i}$ (lequel résulte de la réunion des trois segments $\mathbf{g}_{i-3,\,i-2}$, $\mathbf{g}_{i-2,\,i-1}$, $\mathbf{g}_{i-1,\,i}$). La plus grande dimension de ce segment est plus petite que $3\delta + 2\alpha$ [car les deux premiers segments dont il se compose se trouvent dans le carré $O\,(t_0 + (i-2)\,\varepsilon,\ \delta + \alpha)$ au côté $2\delta + 2\alpha$; le troisième segment se trouve dans le carré $O\,(t + (i-1)\,\varepsilon,\ \delta + \alpha)$, dont le centre est dans le carré $O\,(t_0 + (i-2)\,\varepsilon,\ \delta)$]. Mais, si l'on retranche de C la portion $\{t_0 + (i-4)\,\varepsilon,\ t_0 + (i-3)\,\varepsilon\}$, le reste de la courbe a une dimension plus grande, à coup sur, que 4δ — ce qui suit de la relation (π) — et le reste ne peut pas être contenu dans le segment $\mathbf{g}_{i-3,\,i}$. Donc, le troisième cas, mentionné ci-dessus, ne peut pas se produire; il en est, par suite, de même, des deux premiers.

Si, donc, on ajoute au segment $\mathbf{g}_{0,\,i}$ le segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$, ce qui change $\mathbf{g}_{0,\,i}$ en $\mathbf{g}_{0,\,i+1}$, au moins une partie de l'accroissement (qui est

---

*) Il n'est pas possible qu'une partie seulement du segment $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ se trouve à l'intérieur de l'île formée par les polygones extérieurs des segments $\mathbf{g}_{i-3,\,i-2}$, $\mathbf{g}_{i-2,\,i-1}$; car tout segment de plan est connexe, et de plus, $\mathbf{g}_{i,\,i+1}$ n'a de point commun, ni avec $\mathbf{g}_{i-3,\,i-2}$, ni avec $\mathbf{g}_{i-2,\,i-1}$.

la différence entre $g_{0,\,i+1}$ et $g_{0,\,i}$) est située à l'extérieur du polygone extérieur du segment $g_{0,\,i}$. On voit, de plus, que le point de départ $[t_0]$ peut être un point quelconque de la courbe C; au lieu du point $[t_0]$ on peut prendre pour point de départ le point $[t_0 + j\varepsilon]$ et le théorème qui vient d'être démontré s'étend par-là encore au cas où l'on ajouterait, au segment $g_{j,\,e}$, le segment $g_{e,\,e+1}$. Il est évident, de même, qu'on pourrait avancer, d'une manière analogue, dans le sens contraire, c. à d., ajouter au segment $g_{j,\,e}$ le segment $g_{j-1,\,j}$.

Il est encore démontré, par là, que les îles se trouvant dans le segment $g_{0,\,m}$ ne peuvent être limitées que par des côtés de quatre segments différents $g_{k,\,k+1}$ consécutifs.

C'est donc une conséquence des considérations précédentes qu'au polygone extérieur du segment $g_{0,\,m}$ — où $m < n$ — se rattachent des carrés du segment $g_{0,\,m}$ appartenant au segment $g_{m-1,\,m}$ et des carrés du segment $g_{0,\,m}$ appartenant au segment $g_{0,\,1}$ (de sorte que les côtés de ces carrés font partie du polygone extérieur du segment $g_{0,\,m}$). Pour être court, je dirai qu'un côté d'un carré du réseau qui appartient au segment $g_{i,\,i+1}$ et n'appartient à aucun autre segment $g_{k,\,k+1}$, où $k \neq i$, est de l'espèce (i); après avoir fait cette convention, on peut exprimer la conséquence tirée ci-dessus comme il suit: Sur le polygone extérieur du segment $g_{0,\,m}$ il y a des côtés de l'espèce $(m-1)$ et de l'espèce (0).

Nous dirons encore qu'un côté est de l'espèce $(i,\ i+1)$, si c'est un côté d'un carré appartenant en même temps aux deux segments $g_{i,\,i+1}$, $g_{i+1,\,i+2}$.*)

Prenons, maintenant, pour point de départ le point O situé sur le polygone extérieur de segment $g_{0,\,m}$ et sur un côté de l'espèce $(m-1)$ et parcourons le polygone extérieur dans un sens déterminé; nous parviendrons necéssairement à des cotés de l'espèce (0) ou de l'espéce (0, 1). Soit A le point initial du premier de ces côtés auxquels on parvient de cette manière (il n'y a donc pas de côtés de l'espèce (0), (0, 1) sur la portion OA du polygone extérieur). Si l'on avance, à partir de A, sur le polygone extérieur du segment $g_{0,\,m}$, toujours dans le même sens, on arrive nécessairement au point B, qui est une extrémité d'un des côtés de l'espèce (0), (0, 1) et tel qu'en continuant le parcours de B à O on ne rencontre plus de côtés de l'espèce (0), (0, 1).

---

*) Il ne se peut pas qu'un même carré appartienne, en même temps, à deux segments $g_{k,\,k+1}$ autres que ceux dont les indices diffèrent de l'unité, comme nous le savons par II. 5.

Sur AB*) sont, par suite, situés tous les côtés des espèces (0), (0, 1) se trouvant sur le polygone extérieur du segment $g_{0,m}$. Nous trouverons, d'une manière analogue, des points C, D tels que sur la portion CD sont situés tous les côtés des espèces $(m-1)$, $(m-1, m-2)$ se trouvant sur le polygone extérieur du segment $g_{0,m}$. Sur CD se trouve, bien entendu, le point O et les points C, D sont les extrémités de côtés des espèces $(m-1)$, $(m-1,\ m-2)$.

Dans cet ordre d'idées, on voit d'abord: Sur DA se trouvent certainement des côtés des espèces (1), (2), (3), . . . , $(m-2)$ et peuvent se trouver encore des côtés de l'espèce $(j, j+1)$, où $j = 1, 2, \ldots, m-3$. Car un côté de l'espèce (i) ne peut avoisiner qu'à des côtés des espèces (i) $(i-1)$, $(i+1)$, $(i, i+1)$, $(i-1, i)$. Un côté de l'espèce $(i-1, i)$ ne peut avoisiner qu'à des côtés des espèces (i), $(i-1)$, $(i-1, i)$; c. à d. à des côtés dont l'espèce n'est pas caractérisée par d'autres indices que ceux qui caractérisent le côté lui-même. Donc si l'on parcourt DA — en conservant toujours le même sens — on rencontre nécessairement des côtés des espèces (1), (2), . . . , $(m-2)$. Au point D lui-même aboutit p. ex. un côté de l'espèce $(m-2)$. Ce qui vaut pour DA, est encore valable pour BC.

On peut, de plus, démontrer facilement: il n'y a pas, sur AB, de côtés de l'espèce caractérisée par un indice (des indices) supérieur à l'unité. Supposons p. ex. qu'il y ait là des côtés caractérisés par l'indice 2, c. à d. des côtés de l'une des espèces: (2), (1, 2), (2, 3). Alors, si l'on retranchait du segment $g_{0,m}$ tous les carrés du segment $g_{2,3}$, et cela même, si, par hasard, ces carrés appartiennent aussi à d'autres segments (au segment $g_{1,2}$ ou $g_{2,3}$), le segment $g_{0,m}$ se décomposerait en trois parties, au moins (car $g_{2,3}$ est un segment connexe et sa frontière touche à la frontière le long de trois parties différentes, non contiguës, dont l'une se trouve sur DA, l'autre sur BC, la troisième, d'après la supposition faite tout à l'heure, sur AB). Les côtés des espèces (0), (0, 1) se trouveraient dans deux au moins des parties en lesquelles $g_{0,m}$ se décompose. Par suite, $g_{0,1}$ se décomposerait aussi, par le retranchement effectué, ce qui est impossible, puisque $g_{0,1}$ et $g_{2,3}$ n'ont pas de carré commun (ni de point commun).

On démontre de la même manière: Sur CD ne se trouve pas de côté qui soit caractérisé par un indice inférieur à $m-2$. Appelons les

*) Nous entendons par AB la portion du polygone extérieur $g_{0,m}$ limitée par les points A, B, laquelle on parcourt, en avançant de A à B sur ce polygone, dans le même sens, dans lequel on a avancé de O à A. Une signification analogue ont, dans ce qui suit, CD, BA, BC.

portions *AB, CD portions extrêmes du polygone extérieur* du segment $g_{0, m}$; les portions *BC, DA portions principales de ce polygone.*

Mais on peut donner aussi une description plus détaillée de la composition des portions principales. Désignons par L_i M_i*) la section de la portion principale *BC* sur laquelle se trouvent tous les côtés des carrés du réseau caractérisés par le nombre i, c. à d. les côtés des espèces (i), $(i-1, i)$, $(i, i+1)$. Il n'y a donc pas, à l'extérieur de cette section, sur *BC* de côtés de ces espèces; nous exigeons, de plus, que L_i, M_i soient, respectivement, le point initial et le point final d'un côté d'une de ces espèces. Il est évident que le côté situé sur *BC*, ayant L_i pour point final (et se rattachant, par suite, à $L_i M_i$ au point initital de cette section) est de l'espèce $(i-1)$, et que le côté, se rattachant, sur *BC* à $L_i M_i$ au point final M_i, est de l'espèce $(i+1)$. On a de cette manière, sur *BC*, les sections

$$L_i M_i; \qquad i = 2, 3, \ldots, m-3 \qquad (\varrho)$$

On a, d'une manière analogue, sur la portion principale *DA*, des sections

$$N_i K_i \qquad i = 2, 3, \ldots, m-3 \qquad (\sigma)$$

définies de la même façon. Mais la section $N_i K_i$ se rattache — en quoi elle diffère de la section $L_i M_i$ – à son point initial, au côté de l'espèce $(i+1)$ situé sur *DA*, au point final au côté de l'espèce $(i-1)$. C'est par-là que les deux sections $L_i M_i$, $N_i K_i$ sont distinguées.

Les sections $L_i M_i$ $(N_i K_i)$ empiètent, en général, l'une sur l'autre, et on a le théorème: Sur les sections $L_i M_i$, $N_i K_i$ il n'y a de côtés des carrés du réseau que ceux, respectivement, des espèces (i), $(i, i+1)$, $(i-1, i)$, $(i-1)$, $(i+1)$. La démonstration de ce théorème est la même que celle donnée plus haut pour le théorème affirmant que la portion extrême *AB* ne contient que des côtés des espèces (0), (1), (0, 1); il n'est pas nécessaire de reprendre cette démonstration.

V.

Soit, maintenant, $m = n - 1$ et passons à examiner — en supposant toujours valable l'inégalité (π) — le segment de plan appartenant à la courbe fermée *C* tout entière. Ce segment se produit quand on réunit les segments $g_{0, n-1}$ et $g_{n-1, n}$. On aura, dans le segment résultant, avant tout, les îles suivantes:

---

*) Dans cette notation L_i est le point initial, M_i le point final de ce section, si l'on parcourt la frontière extérieure de section considérée dans un sens déterminé (celui dans lequel on parcourt les points *A*, *B*, *C*, *D*, dans cet ordre).

1. Les îles se trouvant dans $\mathfrak{g}_{0,\,n-1}$; de celles-ci, quelques-unes peuvent être diminuées, par suite de la réunion, de carrés qui appartiennent à $\mathfrak{g}_{n-1,\,n}$ et empiètent sur ces îles.

2. Les îles se trouvant dans $\mathfrak{g}_{n-1,\,n}$; celles-ci encore peuvent être diminuées, pour la même raison, de carrés du réseau appartenant à $\mathfrak{g}_{0,\,n-1}$.

3. Les îles produites par ce que le polygone extérieur à $\mathfrak{g}_{n-1,\,n}$ se rattache à l'une ou l'autre portion extrême du polygone extérieur appartenant à $\mathfrak{g}_{0,\,n-1}$.

Toutes les îles de ces trois espèces sont, pour des raisons précisées ci-dessus, telles que leur dimension est inférieure à 2δ et qu'elles ne contiennent pas, à l'intérieur, de points dont la distance minimum à C soit supérieur ($\geqq$) à δ. Toutes ces îles n'ont pas d'importance pour ce qui suit et nous ne nous en occuperons pas dans la suite. Ce sont, par contre, les frontières du segment $\mathfrak{g}_{0,\,n}$, dont les portions principales du polygone extérieur à $\mathfrak{g}_{0,\,n-1}$ sont une composante, c. à d. les portions DA, BC, qui ont une importance décisive pour nos recherches. Ces portions passent, sans aucun changement, dans la frontière du segment $\mathfrak{g}_{0,\,n}$; car le segment $\mathfrak{g}_{n-1,\,n}$ n'a pas, avec elles, de point commun (sa distance minimum à ces portions étant $\geqq 2\,\alpha$); par suite du fait mentioné en paranthéses, sur la frontière du segment $\mathfrak{g}_{0,\,n}$ se trouveront, en tout cas, au moins deux côtés appartenant aux portions extrêmes et voisins, aux points A, B, C, D, aux portions principales.

Pour simplifier, je ferai, dans ce qui suit, la supposition que n est pair; je supposerai, de plus, que ce nombre surpasse le nombre 18; vu la signification du nombre n — v. les relations (I), (a) — ces suppositions n'impliquent aucune restriction de la generalité. Posons

$$n = 2\nu, \qquad \nu > 9$$

On peut considérer le segment $\mathfrak{g}_{0,\,n}$ aussi comme résultant de la réunion des segments $\mathfrak{g}_{0,\,n-1}$, $\mathfrak{g}_{\nu,\,\nu+(n-1)}$. Désignons les portions extrêmes et les portions principales du polygone extérieur à $\mathfrak{g}_{\nu,\,\nu+n-1}$, d'une manière analogue, respectivement par $A'B'$, $C'D'$; $B'C'$, $D'A'$. La portion $A'B'$ contient des côtés de l'espèce (ν) et $C'D'$ des cotés de l'espèce $(\nu + n - 2) \equiv (\nu - 2)$; les points A', B', C', D' se succèdent, bien entendu, quand on parcourt le polygone extérieur dans le sens déterminé, d'une manière univoque, par ce qui vient d'être fixé.

Les portions principales BC, DA se composent, comme nous l'avons constaté ci-dessus (v. (ϱ) et (σ)) de sections

$$L_i\, M_i,\ N_i\, K_i\,; \qquad i = 2,\ 3, \ldots, n-4;$$

d'une manière analogue, les portions principales $B' C'$, $D' A'$ se composent de sections déterminées de la même façon:

$$L'_{\nu+i} M'_{\nu+i},\ N'_{\nu+i} K'_{\nu+i} \qquad i = 2, 3, \ldots, n-4$$

Considérons, d'abord, l'ensemble de ces sections

$$L'_{\nu+j} M'_{\nu+j} \qquad j = 2, 3, \ldots, \nu-4$$

Ces sections forment, dans leur ensemble, une certaine portion connexe de la partie principale $B' C'$, et cette portion se trouve encore à la frontière du segment $g_{0, n-1}$. Car cette portion passe, sans changement, dans la frontière du segment $g_{0, n}$, et celui-ci se produit par la réunion de $g_{n-1, n}$ et $g_{0, n-1}$; mais, si l'on ajoute $g_{n-1, n}$, la frontière ne change point, si l'on ne considère que sa partie formée par les carrés appartenant aux segments $g_{k, k+1}$, $k = 2, 3, \ldots, n-4$. La portion considérée ne peut, non plus, former la frontière d'une île de $g_{0, n-1}$, puisque une île contenue dans $g_{0, n-1}$ ne peut être limitée que par les côtés des carrés appartenant à quatre segments $g_{k, k+1}$ différents, tandis qu'à la formation de la portion considérée participent des segments au nombre $\nu - 5 > 4$. Donc, cette portion coïncide avec une portion d'une partie principale du polygone extérieur à $g_{0, n-1}$; c. à d. $L'_{\nu+j} M'_{\nu+j}$ coïncide ou avec $L_{\nu+j} M_{\nu+j}$ ou avec $N_{\nu+j} K_{\nu+j}$. Mais, par suite de la différence existant entre $L_i M_i$ et $N_i K_i$ (et, d'une manière analogue) entre $L'_{\nu+i} M'_{\nu+i}$ et $N'_{\nu+i} K_{\nu+i}$ (et laquelle a sa raison dans les côtés voisins sur les polygones extérieurs à $g_{0, \nu-1}$, $g_{\nu, \nu+n-1}$), $L'_{\nu+j} M'_{\nu+j}$, ne peut pas coïncider avec $N_{\nu+j} K_{\nu+j}$ et coïncide, par conséquent, avec $L_{\nu+j} K_{\nu+j}$. Et, d'une façon générale, les traits polygonaux $L_r M_r$, $N_r K_r$ coïncident, respectivement, avec les traits $L'_s M'_s$, $N'_s K'_s$, si $r = s$, ou $r + n = s$, c. à d. si $r \equiv s$ (mod n).

Si, alors, on écrit, au lieu de K', L', M', N' tout simplement K, L, M, N, et, au lieu des indices $n+1, n+2, n+3, \ldots$ les indices $1, 2, 3, \ldots$, on a, comme conséquence de ce qui précède, deux séries de traits polygonaux

$$\left.\begin{matrix} L_k M_k \\ N_k K_k \end{matrix}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dont chacun a plusieurs côtés des carrés du réseau communs avec le trait consécutif, ou, au moins, un point, et dont le dernier est identique au premier. Ces séries de traits polygonaux forment deux polygones fermés, situés sur la frontière du segment $g_{0, n}$. Puisque ces polygones sont formés d'après les règles de l'article II. 2. — car les mêmes polygones fermés se produisent, aussi, si l'on compose les parties principales BC et $B'C'$, ou DA et $D'A'$ — et que BC coïncide, sur ses

extrémités, avec $B'C'$ le long de toute une série de carrés du réseau, et de même, DA avec $D'A'$, ces polygones sont simples. Ajoutons qu'ils n'ont pas de point commun, car, s'il en était ainsi, les deux sections $L_k M_k$, $N_k K_k$ (au même indice) auraient un point commun, ce qui est impossible, puisque les polygones extérieurs respectivement à $g_{0, n-1}$ et à $g_{\nu, \nu+n-1}$ sont simples. Un de ces polygones est, bien entendu, extérieur, l'autre est intérieur. Désignons le premier par Γ, l'autre par γ. Sur ces polygones se trouvent les côtés des carrés de tous les segments $g_{i, i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. La plus grande dimension de chacun de ces polygones est, évidemment, supérieure à $6\delta - (2\delta + 2\alpha)$, c. à d., supérieur à 3δ.

Nous avon trouvé, ainsi, en définitif, ce résultat: Le ségment du plan, appartenant à la courbe C aux équations (1) dans le réseau de carrés fondé sur le nombre δ inférieur à un sixième de la plus grande dimension de la courbe C, est limité, en partie, par le polygone extérieur Γ, en partie par un polygone intérieur γ, dont la plus grande dimension surpasse 3δ; en outre, la frontière de ce segment peut être formée par des polygones intérieurs dont la plus grande dimension est inférieure, cependant, à 2δ. Les points dont la moindre distance à C est supérieure ($\geqq$) à δ, sont ou à l'extérieur du polygone Γ ou à l'intérieur du polygone γ (ces deux polygones étant des polygones ne se coupant pas, composés de côtés des carrés du réseau).

VI.

Choisissons, dans le plan XY, un point $[\xi_0, \eta_0]$, où ξ_0 est, p. ex. plus petit que la limite inférieure de la fonction $f(t)$ [prise dans une des équations (1) de la courbe C]. En prenant le point $[\xi_0, \eta_0]$ pour point de départ, nous énoncerons la définition suivante:

Tout point du plan qui, n'étant pas situé sur C, peut être joint au point $[\xi_0, \eta_0]$ par une ligne brisée n'ayant pas de point commun avec C, s'appelle point extérieur à C.

Tout point du plan qui, n'étant pas situé sur C, ne peut être joint au point $[\xi_0, \eta_0]$ par une ligne brisée n'ayant pas de point commun avec C, s'appelle point intérieur à C.

Il suit de cette définition:

1. *Il y a des points extérieurs et des points intérieurs par rapport à C.* Qu'il y a des points extérieurs à C, cela est évident immédiatement. Tout point situé en dehors de Γ a la propriété exigée par la définition. Qu'il y a des points intérieurs, c'est ce qu'on peut démontrer facilement. C'est qu'on peut démontrer que tout point situé à l'intérieur de γ est un

point intérieur. Supposons, en effet, qu'il y ait un point $[\xi'_0, \eta'_0]$ se trouvant à l'intérieur de γ, qui ne soit pas point intérieur et que l'on puisse, par conséquent, joindre au point $[\xi_0, \eta_0]$ par une ligne brisée n'ayant pas de point commun avec C — désignons-la pour le moment, par Λ. La ligne Λ aurait une certaine distance minimum, non nulle, à C (ce qui est une conséquence des propriétés des fonctions continues). Remplaçons le réseau quadratique au coté α, dont nous avons fait usage dans nos raisonnements, par un réseau quadratique nouveau, ayant la même origine et des côtés parallèles aux axes X, Y, mais dont le côté soit $\alpha : N$, où N est un entier positif. On aura alors, au lieu du polygone intérieur γ un polygone γ_N; ce polygone contiendra, à l'intérieur, toute la portion du plan XY contenue dans γ, et, en outre, d'autres carrés au coté $\alpha \, . \, N^{-1}$. Donc, le point $[\xi'_0, \eta'_0]$ se trouvera aussi à l'intérieur de γ_N; la ligne brisée joignant $[\xi'_0, \eta'_0]$ à $[\xi_0, \eta_0]$ coupera le polygone γ_N en un point, du moins, et ce point aura une distance moindre que αN^{-1} à C; par suite Λ contient un point ayant une distance plus petit que $\alpha \, . \, N^{-1}$ à C. Mais, si l'on choisit N assez grand, $\alpha \, . \, N^{-1}$ est plus petite que ϱ et la plus petite distance de Λ à C ne peut pas différer de zéro; dont, cette distance est nulle et Λ coupe la courbe C.

2. *Tout point du plan, n'appartenant pas à la courbe C, est un point ou intérieur ou extérieur par rapport à C.* En effet, étant donné un point quelconque du plan, n'appartenant pas à C et dont la plus petite distance à C soit σ, construisons un réseau quadratique fondé sur un nombre δ plus petit, d'une part, que σ, d'autre part que le sixième de $\varDelta$. Alors le point donné se trouve ou à l'extérieur de Γ ou à l'intérieur de γ, ce qui établit la proposition.

3. Chaque couple de points intérieurs par rapport à C peut être joint par une ligne brisée ne coupant pas C. Il en est de même pour un couple de points extérieurs par rapport à C. Un point intérieur par rapport à C et un point extérieur par rapport à C ne peuvent être joints par une ligne brisée ne coupant pas C. Si les plus petites distances de ces deux points à C sont données par les nombres σ_1, σ_2, prenons comme nombre δ un nombre inférieur aux nombres σ_1, σ_2, et au sixième de $\varDelta$; le théorème est, alors, évident. D'ailleurs, ce théorème peut être considéré, au moins en partie, comme une conséquence de la définition des points extérieurs et intérieurs.

Il est clair, par ce qui précède, qu'en effet, *la courbe continue C ayant les équations (1) divise le plan en deux régions: l'une des points extérieurs, l'autre des points intérieurs par rapport à C. Ces deux régions sont des domaines connexes; la frontière de ces deux domaines est donnée par tous les points de la courbe C.*

Cette dernière affirmation (que tout point de la courbe C est le point de la frontière de deux domaines) suit presque immédiatement des raisonnements donnés. Car on peut prendre pour point $[t_0]$ un point quelconque de la courbe C; les polygones Γ et γ ne dépendent nullement de ce choix; les côtés des carrés du réseau, formant les polygones extérieurs à $\mathfrak{g}_{0,1}$ et $\mathfrak{g}_{n-1,n}$, ont une distance plus petite que $\delta + \alpha$ au point $[t_0]$; mais de tels côtés se trouvent aussi bien sur Γ que sur γ. Il y a donc des points intérieurs et des points extérieurs à C dont la distance à $[t_0]$ est inférieure à $\delta + \alpha$, et, par suite, à 2δ; par conséquent, le point $[t_0]$ est un point de la frontière des domaines des points extérieurs et des points intérieurs.

Ainsi, le théorème de Jordan est démontré dans toutes ses parties.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 12.

MARIE KHOMOVÁ:

NĚKOLIK POZNÁMEK K ANATOMII STYLODRILA.

QUELQUES RECHERCHES ANATOMIQUES SUR LE STYLODRILUS.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 12.

MARIE KHOMOVÁ:

NĚKOLIK POZNÁMEK K ANATOMII STYLODRILA.

QUELQUES RECHERCHES ANATOMIQUES SUR LE STYLODRILUS.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Marie Khomová :

Několik poznámek k anatomii Stylodrila.

(Quelques recherches anatomiques sur le Stylodrilus.)

Podávám výsledky anatomických pozorování konaných u *Stylodrila* na popud a za přispění p. prof. Mrázka. Pojednání moje mělo býti jakýmsi doplňkem souborné práce Mrázkovy o *Lumbriculidech* z níž však toliko některé kapitoly byly nalezeny v jeho rukopisech. V jedné z nich pojednává o biologii rodu *Stylodrilus* a o systematické oprávněnosti dosud popsaných specií tohoto rodu. Práce tato bude později vydána a proto odvolávám se k ní pokud se týče popisu a biologie formy na níž jsem pozorování konala. Červ tento byl u nás v poslední době nalezen na několika místech (v Třeboni, na Šumavě na Pancíři, u Klatov, u Lásských rybníků, na Příbramsku atd; podrobněji o těchto lokalitách pojednává prof. Mrázek ve své práci), neshoduje se však úplně se žádnou z dosud popsaných specií *Stylodrila*. Výsledky anatomických pozorování na něm konaných ukazují nutnost nového, důkladného studia typické formy popsané Claparèdem r. 1862 jako *Stylodrilus heringianus Clap*; neboť teprve tehdy bude možno zjistiti specifické rozdíly a provésti revisi druhů tohoto rodu, která jest velmi naléhavá.

Průhlednost *Stylodrila* usnadňuje velmi jeho studium, neboť možno konati pozorování na živých exemplářích, čímž pak nabýváme přehledu a správného obrazu o topografii orgánů.

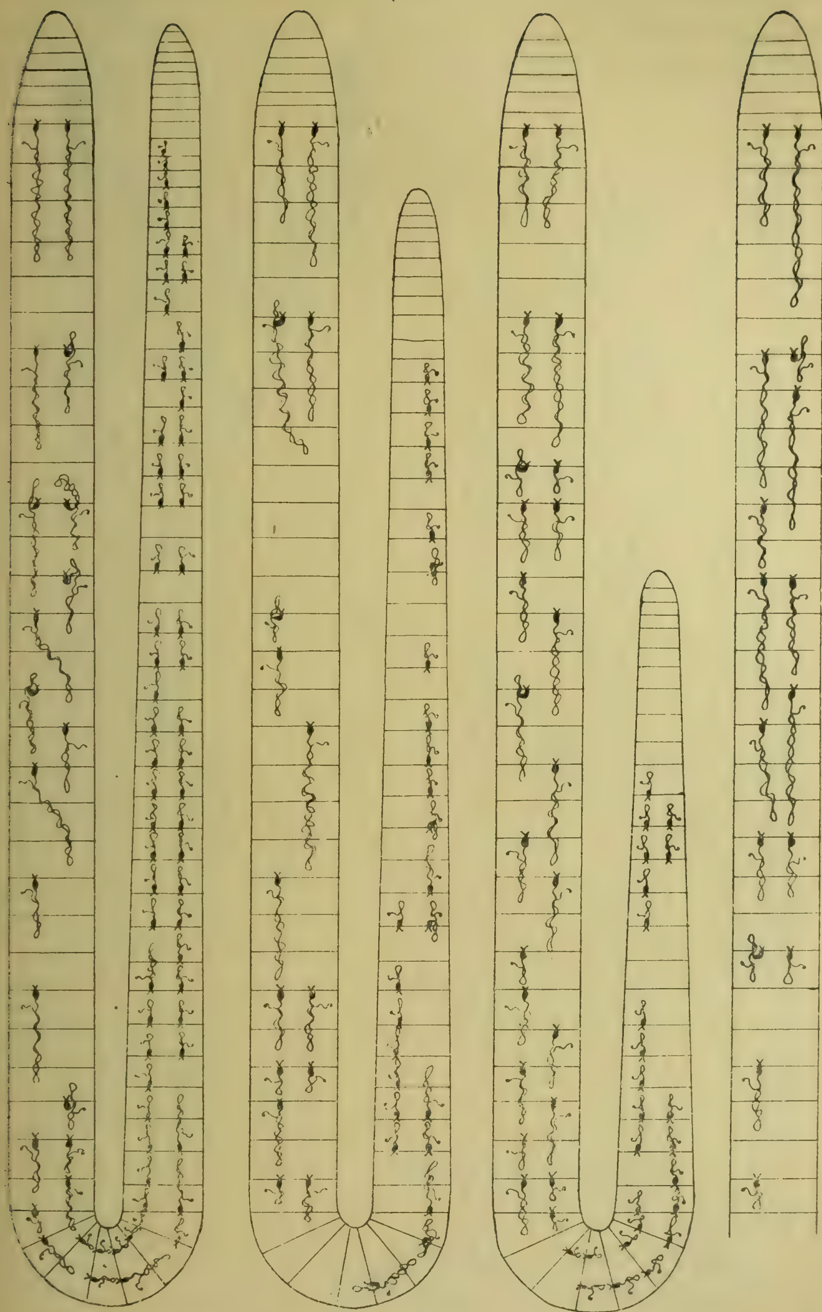
Pozornost naší upoutaly zvláštnosti apparátu exkrečního, pohlavního a cévního.

1. Exkreční apparát.

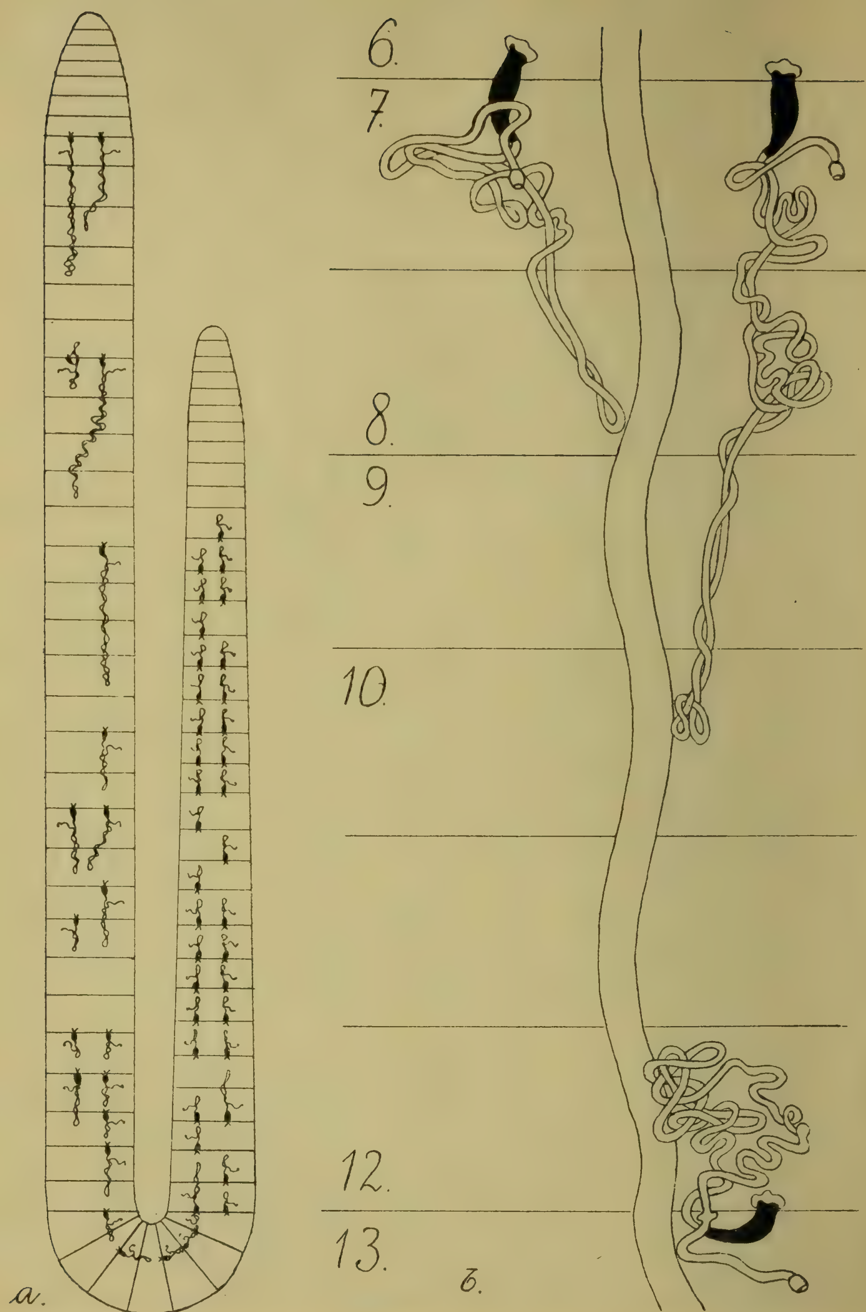
Nephridia *Stylodrila* skládají se z částí typických pro exkreční orgány všech nižších *Oligochaetů:* 1. z obrvené nálevky pronikající dissepimentem do předcházejícího článku tělního; 2. ze žlaznaté části postseptální hnědozeleně zbarvené a 3. z vývodného kanálku, velmi dlouhého, který se rozmanitě proplétá a vyúsťuje na ventrální straně

před štětinami. Pozorujeme-li živé jedince upoutá nás ohromná variabilita nephridiálního systému. Nenalezla jsem dvou exemplářů u nichž by následovala nephridia za sebou v tomtéž pořádku. Je totiž charakteristickým znakem exkrečního apparátu u *Stylodrila*, že není vytvořen ve všech článcích tělních a že vývodný kanálek prostupuje několika segmenty (až i 7mi) a vrací se pak opět do článku v němž se nalézá část postseptální a tam vyúsťuje. Kanálek vývodný často prostupuje i do článku předcházejícího v němž se nalézá nálevka. Připojená schemata znázorňují uložení nephridií u některých zajímavých exemplářů. (Obr. 1. a 2a.) Přihlédneme-li k nim blíže shledáme, že nephridia úplně chybí v prvých šesti článcích tělních; prvá nálevka proniká dissepimentem $^{6}/_{7}$. Tuto okolnost zjistila jsem s naprostou pravidelností u všech exemplářů jakož i další, že prvý a druhý pár nephridií má vývodné kanálky pronikající několika články tělními. Většinou pak nalézá se mezi prvým a druhým párem článek úplně postrádající exkrečního apparátu. Ve střední části těla jest „nephridií více“ t. j. kanálky jsou kratší, probíhají 2 n. 3 články a tudíž toliko každý druhý nebo třetí článek postrádá nálevky. Pravidelné uložení nephridií t. j. že v každém článku vytvořen jest jeden pár, nalézáme v zadní části těla a tu pak kanálky vývodné nevnikají do článků sousedních. Zajímavá jest další pravidelnost zjištěná pozorováním mnoha jedinců a opakující se s naprostou přesností u všech, že totiž posledních 10 segmentů postrádá nephridií dokonale vyvinutých, nálevkou opatřených. Ať jedná se o živočicha jakkoli dlouhého (čítají 70—110 článků) vždy proniká poslední nálevka dissepimentem $^{12}/_{11}$ počítáme-li od konce těla. K tomuto různému sledu nephridií přistupuje velmi hojně assymetrie čímž se variabilita značně zvětší. Často jest vytvořeno nephridium toliko na jedné straně, jindy přechází vývodný kanálek na př. levého nephridia do pravé poloviny téhož segmentu a pod. Někdy dokonce vnikají do téhož segmentu vývodné kanálky dvou za sebou následujících orgánů exkrečních, proplétají se a snad i splývají. Obr. 1. a 2.

Vývodní kanálky jsou v těsném spojení s cévou břišní, oplétají ji, přikládají se k ní a pod. Vztah tento dá se vysvětliti tím, že patrně tělu nepotřebné látky prolínají z krve přímo do exkrečních kanálků jimiž jsou pak odstraňovány. Jest to jakási obdoba jemných cévek oplétajících nephridia vyšších *Oligochaetů* za týmž účelem. Připojené obrazy znázorňují některé typické případy zvláštností nephridiálního systému a doufám, že přispějí k osvětlení podaného popisu. (Obr. 2b. a 3.). Poněvadž objevují se tyto zvláštnosti u všech exemplářů pocházejících i z různých lokalit je vyloučena možnost, že jedná se tu o zjevy teratologické vyvolané regenerací a pod.

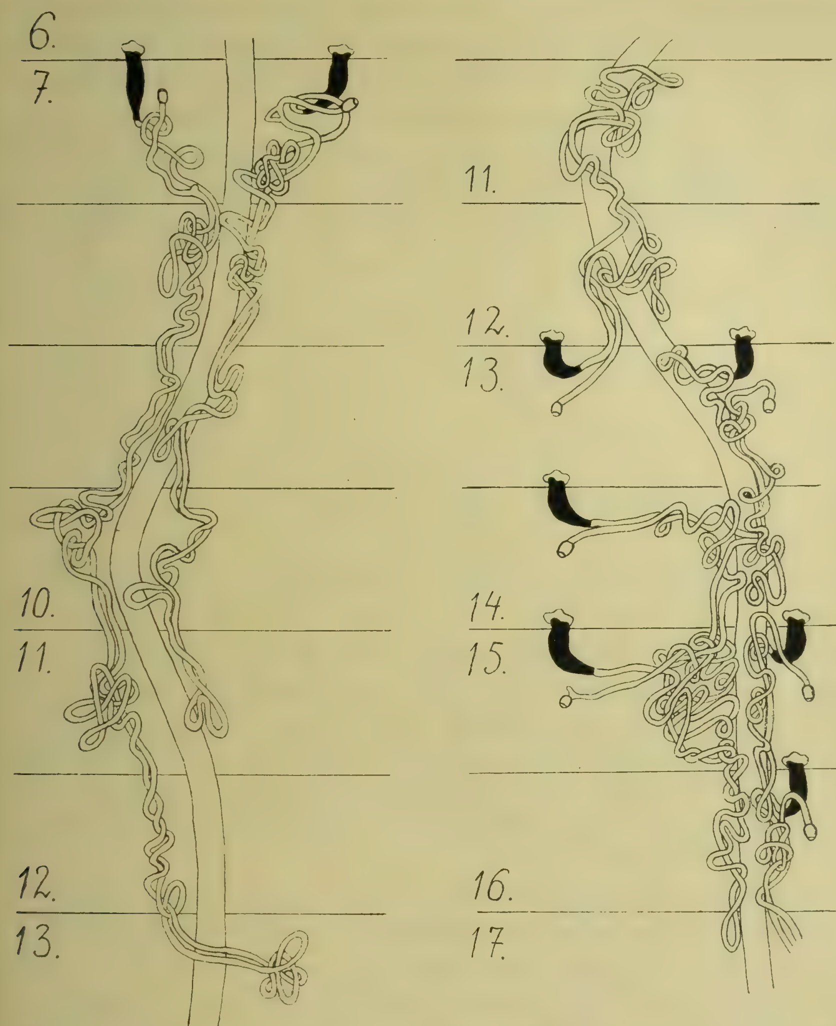


Obr. 1. Schemata uložení nephridiálního apparátu.



Obr. 2. Nephridiální systém: a) schema jeho uložení; b) 1. a 2. pár nephridií-

Kanálky vývodné nalézáme také v segmentech genitálních, nálevky k nim náležející a vývody jsou však v segmentech praegenitálních. Velmi často nalezla jsem v distální části exkrečního kanálku před malou

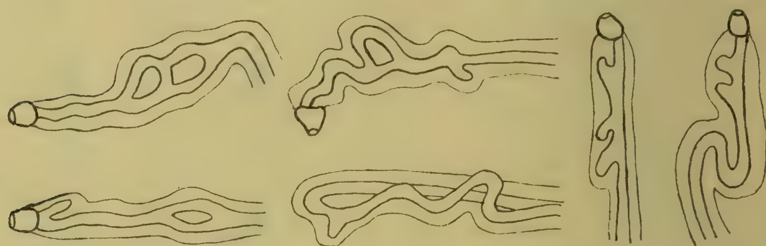


Obr. 3. Nephridia procházející několika segmenty.

terminální naduřeninou spojující nephridium s vnějškem krátké postranní výběžky nebo „ostrůvky" („Inselbildung" u exkrečního apparátu *Plathelminthů)*. Ponechávám nezodpověděnu otázku, je-li možno považovati tyto útvary za přímý důkaz, že nephridie *Oligochaetů* vznikly z pro-

nephridií *Plathelminthů*, uvádím zjev tento toliko jako zvláštnost o níž jsem v literatuře nenalezla vůbec zmínky.*)

Obr. 4. znázorňuje několik případů slepých výběžků a ostrůvků. Po Claparède-ovi, jehož práce vyšla již r. 1862, podali nám zprávu o nephridiálním apparátu *Stylodrila* toliko Benham (1892) a R. Southern (1909) a zmiňují se také o zvláštnostech tohoto systému. Omezili se však při svém pozorování toliko na přední část těla, neboť Benham uvádí při popisu nové specie nazvané *Stylodrilus Vejdovskyi Benh.*, že prvý pár nephridií probíhá několia segmenty (až do 10ho), druhý je uložen v článku 13.—15. a další pak vždy toliko v jednom článku tělním. Tyto údaje Benhamovy potvrzuje Bretscher (1900) a totéž,



Obr. 4. Slepé výběžky a „ostrůvky“ na vývodných kanálcích nephridií.

ač dosti nejasně, uvádí i R. *Southern* (1909) pro novou specii: *Stylodrilus Hallissyi South.* Kdyby tito autoři byli pozorně zkoumali celého červa, zajisté nebylo by jim uniklo uspořádání nephridiálního apparátu v dalších segmentech tělních a variabilita, která je tak charakteristická pro exkreční soustavu *Stylodrila*. Zvláštní úpravou exkrečního systému podobá se *Stylodrilus Trichodrilu (Phreathotrix)*, kterého popsal Vejdovský již r. 1876.

Je příznačno pro specialisty pracující na systematice *Oligochaetů*, že unikly jejich pozornosti nepravidelnosti u exkrečního apparátu *Stylodrila* a že v moderních příručkách (Michaelsen 1909, Piguet a Bretscher 1913) nezaznamenávají ani poznatky Benhamovy a Southernovy, ani pozorování Vejdovského u *Trichodrila*, pocházející již z roku 1876!

Také nephridiální apparát *Lumbricula* vyznačuje se zvláštními poměry, na něž upozornil Dieffenbach (1885) a Mrázek (1913). V nejnovější době zabývala se podrobným studiem exkrečního apparátu

*) Prof. Mrázek v jednom ze svých rukopisů pojednávajícím o morphologii nephridií *Anulátů* řeší tento problem.

Lumbricula Yv. Boveri-Boner (1920) a zjistila, že nephridia vnikají do sousedních segmentů a že jsou všechna spojena společným centrálním kanálkem. Také assymetrie není tu zjevem vzácným.

Shrneme-li výsledky pozorování konaných na nephridiálním systemu *Lumbriculidů*, je patrno, že nepravidelnosti a zvláštnosti tohoto apparátu jsou fenomenem význačným pro celou tuto čeleď.

2. Pohlavní apparát.

Ačkoli moderní systematikové věnují skoro výhradně svoji pozornost pohlavnímu apparátu, přece není ani tento u *Stylodrila* dokonale probádán. Známy jsou toliko útvary nejcharakterističtější, t. j. nezatažitelné penisy, a pak hlavní disposice genitálního ústrojí v jednotlivých segmentech. Je to většinou dílo Claparède-ovo, doplněné poznatky, jež si vyžádala moderní mikroskopická technika.

Nepovšimnuto zůstalo ještě mnoho zajímavých zjevů. V novější literatuře nalézáme dobrý popis pohlavního apparátu *Stylodrila* jedině u Martin-a*) (1908) a ani tento autor neprobádal dokonale celý system genitální. Má pozorování vztahovala se na vývodný apparát samčí. Jak známo ústí do každého atria jeden pár chámovodů; má tedy celkem *Stylodrilus* chámovody čtyři. Kanálky tyto tvoří závity a pronikají několikráte příslušným dissepimentem. Zakončeny jsou obrvenými nálevkami, které však nejsou těsně připojeny k dissepimentu, nýbrž vyčnívají volně, zároveň s proximální částí spermaduktu do příslušného segmentu. Nálevky chámovodů neotvírají se však prostě do dutiny tělní, nýbrž vnikají přímo do vaků chámových v těchto segmentech vytvořených. Martin zjistil tento fakt toliko pro první pár chámovodů. Uzavřením nálevek do chámových vaků, což zajišťuje přesnou funkci vývodného apparátu samčího, připomíná *Stylodrilus* některé *Lumbricidy*. (Obr. 5 a, b.)

*

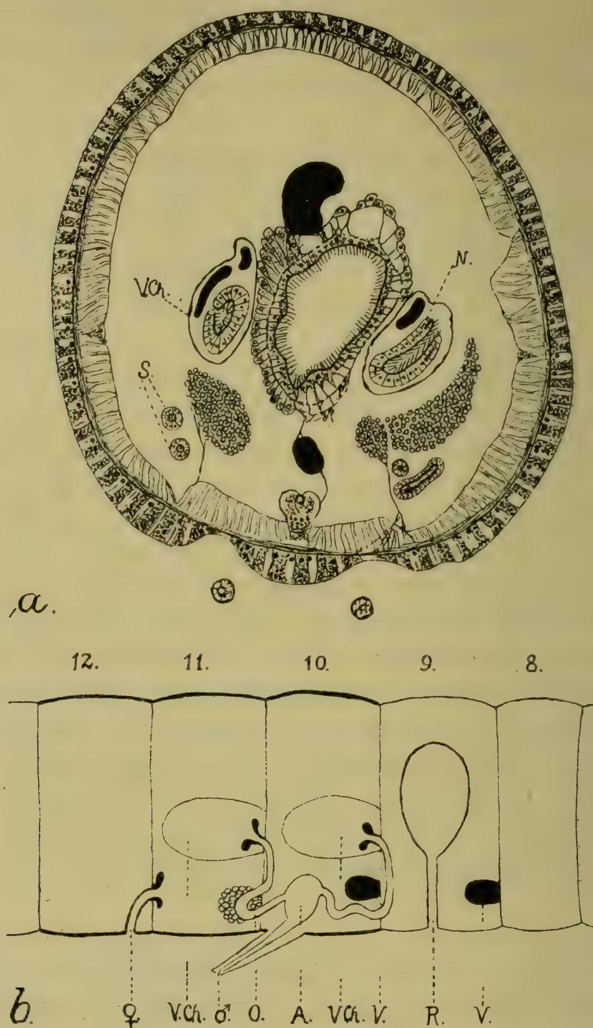
Claparède zjistil ve spermathece *Stylodrila* značně veliký oktaedrický krystall. Pozdější badatelé nemohouce tento krystall nalézti, považují jej za zvláštní znak druhu Claparèdem popsaného *(Stylodrilus heringianus Clap.)* a používají ho k rozlišení této specie od ostatních. Správně podotýká Piguet v novější práci (1919), že krystall může snadno býti přehlédnut, zvláště používá-li se ke studiu konservovaného materiálu a jsou-li receptacula naplněna spermatem.

Pracovala jsem na *Stylodrilech* nesporně jediného druhu a přece (i při pozorování za živa) v některých případech nepodařilo se mi krystall

---

*) Pojednání jeho jest správné jen pokud se týká pohlavního apparátu. Jinak oplývá mnohými omyly.

ve spermathece zjistiti, ačkoli jindy nalezla jsem zcela zřetelné a značně veliké krystally. Jest to snadno pochopitelné, uvážíme-li, že krystally tvoří

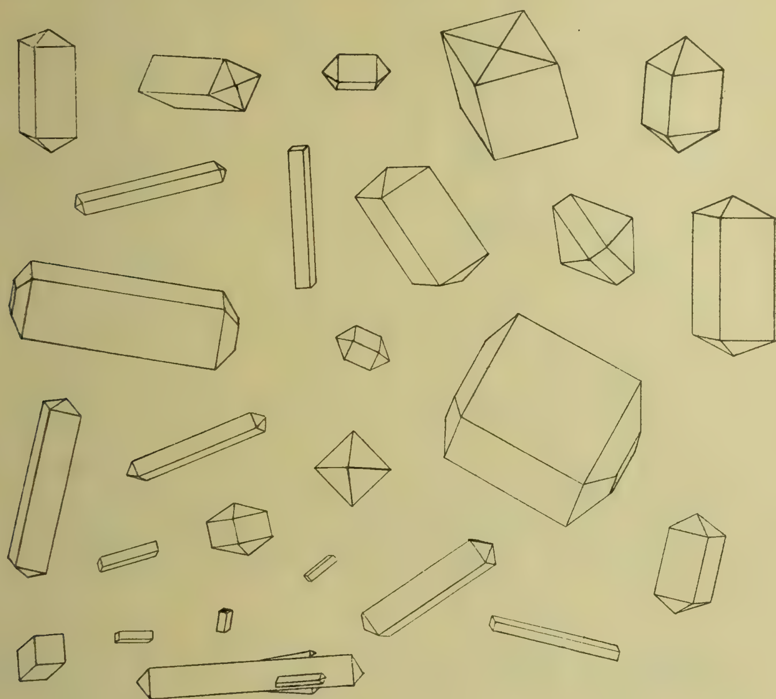


Obr. 5. Pohlavní aparát. a) Příčný řez genitálním segmentem; b) Schema normálního apparátu pohlavního. $A =$ atrium, $N =$ nálevka chámovodu, $O =$ vaječník, $R =$ receptaculum seminis, $S =$ chámovod, $V =$ varle, $V.\ Ch. =$ vak chámový, $q =$ pohlavní otvor samičí, $o =$ pohlavní otvor samičí.

se v době pohlavní dospělosti a sice, jak jsem na řezech zjistila, ve velkých, epitheliálních buňkách, horní, žlaznaté části receptacula. Malé,

tvořící se krystally snadno uniknou pozorovateli, zvláště hledá-li se veliký oktaedrický útvar.

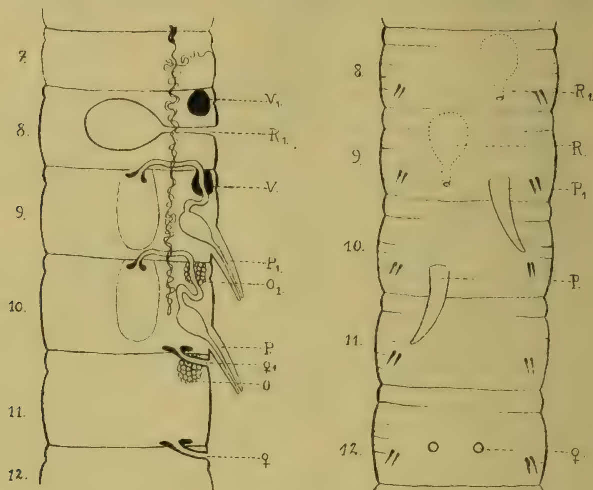
Myslím proto, že není správným používati krystallu jako systematického dělidla specií rodu *Stylodrilus*. Mám dokonce pochybnost o existenci různých specií tohoto rodu a bylo by třeba provésti důkladné srovnávací studium dosud známých specií. Nejpříznivější podmínky k tomu mají ovšem specialisté švýcarští, neboť mají k disposici typickou formu popsanou Claparèdem i ostatní specie.



Obr. 6. Krystally ze spermatheky.

Claparède zobrazuje krystall oktaedrický, tento tvar jsem však nikdy nenalezla. Připojená tabulka (obr. 6.) podává přehled zjištěných krystallů. Vidíme značnou různost co se velikosti týče (všechny jsou kresleny při tomtéž zvětšení), tvarem však náležejí všechny soustavě tetragonální; jsou to kombinace tetragonálního prismatu s tetragonální bipyramidou různé výšky. Jsem přesvědčena, že i „oktaedr" Claparède-ův jest vlastně tetragonální bipyramida. Autor tento podotýká, že krystall jest asi z oxalátu vápenatého. Provedla jsem mikrochemickou

reakci,*) jíž jsem zjistila, že doměnka Claparède-ova byla správná; tím však zároveň se potvrzuje můj názor, že nejedná se tu o oktaedr, neboť oxalát vápenatý krystalluje v soustavě tetragonální. V jediné spermathece bývá i několik krystallů, pozorovala jsem jich až i 9! Bretscher (1900) poznamenává, že nalezl ve spermathece *Stylodrila Vejdovskyi Benh.* několik prismatických krystallů. Poněvadž však v příručce, vydané 1913 Piguet-em a Bretscher-em, autoři podotýkají,



Obr. 7. Abnormity pohlavního apparátu. O = vaječník, P = penis, R = receptaculum seminis, V = varle, q = pohl. otvor samičí. Indexem 1 označeny jsou útvary buď přespočetné anebo nalézající se v jiném segmentu než normálně.

že lze ztotožňovati *Stylodrila Vejdovskyi Benh.* s formou typickou, alespoň pokud se týče exemplářů ve Švýcarsku nalezených, zjistil vlastně Bretscher prismatické krystally u *Stylodrila heringiana Clap.* Tvar krystallů je tedy různý i u téže specie a nelze ho proto užívati k rozlišování druhů od sebe. Bretscherova poznámka zůstala úplně nepovšimnuta.

*

Ke konci této kapitoly, pojednávající o normálním pohlavním apparátu, poznamenávám, že nalezli jsme v našem materiálu i různé zjevy

---

*) Na krystall isolovaný ze spermatheky působila jsem koncentrovanou kyselinou sírovou, krystall se rozpustil a po odpaření tekutiny objevily se na jeho místě jehličky sádrovce. Pan Dr. František Ulrich, assistent mineralogického ústavu, zkoumal optické vlastnosti krystallů a potvrdil mi, že jsou z oxalátu vápenatého.

terratologické, přespočetné penisy, assymetrii v uložení pohlavního apparátu a pod. (Obr. 7a, b.) Při zkoumání většího materiálu dalo by se zajisté zjistiti daleko více abnormit. Obdobné nepravidelnosti pohlavního apparátu nalezl Mrázek (1906) u *Lumbricula* velmi často.

Z toho je patrno, že variabilita v uspořádání pohlavního ústrojí není u *Lumbriculidů* vzácnou výjimkou.

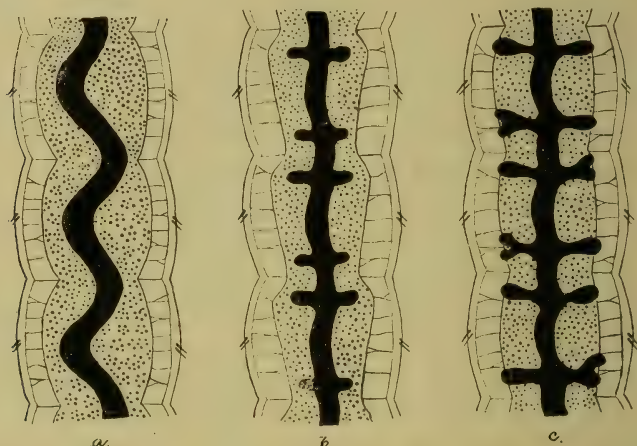
3. Cévní systém.

Dle všeobecně uznávaného mínění tvoří *Stylodrilus* výjimku mezi *Lumbriculidy*, poněvadž nemá slepých přívěsků na dorsální cévě. V novější literatuře nás o tom ujišťuje Michaelsen (1909) a Piguet (1913). Toto traditionelní mínění, ačkoli nesprávné, bylo tak mocné, že dovedlo zabrániti i modernímu autoru (R. Southern 1909), který dobře poznal základní prvky cévního systému tohoto červa, aby došel ke správným konklusím. Southern zjistil slepé, kontraktilní přívěsky na dorsální cévě v zadní třetině těla *Stylodrila*; poněvadž jeho poznatek nesouhlasil s názorem všeobecně uznávaným, domníval se, že ho tato okolnost opravňuje pokládati formu, kterou studoval, za novou specii a nazývá ji *Stylodrilus Hallisyi:* „the new species thus forms an interesting link between the normal *Lumbriculid* type and the aberrant genus *Stylodrilus*" (l. c. str. 145). Avšak *Stylodrilus* není formou aberrantní, přihlížíme-li k cévnímu apparátu! Na materialu, který mi byl k disposici, shledala jsem totéž, co pozoroval Southern a myslím, že lze tyto zvláštnosti, odporující běžnému názoru na cévní systém *Stylodrila,* zjistiti u všech specií tohoto rodu. Ani typický *Stylodrilus heringianus Clap.* nečiní tu výjimky! Mylný názor o cévním apparatu *Stylodrila* zaviněn byl nepozorným rozborem práce Claparèdovy a přejímán pak autory bez dalšího zkoumání. Zapomnělo se totiž, že Claparède nedospěl k přesnému poznání topografických vztahů mezi systemem cévním a zažívacím. Claparède zobrazuje na cévním apparátu ze zadní třetiny těla *Stylodrila* transversální přívěsky, pokládá je však za normální spojky mezi cévou dorsální a ventrální. Poznamenává pak, jelikož mu bylo nápadno, že nesouhlasí s normálními spojkami u ostatních *Lumbriculidů,* že: „l'anse intestinale" a „l'anse periviscerale" jsou v tomto případě přemístěny.

Pozornost moderních autorů byla upoutána především na segmenty pohlavní a na přídu těla a tu zapomněli, že cévní systém není po celé délce těla stejně vytvořen a nezkoumali ho podrobněji. Proto asi tak význačný zjev zůstal nepovšimnut. Spojky mezi cévou dorsální a ventrální jsou vytvořeny toliko v segmentech předních asi do 21^{ho}; slepé přívěsky

počínají asi ve 30. segmentu od konce těla a jsou vždy 2 páry v každém článku tělním (podobně je kreslil také Claparède).

Mínění Southern-ovo o přítomnosti slepých přívěsků dorsální cévy je následující: „The restriction of the blind sacs to the tail and their simplicity of structure, considered in conjunction with the fact that they are quite absent in the other species of the genus, seem to show that they are undergoing a process of elimination. Taking into consideration the importance of the tail for purposes of respiration in these aquatic worms, it is natural, that the blood-glands should be retained



Obr. 8. Dorsální céva: a) v přední třetině těla, b) uprostřed těla, c) od 30ho článku od konce těla počínaje.

here when they have disappeared from other parts of the body." Nepřihlížíme-li k poznámce o nepřítomnosti přívěsků u jiných druhů, o čemž jsem svůj názor již poznamenala, jest mínění Southern-ovo správné, je však nutno, je formulovati poněkud jinak. Nejedná se tu o podržení primitivního charakteru, který vymizel v ostatních částech těla, jen tam, kde jest jeho zachování užitečným, t. j. v zadní třetině těla. Rozdíly v uspořádání cévního apparátu u *Lumbriculidů* těsně souvisí se způsobem života přijatým různými rody této čeledi Cévní apparát vyvíjel se specielně ze společné primitivní base. Přijímáme-li tento názor, snadno vysvětlíme zvláštní charakter cévního apparátu *Stylodrila*, třeba toliko uvědomiti si fakt velmi zajímavý, zjištěný Kowalewskim (1914) a Mrázkem,*) že *Stylodrilus* je červ tubicolní!

Podrobný popis cévního apparátu provedl Southern (1909); od-

*) Práce v rukopise, pojednávající o biologii *Stylodrila*.

kazuji v tomto ohledu na jeho práci a připojuji toliko vyobrazení cévy dorsální v různých částech těla tohoto červa. (Obr. 8.)

Nová specie: *Stylodrilus Hallisyi South.* ovšem pozbývá svoji oprávněnosti.

V Praze, v červnu 1921.

Résumé.

Une examination du système excréteur sur l'animal vivant ne présente pas chez le *Stylodrilus* grâce à sa transparence bien grande des difficultés particulières. Comme un trait principal il faut noter une variabilité extrême dans l'ensemble de l'appareil excréteur. Aussi l'asymétrie dans sa formation et disposition est très souvent. Il n'y a pas deux individus ou la disposition de néphridies, leurs parcours etc. serraient égales. Un caractère commun est la présence des néphridies seulement dans certains segments du corps. La première paire d'entonnoirs est située au dissépiment $^6/_7$; les derniers 10 segments sont sans néphridies bien développés. Le canal déférent partant d'un entonnoir vibratile peut parcourir plusieurs segments consécutifs, comme on le voit surtout chez les deux premières paires de néphridies. Dans la partie postérieure du corps on trouve une paire de néphridies dans chaque segment. Quelquefois le canal déférent se dirige en avant dans le segment précédent; on peut remarquer souvent une transgression du canal déférent vers le côté opposé du segment et dans quelques cas deux néphridies entrent dans le même segment. On trouve les canaux déférents aussi dans les segments génitaux, mais leurs entonnoirs sont sutiés dans les segments pregénitaux. Avant d'entrer dans la petite vésicule terminale conduisante à l'extérieur le canal déférent forme assez souvent des courtes ramifications latéralles où aussi des „isles" („Inselbildung" chez l'appareil excréteur de *Platodes*). (Fig. 4.)

On a trouvé de semblabes particularités aussi chez les autres genres de la famille des *Lumbriculidae* (Vejdovský, Dieffenbach, Mrázek, Boveri-Boner) et il peut être cependant certain qu'il s'agit d'un phénomène bien signifiant pour cette famille entière.

Quoique une attention excessive et presque exclusive est donnée par les systematiciens modernes aux organes génitaux nous connaissons seulement le caractère le plus important d'appareil génital de *Stylodrilus*: les pénis styliformes non rétractiles et puis la disposition générale du système génital dans certains segments du corps. Parmis les nombreux traveaux modernes on peut trouver seulement chez Martin

(1908) une bonne observation concernant la position d'entonnoir spermatique anterieur. Mes observations ses rapportent surtout à l'appareil conducteur mâle. Les spermiductes font toujours des circumvolutions caracteristiques et ils traversent plusieursfois le dissépiment correspondent. Leurs entonnoirs ne sont jamais étroitement attachés au dissépiment respectif, mais ils se soulevent librement et s'ouvrent dans les sacs spermatiques. C'est la même chose chez tous les deux entonnoirs appartennants à un atrium. Cette disposittion rappelle beaucoup à l'état de choses rencontré chez une part de *Lombriciens*.

J'ai trouvée dans la spermathèque des *Stylodrilus* examinés par moi des cristaux d'une dimmension variable, mais dans aucun cas leurs forme ne correspondait pas à un simple „octaëdre" figuré par Claparède. La fig. 6. donne une revue des cristaux observés. Il s'agit des combinaisons d'une prisma tetragonale avec une bipyramide. On peut supposer, j'en suis sure, que aussi „l'octaëdre" de Claparède appartient au système tetragonale, que c'est une bipyramide. L'examination chimique a démontrée, qu'il s'agit d'une oxalate de chaux. On trouve souvent plus d'un cristal dans une spermathèque (jusque 9) et ils sont parfois assez minutieux. L'étude des coupes a prouvée que les cristaux sont formés dans la partie postérieure de la spermatheque dans les grandes cellules du revêtement épitheliale interne. Il est clair que les petits cristaux pourraient bien échapper à l'observateur surplus si son attention est dirigée à un cristal octaëdrique typique et grand. Pour cela je crois que le rôle important de cristal dans les tables de determination n'est pas juste.

J'ai observée aussi un certain nombre de cas teratologiques, de penis supernumeraire etc. (Fig. 7.); c'est un pendant complet aux faits découverts par Mrázek (1906) chez le *Lumbriculus variegatus Grube*.

Le genre *Stylodrilus* fait, selon l'avis courrant mais faux, une exception parmi les *Lumbriculidae* par l'absence totale des appendices aveugles et contractiles sur le vaisseau sanguin dorsal. R. Southern (1908) est le seul auteur qui a avec soin examiné et décrit le système circulatoire de *Stylodrilus*. Mais en acceptant l'opinion traditionelle il arrive seulement à la conclusion, que l'existence d'appendices aveugles et contractiles du vaisseau dorsal dans la partie postérieure du corps de *Stylodrilus* justifie la création d'une espèce nouvelle: *Stylodrilus Hallissyi*. Je constatais sur mon matérial toutes les particularités trouvées par Southern et je croie qu'une semblable constellation doit être retrouvée chez chaque espèce de ce genre, supposant le cas qu'ils existent en réalité plusieures espèces de *Stylodrilus*. On peut montrer qu'aussi

l'espèce typique le *Stylodrilus heringianus Clap.* n'en fait pas une exception. Car Claparède (1862) figure dans le dernier tiers du corps de ce ver les appendices transversaux du vaisseau dorsal, mais il les regarde comme „les anses laterales" normales unisant le vaisseau dorsal et ventral. L'opinion du Southern sur l'occurence des appendices latêraux dans la queue de *Stylodrilus* est, qu'il s'agit ici d'une retention d'un caractère primitif, disparu dans autres régions du corps, seulement par un endroit ou sa conservation était utile. De mon avis sont les différences dans l'ensemble de l'appareil circulatoire chez les genres divers des *Lumbriculidae* en rapport intime avec la manière générale de vie adoptée par chacun d'eux. D'une base commune et primitive l'appareil circulatoire a pris sa voie spéciale d'évolution ou metamorphose selon le mode particulier de la vie. Nous pouvons nous assez bien expliquer le caractère spécifique de *Stylodrilus*. On a seulement besoin de se rappeler au fait si intéresant constater par Kowalewski (1914) et Mrázek*) que *Stylodrilus* est un animal tubicole! L'espèce *Stylodrilus Hallissyi South.* perds, c'est évident sa validité d'une espèce distincte.

---

*) Dans un manuscript pas encore publié que traité la Biologie du gener. *Stylodrilus.*

Literatura.

1. Beddard Frank E.: A monograph of the order of Oligochaeta. (Oxford 1895.)
2. Benham W. Blaxland: Notes of some Aquatic Oligochaeta. (Quart. Jour. of. Microsc. Sc. Vol. 33. 1892.)
3. Boveri-Boner Yvonne: Beiträge zur Vergleichenden Anatomie der Nephridien niederer Oligochaeten. (Jena 1920.)
4. Bretscher K.: Mitteilungen über die Oligochaetenfauna der Schweiz. (Revue Suisse de Zoologie. T. 8. 1900.)
5. Claparède Ed.: Recherches anatomiques sur les Oligochètes. (Mém. de la Soc. Phys. et d'Hist. nat. de Genève. T. 16. 1862.)
6. Dieffenbach O.: Anatomische u. Systematische Studien an Oligochaeta limicolae. (Inaug. Diss. Giessen 1885. Ber. Oberhess. Ges. 24.)
7. Kowalewski M.: Materyały do fauny polskich skąposzczetów wodnych (Oligochaeta aquatica) cz. II. (Kraków, akad. lit. 1914.)
8. Martin C. H.: Notes on some Oligochaets found on the Scottish Loch Survey. (Proceed of the Royal Society of Edinburgh. 1907/8.)
9. Michaelsen W.: Oligochaeta. (Brauer: Süsswasserfauna Deutschlands 1909.)
10. Mrázek Al.: Die Geschlechtsverhältnisse und die Geschlechtsorgane von Lumbriculus variegatus Gr. (Zoolog. Jahrbücher. Abt. f. Anat. u. Ontog. Bd. 23. 1906).
11. Mrázek Al.: Beiträge zur Naturgeschichte von Lumbriculus. (Sitzungsber. König. böhm. Gesellsch. d. Wiss. Prag 1913.)
12. Piguet E.: Notes sur les Oligochètes. (Revue Suisse de Zool. Vol. 21. 1913.)
13. Piguet E.: Oligochètes communs aux Hautes Alpes suisses et scandinaves. (Revue Suisse de Zool. Vol. 27. 1919.)
14. Piguet E.: Wasserbewohnende Oligochaeten der Nordschwedischen Hochgebirge. (Naturwiss. Untersuch. d. Sarekgebirges in Schwedisch-Lappland. Bd. IV. 1919.)
15. Piguet E.-Bretscher K.: Oligochètes. (Catalogue des Invertebrés de la Suisse F. 7. 1913.)
16. Southern R.: Contributions towards a monograph of the British and Irish Oligochaeta. (Proc. Royal Irish Acad. Vol. 27. 1909.)
17. Vejdovský Fr.: Über Phreatothrix, eine neue Gattung der Limicolen. (Zeitsch. f. wiss. Zool. Bd. 27. 1876.)
18. Vejdovský Fr.: System und Morphologie der Oligochaeten. (Prag 1884.)

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 16.

Geologické studie v severní Adrii, hlavně na ostrově Krku.

Études Géologiques dans la Région Adriatique Septentrionale surtout de l'Ile de Veglia.

(S mapami, profily a fotografiemi. — Avec cartes, profiles et photographies.)

Podává — Par

Dr. Otakar Matoušek.

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 16.

Geologické studie v severní Adrii, hlavně na ostrově Krku.

Études Géologiques dans la Région Adriatique Septentrionale surtout de l'Ile de Veglia.

(S mapami, profily a fotografiemi. — Avec cartes, profiles et photographies.)

Podává — Par

Dr. Otakar Matoušek.

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Publikace tato podává přehled hlavních poznatků autorových při geologických studiích v Jugoslavii, především v jižní části ostrova Krku (Veglia) a jeho okolí, konaných v létě roku 1921 a na jaře 1922.

Upřímně děkuji panu profesorovi Dru Filipu Počtovi, který sledoval mé práce s laskavostí a porozuměním, a panu profesorovi Dru. P. Oppenheimovi v Berlíně za laskavé přehlédnutí určení některých zkamenělin. S díkem připomínám také, že na pokračování geologických studií v Jugoslavii jsem obdržel r. 1921 od ministerstva školství a nár. osvěty podporu 2000 Kč. *O. M.*

ÚVOD.

V geologickém zkoumání okolí ostrova Krku a vůbec severní Adrie můžeme rozeznati několik období.

1. Drobné zmínky v různých publikacích před polovinou minulého století, na př. v Haidingerových »Berichte über die Mittheillungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien«, 1847—51. Jsou významu jen historického. *)
2. Doba prvního mapování K. u. k. Geologisches Reichsanstalt in Wien. Jsou to práce Stachovy, uveřejňované počínaje rokem 1859 ve »Verhandlungen«, později v »Jahrbuch« a konečně r. 1889 v »Abhandlungen« tohoto ústavu. Dílo to je základního významu a relativně nejcennější.
3. Jubilejní, nové mapování K. u. k. Geologisches Reichsanstaltu, provedené Waagenem, publikované ve »Verhandlungen« a zakončené roku 1905 a 1911 vydáním tištěných geologických map 1 : 75.000 s vysvětlivkami.

Práce tyto shrnují dosavadní vědomosti, ale nového podávají poměrně velice málo.

---

*) L. Waagen uvádí jako nejstarší knihu od Alberta Fortis »Saggio d'obsservafioni sopra l'issola di Cherso ed Ossero«, vydanou roku 1771. Mimo to různé zmínky jsou v časopise »Istria«. — Tyto dvě publikace mi byly nepřístupny.

Ke dvěma posledním obdobím se druží i četné práce, které se zabývají některým problémem specielním. Jsou to hlavně práce geomorfologické — Lorenz, Cvijić, Gavazzi, Grund a j. — částečně sem zasahují novější všeobecné úvahy o stavbě Alp (Termier, Kober) a paleontologická zpracovávání stratigrafického materiálu, jež provedli na příklad Schubert, Oppenheim a mnozí jiní, z českých pracovníků Liebus a Remeš. Nehledíme-li k Hauerově přehledné mapě Rakouska z roku 1868. a k Dienerově kapitole v »Bau u. Bild Österreichs«, nalezneme i drobné práce ryze geologické, jako Radimského (Ostrov Ráb, 1880.), nověji Schubertovy, vzdálenější Katzerovy a j.

Přehlédneme-li význam této dosavadní činnosti pro dnešní geologii, je zřejmo, že Adrie vyžaduje důkladného nového prozkoumání. Práce Stachovy jsou vzorné, ale od dob vydání první z nich uplynulo již 65 let, od vydání závěrečného díla 35 let; za tu dobu změnila se značně i podstata samé geologie. Nové mapy Waagenovy naprosto neuspokojují a ostatní práce jsou jen drobné útržky. Škoda je, že předčasná smrt nedovolila pokračovati Schubertovi v jeho studiích. Je pochopitelno, že za těchto okolností je nutno mnoho měniti.

Stratigrafie.

Ostrov Krk a jeho okolí je budováno křídovým útvarem; v depresích jsou uloženiny paleogenní. Podružného významu jsou mladé uloženiny.

V křídě byl rozeznáván »spodní« a »svrchní« rudistový vápenec s brekciemi. Stratigrafie tu zůstává od dob Stachových téměř nezměněna a také autor nenalezl závažnějších změn.

Jinak je tomu s paleogenem, kde bylo nutno, hlavně ve vyšších polohách, takřka vybudovati od základů novou stratigrafii přes to, že bylo v ní často pracováno a měněno, jak vysvitne z připojeného přehledu (viz tabulku).

Waagen se vyhnul řešení stratigrafie prostě tím, že sloučil jednotlivá souvrství, což ovšem usnadňuje mapování, ale nedá pak hodnotných výsledků.

Pojednáme o jednotlivých vrstvách postupně. —

Křída. Rozeznání jednotlivých poloh v křídě působí na ostrově Krku značné obtíže. Křída je tu vyvinuta dosti odchylně (chybějí zde, či snad jsou jinak vyvinuty »repenské brekcie a p.). Jsou to vesměs vápence, v jednotlivých, zatím neurčitých a ostatně lokálně dosti omezených polohách dolomitické, brekciovité a p., obyčejně krasového charakteru.

Zatím nebylo možno než přijati pro mapování rozdělení, jak ho použil v podstatě i Waagen. Rozeznává 1. Unterer — 2. Oberer Rudistenkalk und Brekcien.

Spodní oddělení je tvořeno vápenci tmavšími, šedavými, lokálně masově zabarvenými. V některých polohách jsou v nich uloženy vápence listovité, tenko- i jinak vrstevnaté, patrně sedimenty hlubšího moře, význačné obyčejně chyběním rudistů, ostatně nepříliš hojných. V jižní polovině ostrova Krku jsou odkryty většinou jen vyšší polohy. Skutečné jejich stáří odpovídá patrně turonu; jen spodní polohy, snad neodkryté, by patřily podle Stacheho cenonamu. Nezývám je proto turonskými vápenci resp. dolomity.

Svrchní oddělení je všeobecně charakterisováno brekciemi na basi — brekciovitý charakter se částečně objevuje však i v jiných polohách — a proti spodnímu oddělení význačno živými barvami. Vápence jsou velmi čisté, bílé, žlutavé nebo růžové, zvonivé, subkrystalické, obyčejně plné veliких rudistů, jen v některých polohách chybějících. Rudisti jsou tak vtmeleni ve vápencích, že vypreparovati je není ani částečně možno; určení v kameni je podmíněno jen náhodným, příznivě situovaným průřezem. Sledovati jednotlivé polohy rudistů je proto velice obtížno. Polohy ty, význačné i petrograficky, však existují, třebas jsou svou rozlohou dosti omezeny.

Celkový ráz »svrchních rudistových vrstev«, jež nazveme podle pravděpodobného stáří coniacienovými (ve vyšších polohách patrně je stáří ještě menší), svědčí, že vznikly v bezprostřední blízkosti pobřeží či útesů. Považovati je přímo za brekcie strandu, jak činí Stache, však není na ostrově Krku snad vhodno.

Brekcie jsou nápadněji vyvinuty pouze na basi svrchních vrstev, a to pokud vím všeobecně, takže jejich chybění svědčí o tektonické poruše. Jsou složeny z materiálu turonských vápenců a dolomitů, tmavých, ostrohranných úlomků. Oboje vápence, hlavně však coniacienové, mají ráz krasový. Jsou bez rostlinného krytu, což by napomáhalo značně k pozorováním tektonickým — je však bohužel ztěžováno povrchovými zjevy krasovými, které nedovolují obyčejně ani zjistiti spolehlivě sklon vrstev. Také značná petrografická jednotvárnost překáží ovšem detailnějším tektonickým studiím.

Čisté vápence coniacienové by měly značný význam obchodní, kdyby nebylo přílišné vzdálenosti od průmyslových středisek. Místnímu zpracování chybí především topivo.

Celkem je patrno, že křída si vyžádá v budoucnu detailnějšího zpracování stratigrafického, které bude významné pro tektonické i morfologické závěry. Ostrov Krk se k tomu nehodí, poněvadž vrstvy jsou

v něm leckdy vyvinuty odchylně a v jeho jižní části jsou nižší polohy zřídka a málo odkryty. W a a g e n nerozlišuje na blízkém ostrůvku S. Gregorio obou pásem a o ostrově Krku praví: »Wo nicht Brüche die Grenze bilden, führt meist eine Wechsellagerung der Bänke von den tieferen dunklen Kreidekalken zu dem lichten oberen Rudistenkalken hinüber, so dass der Aufnahmsgeologe gezwungen ist, eine mehr schematische Grenzlinie zu legen.« Sám jsem rozdělení křídy na dvě skupiny přijal, poněvadž rozdělení to je jinak zřetelné, a to teprve po zjištění dosti konstantního pruhu brekcií, jejž jsem umístil na basi svrchního oddělení. Jinak by bylo nutno říci, že v křídě převládají na spodu tmavé vápence, na svrchu světlé a bohaté rudisty, a značiti celek jediný. Tam, kde jsou vyvinuty neúplné komplexy, tektonicky podmíněné, je rozpoznání, jde-li o vápence turonské či coniacienové, často velmi obtížné. *)

Rozšíření turonských vrstev je omezeno v jižní části ostrova Krku obyčejně jen na jádra antiklinál křídových, obnažených denudací; částečně však jde také o tektonické kry. Vápence coniacienové jsou naproti tomu rozšířeny všeobecně, pokud je v depresích nekryjí pruhy usazenin kenozoických. Velmi často se objevují na povrchu, hlavně na vrcholech skalních hřbetů jen v podobě kamenných moří. Na jihu ostrova Krku (u Pta Skulica) jsou v nich i pěkné krápníkové jeskyně. —

Paleogen. Mnohem těžší otázkou stratigrafickou než křída je stratigrafie paleogenu. Místo vápenců, měnících se jen při pobřeží a útesech, jsou hlavně svrchní paleogenové vrstvy tvořeny lagunárními uloženinami, pískovci a slíny, opakujícími se s velkou, takřka nerozeznatelnou jednotvárností a měnící se i na malé prostoře leckdy velmi rychle.

V dřívějších dobách působily, jak známo, značné obtíže vrstvy mezi křídou a nummulitovými vrstvami. S t a c h e v letech padesátých zavedl pro ně lokální název »Cossine Schichten«; později pro podobné poměry jinde užil názvu »Liburnische Stufe«. Když však poznal, že »Cossine-Schichten« jsou jen sladkovodní facií středních poloh liburnských vrstev, vyškrtal tyto lokální názvy a zaváděl pro formaci, ležící mezi nejvyšším horizontem rudistovým a nejnižší polohou alveolinových vápenců jméno »protocen«.

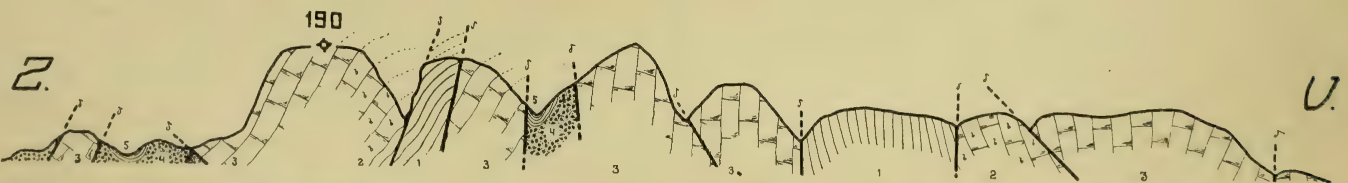
Jako všeobecné stratigrafické označení se jméno to však neujalo; podobně ostatně se vedlo i S c h i m p e r o v u odůvodněnějšímu názvu »paleocen«, které se udrželo nejdéle, a v. j.

---

*) S t a c h e sám praví o něm: »Uebrigens wird es schwer werden, gewisse Grenzlinien, wie z. B. die zwischen Turonien und Senonien, in der Art festzustellen, dass man sie immer wieder findet und zur kartographischen Feststellung der Verbreitung einer jeden dieser Hauptabtheilungen innerhalb der verschiedenen Abschnitte des Küstenlandes benützen kann.« —

Náčrtek geologické mapy nejjižnější části ostrova Krku. — Carte géologique schématique de la plus sud région de l'île de Krk (Veglia).

Vysvětlivky. — Legenda. 1. Turonské vápence. — Calcaires Turoniens. 2. Brekcie na basi svrchních rudistových vápenců. — Brèches à la base des calcaires Coniaciens. 3. Svrchní (coniacienové až snad mladší) rudistové vápence. — Calcaires Coniaciens (et peut-être plus jeunes) à rudistes. 4. Alveolinové vápence (spodní lutétien) s brekciemi na basi. — Calcaires alveoliniques avec des brèches à la base. 5. Nummulitové vrstvy, svrchnější lutétien. — Schistes nummulitiques.



Západovýchodní profil nejjižnější části ostrova Krku. — Coupe schématique de la plus sud région de l'île de Krk (Veglia), du West à Ouest, par la côte des 190 mètres. Voir la carte; hauteur: longueur = 2:1. — Veden přes kotu 190 m — asi od Crkveni rt. k Pta Skulica; srovnej mapu. Dvakrát převýšen, poněkud schematisován, hlavně co do sklonu vrstev. Čísla odpovídají šrafování na mapě.

Na ostrově Krku však tato mezi-formace není zastoupena. Nejstarší vrstvy paleogenní jsou alvelionové vápence, na basi s polohou brekcií, jimž nebyla věnována patřičná pozornost.

Jsou to brekcie z růžových a bílých kostek coniacienových vápenců, stmelených červeným tmelem, který nasvědčuje patrně suchému podnebí, odpovídajícímu vzniku terrae rossae. Jejich mocnost není veliká, takže i při malých tektonických poruchách — na rozhraní křídy a tercieru ostatně běžných — nevystupují na den. Proto se s nimi setkáváme poměrně málo, nemluvě o tom, že při povrchnějším studiu snadno ujdou pozornosti. Východně od kostela Svatého Ivana byly lámány a zhotovovány z nich pomníky a p. Jako ozdobný kámen jsou pro svou pestrou, růžověbílou mosaiku velmi pěkné.

W a a g e n mluví o nich patrně slovy: ». . . bunten Breccien des oberen Rudistenkalkes«, jinde pak: »Cossinaschichten kommen, wie bereits Oben (t. j. v odstavci o křídě) erwähnt, in unserem Kartenblatte nicht in Betracht, da man nur die genannte rotweisse Grenzbreccie als deren Äquivalent ansehen könnte . . .« Na mapě jich zvláště nevyznačuje, ale je patrno, že je přiřazuje ke křídě jako její nejvyšší, hraniční polohy.

Stáří jich je ovšem těžko přesně určiti, poněvadž zkamenělin v nich není vůbec. Představují nám činnost rozpadu a tmelení na souši, hlavně však souvisí asi s transgressí eocenového moře. Ostrohranné úlomky svědčí o tom, že nebylo času, aby byly ohlazeny, což by za činnosti atmosferilií se na souši po delší době jistě stalo. Je tedy nejsprávnější, přisoudíme-li jim stáří bezprostředně před usazením vrstev alveolinových, tedy patrně (jak promluvíme dále) londinienu. Zjistiti spolehlivou diskordaci mezi nimi a křídou je obtížno.

Následují alveolinové vápence, růžové, někde ve vyšších polohách nažloutlé, vždy krasového charakteru, charakteristické výskytem přehojných alveolin, které svými bílými, čočkovitými průřezy jsou dobře poznatelné v terénu a odlišují tak ihned eocen od někdy podobného vápence coniacienového. Určováním druhů jsem se nezabýval; dosavadní údání se liší. Nechybí nikdy úplně; nejhojnější je Hemiflosculina dalmatina Stache.

Transgresse zasáhla ostrov Krk mnohem později, než jiné kraje, kde často ani nenastala úplná souše. Patrně ležel dosti vysoko nad mořem. Nejen, že hranice je velice ostrá, ale ani spodní polohy foraminiferové, jinde uváděné, nejsou vyvinuty. Nenalezl jsem na př. ještě ani horizontu s Nummulites planulatus D'Orb., který je podle mého názoru zastoupen časově zmíněnými basálními brekciemi (londinien).

Alveolinové vápence mají, jak řečeno, vždy krasový charakter, velmi podobný křídovým vápencům. Jsou v nich i menší krápníkové jeskyně;

malá taková jeskyně byla zničena těžením kamene na břehu u molla v Nové Bašce. Na výbrusech v nich patrna velmi hojná ruda.

V nejvyšších polohách se ve vápencích objevují i první velicí nummuliti, nejprve jen ojediněle. Brzy však převládnou na úkor alveolin, které patrně svou formou flosculinovou znenáhla vymírají; pokud je nalezneme ve vyšších polohách paleogenu, jsou zastoupeny formou bez stluštělých stěn. Zároveň se mění i charakter petrografický: krasové vápence růžové i žlutavé mizí, stávají se písčitými, až konečně přejdou ve vápnité pískovce, přeplněné obyčejně velikými nummulity, případně jinými zkamenělinami. Od počátku převládání nummulitů začínají vápence, resp. výše až pískovce, které nazveme nummulitovými; Stache položil hranici výše, kde je petrografický charakter patrnější.

Pro praktickou potřebu je však vhodnější klásti hranici tam, kde se v alveolinových vápencích objevují první velcí nummuliti v značnějším množství. Obyčejně je ostatně nutno vésti rozhraní na podkladé tektonickém, poněvadž zlomů je veliké množství a nedovolují přesného ohraničení. Obtíže vznikají pouze u útržků tektonických, sestávajících náhodou právě z přechodních vrstev.

Waagen mapuje oboje souvrství spolu a praví: »Nach oben zu gegen diese Alveolinkalke in nummulitenführende Kalke über, die sich jedoch petrographisch absolut nicht scheiden lassen.« Naproti tomu, jak bylo řečeno, je možno (s určitými opravami ovšem) Stachova rozdělení použíti, poněvadž kromě předchozích vrstev u mocnosti několika metrů jsou vrstvy nummulitové paleontologicky i petrograficky zřetelně oddělitelny. Je možno, že snad tyto písčité vrstvy zahrnul Waagen částečně již do »svrchních nummulitových vápenců«, když v kapitole o nich mluví o vápnitých pískovcích a nummulitových vrstvách. O této možnosti se ještě zmíníme.

Nerozlišováním obou pásem se ovšem mnohonásobně zjednoduší mapa, ale uniknou i základní rysy tektoniky. Mocnost obou pásem je dosti těžko odhadnouti, poněvadž bývají pravidelně tektonicky porušena. Měří snad asi 100 metrů, z čehož něco méně než dvě třetiny tvoří vápence alveolinové.

V nummulitových vápencích jsou přehojní velicí nummuliti; některé kusy jsou jen z nich takřka stmeleny. Řidší jsou i jiné zkameněliny, na příklad úlomky ježovek. Seznamy zkamenělin uváděných jednotlivými autory nutno pojímati kriticky, jak se zmíníme dále. Velmi hojná je na příklad Assilina spira de Roissy a Nummulites laevigatus Lk., jenž, tuším, nebyl dosud z těchto krajin uváděn. Oboje jsou dosti spolehlivým svědectvím, že nummulitové vrstvy odpovídají asi spodním polohám středního lutétienu.

Na východním břehu Monza Luky, východně od N. Bašky, jsou vrstvy těchto vápenců postaveny téměř kolmo. Stěna, která tam je při pohoří, je na zkameněliny velmi bohatá. Nalezl jsem tam mimo jiné Terebratula Hoëferi Oppenheim. Druh tento je velmi vzácný, ale pokud byl nalezen odpovídal lutétienu. Nález je zajímavý tím, že S t a c h e, který



Západní křídový hřbet baščanského údolí u Batomalje. Pod ním paleogen, na rozdíl od krasových vápenců křídových, od nichž je oddělen směrným zlomem, pokrytý porostem. Patrny příčné zlomy v křídě a mezi domkem a lesíkem na pravo i v paleogenu.

Chaine Crétacée à l'Ouest de la vallée de Besca nuova près de Batomalj. En bas le Paléogène, convert de végétation en contrast aux calcaires Crétacés karstiques, séparé de lui par une faille longitudinale. Les failles transversales sont visibles dans le Crétacé, et à droite entre la maison et le forêt aussi dans le Paléogène.

sledoval velmi detailně rozdělení paleogenu, uváděl pravidelně se vyskytující horizont terebratulový a to v nejvyšších polohách nummulitových vápenců. Na ostrově Krku však dosud nebyl zjištěn. Nummulitové vápence a písčité vápence by poskytly jistě pro paleontologa materiál bohatý. —

Přistoupíme k druhé veliké skupině paleogenních sedimentů, kterou nazval S t a c h e skupinou konglomerátů a pískovců, W a a g e n slíny a pískovci čili svrchními nummulitovými vrstvami.

Poněkud neurčitě je definováno rozhraní vůči dřívějším polohám, poněvadž rozhraní paleontologické, opírající se o poznávání foraminifer, je pro mapujícího geologa dosti nevhodné. Mapujeme-li celé toto souostroví jako celek, bez jakéhokoliv dělení, jak učinil Waagen, je věc snadná. Pro přehlednou mapu to stačí, avšak pro práci detailní a hodnotu vědeckou neuspokojuje. Ve vysvětlivkách praví Waagen pouze: »Es sind helle — — Mergel, die nach oben allmählich durch sandige Mergel in Kalksandstein übergehen.« Schubert podává dosti podobné rozdělení, totiž 1. Globigerinenmergel a 2. Mergel und »Konglomerate«, im Bescatfale mit Flyschbänkenwechsellagernd. Stache rozdělil tuto skupinu také na dvě souvrství a to na 1. Versteinerungsreiche Konglomeratische und mergeligsandige Schichten a 2. Versteinerungsarme oder leere Sandsteine und Mergel = der eigentliche Flysch oder Macigno und Tasello.

V podstatě jsou obě dvě rozdělení dosti podobná, ale prakticky se pro geologa — nemluvě zatím o případných nesprávnostech — nehodí. Proto Waagen shrnul obě oddělení, čímž se ovšem chybám vyhnul, avšak věci neprospěl.

Nejnověji podal příspěvek ke stratigrafii eocenu v baščanském údolí na ostrově Krku Remeš. Rozeznává na základě paleontologickém dvě pásma, obsahující zkameněliny, oddělená pásmem pískovců, »z nichž jedno jde od Sv. Kosmy k Majce Boží, druhé od hotelu Praga návrším Sv. Michala k východní části Batomalje«.

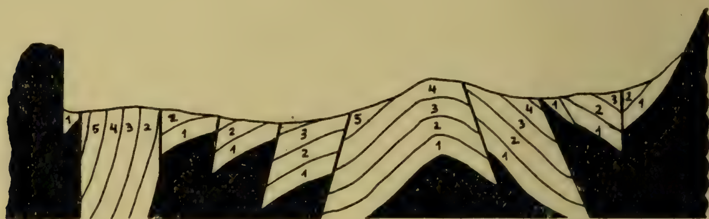
Průběh pásem, jak je těmito slovy naznačen, není z důvodů tektonických možný — jmenovaná místa jsou jen nahodilé výchozy jednotlivých ker — ale na druhé straně Remeš dobře rozeznává, že je možno rozděliti paleogenní vrstvy a to jinak, než se dálo dosud.

Zdá se, že první jeho pásmo, vystupující u Sv. Kosmy a Majky Boží, odpovídá celkem našemu flyši, druhé, zastoupené lokalitami Praga, Svatý Michajl a Batomalj více méně vrstvám svatomichalským, částečně i jurandvorským.

Srovnáme-li tato jednotlivá rozdělení, je patrno, že mají některé rysy společné, ale přes to, že je v detailnější stratigrafii chaos, takže noví pracovníci pokoušeli se vždy měniti na představách svého předchůdce. Waagen sám, jak bylo řečeno, nemohl rozdělení použíti a mapoval celé toto souostroví jednotně.

Pro nové mapování bylo nutno sestaviti podrobnější stratigrafii, poněvadž jinak by nebylo možno vůbec usuzovati o tektonice. Právě to, že Waagen mapoval zhruba, nevyznačiv zvláště jednotlivých vrstev, bylo příčinou, že i tektonicky zůstala jeho práce neplodnou. Kdyby byla bývala zjištěna dříve řádně stratigrafie, byla by jistě práce Waagenova měla značnější význam i pro geologii Dinarid.

Ve vyšších polohách je velmi obtížno zjistiti přesnou stratigrafii především proto, že (na rozdíl od poměrně velmi konstatních vápenců alveolinových a nummulitových) se jejich ráz mění velmi rychle. Je tedy těžko srovnávati dva vzdálené odkryvy, poněvadž se od sebe obyčejně liší jak petrograficky, tak ovšem i paleontologicky. Jiná obtíž je, že tato souvrství vystupují na den jen v malých útržcích, jsouce jinak zakryty širokými nánosy potoků. A tyto výskyty není možno prostě spojovati, poněvadž to jsou kry, posunované a zpřeházené podél četných zlomů nejrůznějším způsobem. K tomu přistupuje ještě, že některých poloh petro-



Schema stavby baščanského údolí. Relativním či skutečným postupným poklesem středu antiklinály objevují se na povrchu pásy hornin v nejrůznějším pořádku. Jsou pak rozbity nesčetnými příčnými zlomy, jež schema vynechává. (Pozn.: Čísla neodpovídají ovšem legendě map.) V levo znázorněna téměř svisle postavená kra propadlá, jinak znázorňuje náčrtek postupné přesmyky ker.
Schèma de la structure de la vallée de Besca nuova. Par l'affaissement en échelon (relatif on réel) du centre de l'anticlinal des bandes de roches afleurent en ordre différent. De plus elles sont morcellées d'innombrables failles transversalles non indiquées dans notre coupe. Les signatures ne correspondent pas à celle de la carte. A gauche un massif dont les couches sont prèsque verticales est intimé, en outre la coupe montre les surrélevations en échelon.

graficky sobě téměř k nerozeznání podobných je více a to stratigraficky zcela odlišných.

Často svádějí k omylům i představy tektonické. Není ovšem dobře možno, usuzovati z nedosti známé tektoniky na stratigrafii, když naopak nejasná stratigrafie má býti oporou pro závěry tektonické. Mnoho tu působí i dosavadní údaje literatury, které, jak jsme ukázali, jsou značně chaotické.

Je nutno řešiti stratigrafii nejprve místně. Málokde nalezneme vedle sebe dvoje vrstvy bez tektonické poruchy, vystupující na den z recentienu. Takovou důležitou lokalitou je skála na mořském pobřeží na západě Nové Bašky, pod poštou. Spatříme tam vrstvy zapadající k východu (!) a to nejprve, nejžápadněji, slinité, šedé pískovce, které nazveme podle jiného význačného naleziště j u r a n d v o r s k ý m i; zde jsou značně světlé, velmi bohaté na zkameněliny, hlavně měkkýše a ko-

rále. Nad nimi, východněji, jsou světlé, žlutavé pískovce s nehojnými nummulity, jež nazveme s v a t o m i c h e l s k ý m i. Poněvadž mezi nimi není větší poruchy je bezpečně patrno, že spolu i stratigraficky souvisí.

Jde nyní o to zjistiti, které jsou starší. Cesta paleontologická nám zatím nepodala uspokojivých výsledků — o příčinách se zmíníme dále.



Baščanské údolí od Majky Boží. V předu flyš, rozbitý zlomy. Údolí vlastní kryto holocenem potoka. V pozadí křídový hřbet, v levo Jurandvor. V pravo na obzoru kostelík Sv. Ivana. Křída je od paleogenu oddělena směrným zlomem, táhnoucím se asi 1 cm pod křídovým hřebenem na obrázku. Antiklinála jurandvorská je na fotografii v místě, vzdáleném od levého kraje 60 mm, od zdola 50 mm.

Vallée de Besca Nuova vue de St. Madona. Au premier plan flych morcellé de failles. La vallée même remplie par le Holocène du ruisseau. Au dernier plan la chaîne Crétacée, à gauche Jurandvor. A droite à l'horizon l'église de St. Ivan. Le Crétacé est séparé du Paléogène par une faille longitudinale, parcourante environs un centimètre audessous de la crête de la chaîne Crétacée. Sur la phothographie l'anticlinal de Jurandvor est situé environs 60 mm des bord gauche et 50 mm d'en bas.

Zbývají důvody tektonické. Podle všech dosavadních autorů je baščanské údolí propadlou synklinálou. Měly by tedy na východní části údolí, kde je zmíněná lokalita, zapadati vrstvy do středu synklinály, to jest přibližně k západu: Vrstvy bližší ose by byly mladší.

Vrstvy skály na pobřeží pod poštou však zapadají obráceně, k východu. Skála dosud ušla pozornosti mapujících geologů, takže nenajdeme

o ní zpráv. Ale za to četné jsou úvahy nad jinými nálezišti obdobnými, kde vrstvy zapadají také obráceně, než by předpokládala myšlenka synklinály. Byly vykládány různě, celkem v ten smysl, že jde o kry překocené. V tom případě by byly u skály vrstvy západnější, bližší ose, starší.

Nové poznatky tektonické se připojují k tomuto závěru. Jak bude vysvětleno v další kapitole, není baščanské údolí synklinálou, nýbrž propadlou antiklinálou, takže opravdu jsou na jmenované skále vrstvy, ležící blíže ose, starší. Překoceny ovšem nejsou.

Tak je bezpečně určen stratigrafický pořad dvou pásem, starších vrstev jurandvorských, mladších svatomichalských. První vrstvy jsou nazvány podle Jurandvora, kdež na jižní straně vystupují v podobě malé antiklinály. Jsou šedavé barvy, hrubozrné, velice bohaté na veliké tlustostěnné měkkýše. Snadno se poznávají, ačkoliv se poněkud odchylují — některá místa jsou bohatší na př. na měkkýše, jiná na korále. Je to ráz, jenž ovšem nemůže býti regionálního rozšíření.

Vrstvy jurandvorské poskytly (hlavně u jmenované skály) zkameněliny, které dovolují poněkud srovnání s francouzskou stratigrafií. Nalezl jsem v nich Campanile giganteum Lk. — pokud vím, v těchto krajích je tím poprvé zjištěno — Corbis lamellosa Lk. a jiné zkameněliny, které nasvědčují, že vrstvy ty odpovídají asi stáří pařížského calcaire grossier, lutétienu. Na druhé straně obsahují však — a to na téže lokalitě — zkameněliny, jež se uvádějí z nejrůznějších dob, třebas až ze spodního oligocenu.

Ve vrstvách jurandvorských jsem nalezl na příklad:

(V Nové Bašce.)

Nummulites cf. Lamarkii D'Arch = N. laevigatus Lk. forma B.
Alveolina elongata Defr. = F. bacillum Stache.
Stylocoenia emarciata Lk.
Stylophora cf. distans Leym.
Dictyareaea sp. aff. D. Meneghiniana D'Arch.
Trochus cf. Raffäeli M.-E.
Callistoma cf. Bolognai Bay.
Campanile giganteum Lk.
Corbis lamellosa Lk.

(Severněji.)

Nummulites perforatus D'Orb.
Comoclypeus conoideus Lk.
Pecten cf. Meneguzzoi Bay.
Chama lamellosa Lk.
Lucina cf. saxorum Lk. a j. sp.
Trochus sp., Cardita sp. etc.

Ve skále při pobřeží v Bašce je řada zkamenělin, které, jak bylo řečeno, nasvědčují stáří lutétienu, blížícímu se pařížskému vápenci. I Nummulites laevigatus Lk. odpovídá spodním polohám středního lutétienu. Pokud se týče velice hojných korálů, jež by vyžadovaly odborného studia paleontologického — zachovány jsou velice pěkně — není možno se o ně pro stratigrafické pozorování opírati. Oppenheim-Remeš uvádí na př. Stylophoru jako S. concorta Leym., jež by měla nasvědčovati spíše tongrienu. Stylocoenia emarciata Lk. je však znakem calcaire grossier.

Z jurandvorské antiklinály svědčí pro totéž stáří Chama lamellosa Lk. Podivné však je, že se tam vyskytuje v kombinaci s Nummulites laevigatus Lk., tedy druhem výslovně lutétienovým, druh Nummulites perforatus D'Orb., jenž se uvádívá až ve spodu auversienu. *)

Takovéto nejasnosti jsou tam zjevem běžným. Ve vrstvách nejspíše odpovídajících jurandvorským uvádí Remeš naleziště u kostelíka Sv. Michala druh Nummulites perforatus D'Orb. a »lucasanus«, nověji i N. striatus Defr., jež by nasvědčovaly auversienu. Stáří to jsem shledal pravděpodobným, když jsem nalezl i Nummulites Brongniarti, který je právě téhož stáří. Oppenheim však uvedl mezi několika druhy, v samých to pískovcích svatomichelských, o jichž revisi jsem ho požádal, i Nummulites laevigatus Lk., tedy druh nejvýše ze středního lutétienu.

Je zřejmo, že paleontologické vodítko úplně selhává. Celkem je možno říci, že jurandvorské vrstvy ukazují charakter lutétienu, a to přibližně calcaire grossier, ale obsahují také důležité zkameněliny, jež svědčí až pro auversien. K témuž výsledku dojdeme ostatně také, použijeme-li údajů jiných autorů. Úmyslně jsem jich neužíval, aby se předešlo případnému omylu: Předpokládáme-li totiž správné určení atd., zůstává někdy otázkou zjištění přesné polohy naleziště, což podle popisu není často možno.

Vysvětluji si věc tak, že ve flyšových poměrech žila fauna odchylné než v poměrech normálních, takže stratigrafické rozšíření není v obou případech totožné; dále tím, že v těchto poměrech při kolísání moře byla naplavena i fauna již fosilní, nepříliš vtmelená v píscích a slínech, do mladších sedimentů. Důkazem toho je, že mnohé zkameněliny ukazují zřetelné stopy omletí příbojem. Formy, žijící v lagunách, snad byly i poněkud odchylné od forem typických — nápadně mnoho zkamenělin se dá určiti pouze přibližně (cf.), jeví určité odchylky. Na zvláštní poměry ukazuje i veliký počet »hladových« forem nummulitů. Konečně nutno připustiti, že údaje paleontologů nejsou stratigraficky dokonalé, jsou neúplné.

---

*) Pan P. Oppenheim v Berlíně mi laskavě potvrdil správnost určení.

Jmenovitě zasluhuje pozornosti několikeré opakování výskytu nummulitů, jež jistě neodpovídá uváděnému pořadu, jak byl stanoven hlavně podle francouzských poměrů, od Adrie odchylných.

Na překážku je ovšem i přesné určení zkamenělin, u foraminifer, ale také vyšších skupin (cerithium!) mnohdy pro geologa velice obtížné. —

Další otázkou je stratigrafie vlastního flyše, pískovců a slínů. Zdá se, že leží jednak pod a jednak nad popsanými polohami jurandvorskými a svatomichelskými. Bohužel, nebylo možno to zatím definovati tak určitě, jako byl zjištěn stratigrafický pořad dvou vnitřních pásem. Nikde nebyly odkryty v určitém, neporušeném sousedství, a hlavně je velice těžko je poznati na dvou vzdálenějších lokalitách. Na kratší vzdálenosti se dají sledovati v nich na př. slíny, obsahující mikrofaunu, patrně v podloží vrstec jurandvorských, a naopak nejmladší snad slíny se zuhelnatělou drtí rostlinnou. Některé jsou světlé, jiné tmavší, měkké; jiné břidličnaté a pevné. Pískovce jsou někdy charakteristické flyšovými zjevy povrchovými (hieroglyfy a p.) a mají pevný, skoro křemitý vzhled; v některých polohách obsahují v sobě šedavé pecky. Jiné pískovce jsou žlutavé, měkké a obsahují serpuly atd. Dosud nebylo mi možno zjistiti pravidelné polohy slínů resp. slinitých břidlic a pískovců; mění se patrně dosti rychle. Nejnižší poloha je obyčejně slinitá.

Jak bylo právě řečeno, tvoří flyš dvě pásma, oddělená charakteristickými jurandvorskými a (méně určitými) svatomichelskými vrstvami; nazveme je flyšem spodním a flyšem svrchním. Bohužel není snadno je od sebe v praksi vždy rozeznati.

Ve slínech jsou někdy zachovány velmi dobře zkameněliny a to zdánlivě třebas stratigraficky velice hodnotné — a přece naprosto k orientaci selhávající. Nalezl jsem na př. ve slínech u Sv. Kosmy na jednom kusu zkameněliny, jež jsou uváděny z londinienu a zkameněliny charakteristické až z bartonienu, případně ještě vyšších oddělení. Na některých kusech je viděti, že jsou to naplavené kusy. Tak zdá se na př. naplavena Voluta cf. elevata Sow., vyskytující se obyčejně v londinienu, ležící vedle Cerithium sp. Toto, bohužel, nebylo možno přesně určiti; skulpturou odpovídá druhu C. funatum Mant., avšak je poněkud odchylně stavěno, což možno přičísti buď varietě, jež jsou u tohoto druhu hojné, nebo jiné příbuznosti. Je zajímavo, že z téhož naleziště uvádí R e m e š Stylophora annulata Leym., o níž praví, že je to omletý kousek. Cytherea vilanovae Desh. z téhož náleziště by odpovídala stáří bartonienu. R e m e š uvádí také Ampulina cf. sigaretina a Stylocoenia emarciata Schweig., nasvědčující rovněž vyšším polohám. Přes to jsou však zastoupeny i druhy lutitienové.

Jak patrno, není možno zatím paleontologicky rozeznati asi oba flyše od sebe (nezjistil jsem určitě ani polohy charakteristických serpulí)

a tím méně souditi o stáří skutečném. Pokud to bude vůbec možno — rozeznávání poloh flyšových je vždycky obtížné — bude zjištěno teprve mapováním celého ostrova Krku se zřetelem k stanovení obou středních poloh.

Místy se dály pokusy i těžiti uhlí ze slínů, na př. mezi Baškou a Batomaljí, ovšem úplně bezvýsledné. Zuhelnatělé rostliny tvoří jen šmouhy, nejvýše malé čočky, prakticky nevýznamné. —

Přehled nových poznatků o stratigrafii paleogenu podává přiložená tabulka. Pokud se týče zjištění skutečného stáří vrstev, zkameněliny na-



Voluta cf. elevata Sow. — Cerithium sp. Sv. Kosmo.

prosto k přesným závěrům nestačí. Určitým vodítkem je autorův nález Assilina spira de Roissy a Nummulites laevigatus Lk., odpovídající spodnějším polohám středního lutétienu pro vrstvy nummulitové. Ve vyšších horizontech nummulitových vrstev jsou (dříve již známé) druhy Assilina granulosa, Paronea Guétardi a j., svědčících pro střední až vrchní lutétien. Alveolinovým vápencům možno přičísti podle toho stáří spodního lutétienu, v nejnižších polohách snad (především basálním brekciím »křídovým«) i svrchního londinienu. Mnohé zkameněliny se blíží fauně uváděné od St. Giovanni Illarione (Siphonalia scalaria Lk. atd.). Oboje flyšové vrstvy a jurandvorské i svatomichelské polohy v nich svědčí převážně pro stáří svrchního lutétienu, zvláště uvedenými nálezy druhu Campanile giganteum a j. význačných zkamenělin v jurandvorských vrstvách, přes to, že obsahují promíšeně faunu nejrůznějšího stáří. Současné výskyty zkamenělin až tongrienových bude nutno přičísti většinou nedostatečné znalosti stratigrafického rozšíření zkamenělin. Pouze svrchní flyš dosahuje asi stáří

auversienu až bartonienu (»priabonien«), snad v nejvyšších polohách ještě menšího. —

Neogen, kvatérner. Po ukončení hlavních orogenetických pochodů v tercieru blížila se rozloha souší a moře dnešním poměrům, takže na dnešní souši nalezneme mladé mořské sedimenty jen nepatrně zastoupeny. Zdá se, že některé zjevy se dají přičísti malému kolísání moře. V holocenu dovozuje Petrbok takovéto kolísání paleontologicky v zátoce baščanské, kde mezi sladkovodními nánosy je poloha mořských oblázků s druhy Cerithium a Trochus sp.

V údolí baščanském i jinde jsou i žlutavé, vápnité písky, dobře zvrstvené, dosahující při pobřeží mocnosti asi 5 metrů i více. Stáří jich bývá odhadováno jako plistocenní. Nalezneme je vesměs jen v nižších polohách, leží vždy více méně horizontálně. Jsou složeny z drobného i hrubého písku, dobře okulaceného, pocházejícího hlavně z křídových vápenců; řídce jsou v nich, hlavně v některých polohách, neobroušené úlomky. Některé polohy jsou spolu pevně stmeleny, takže vyčnívají jako tenké desky. Stěny písků bývají skoro kolmé. Fauny nebylo možno v nich zjistiti, takže zůstává stáří i původ nerozřešeny. Dále se jimi autoři nezabývali. Jejich naleziště i všechen charakter omletého materiálu však svědčí, že nutno je považovati podle mého názoru za pobřežní sedimenty mořské, takže jsou důkazem, že v mladém kenozoiku moře sahalo dočasně výše než dnes, že tu kry zemské kolísaly dosti značně. Dobu tohoto stadia je těžko stanoviti podrobněji — je mladší, než nejposlednější orogenetické pochody, poněvadž písky leží na paleogenu diskordantně, a starší než holocenní pokryvy, jak svědčí poměr písků resp. pískovců a slepenců k svahovým brekciím a nánosům potoka. Pravděpodobně odpovídá mladšímu pliocenu až plistocenu.

O genesi těchto písků nenacházíme jasnějších zpráv vůbec, ač je velmi zajímavý. Jiný výklad, než že jde o mořské nánosy, je, myslím, nemožný. Nemluvě o místech výskytu, vrstevnosti a povaze materiálu, je důležito, že leží výskyty těchto písků všude, kde se zachovaly, ve stejné výši: Nalezneme je v baščanské zátoce na příklad, ale také na ostrově Prviči ve stejné výši.

Hlavně v baščanském údolí jsou svahy pokryty mocnou ssutí, složenou z křídových úlomků, měřících často až dva metry v průměru. Pokud jsou stmeleny, bývá tmel červený, upomínající na terru rossu. Stáří těchto brekcií není jednotné, mění se od recentních až do pevně stmelených úlomků holocenních a snad i starších. Mapovati rozšíření těchto svahových brekcií detailně není ovšem příliš důležité. Dlužno ještě podotknouti, že na některých místech je Waagen omylem považoval za vrstvy křídové: V zátoce Monza Luka dva ostrůvky křídové, jež Waa-

g e n znázorňuje na své mapě, jsou ve skutečnosti mladé brekcie, složené z pevně stmelených úlomků křídových (coniacienových) vápenců, jež v sobě případně ještě chovají rudisty. Jsou ovšem diskordantně uloženy na paleogenu (pískovcích), jenž tam ušel W a a g e n o v ě pozornosti.

Dalším kvaternerním členem jsou nánosy potoků. Nejrozšířenější jsou v baščanském údolí, které z veliké části vyplňují po obou březích Torrente della Fiumera (»Velké řeky«). Jsou to hlavně slíny z rozrušených slínů paleogenních, tak podobné někdy, že se dají od těchto primérních výskytů petrograficky dosti špatně rozeznat; podružně jsou zastoupeny i písky. Tyto holocenní nánosy jsou proto významné, že zakrývají celou stavbu dna baščanského údolí. Jinde jsou rozšířeny při potůčcích, celkem však nepatrně, na příklad v zátoce Vela Luka a j. Při drobných pramenech, ostatně řídkých, bývají poněkud vyvinuty i vápenné tufy.

Na nízkém pobřeží, především však v baščanské zátoce, je nutno zaznamenati při recentních vrstvách i dosti široký strand, obsahující mimo jiné veliké množství omletých nummulitů. Při rozvodnění (po bouřích, za bóry a p.) bývá prorván baščanským potokem; jinak tvoří souvislý oblouk.

Pokud se týče výskytu terry rossy — beauxitu, omezuje se na malé množství v depresích krasových vápenců; je často v souvislosti s brekciemi na basi paleogenu. U Staré Bašky bylo za války na železitý beauxit těženo pro aluminium, avšak s nevelkým výsledkem. Leckde nalezneme terru rossu, avšak v množství podružném; spíše svou barvou je nápadna. Studiemi o její genesi jsem se nezabýval.

O eolickém původu hlin jsem nenabyl důkazů. K recentním zjevům můžeme přičísti také tvoření malých enosivních jehlanců v mladých pískách, v baščanské zátoce, krasové fenomeny, o nichž se krátce zmíníme v morfologické části, a p.

Tektonika.

Dosavadní názory, týkající se tektoniky ostrova Krku, jsou v podstatě dvojího druhu. Především si všimněme oněch, jež se opírají o přímé mapování a jsou vyjádřeny hlavně pracemi S t a c h o v ý m i, méně doplňky W a a g e n o v ý m i nebo S c h u b e r t o v ý m i poznámkami.

Podle toho všechen kraj je dán táhlými synklinálami a antiklinálami křídovými — synklinály jsou vyplněny paleogenem, a jsou-li hlubší, mořem — jichž podélné osy jsou celkem paralelní s dnešním dalmatským pobřežím. Vrásy ty prý vznikly tlakem ze severovýchodu a to v době oligocenní nebo až neogenní a jsou značně porušeny směrnými zlomy. Mimo to však je kraj zastižen mladými, snad kvaternerními zlomy příčnými. Na mapě nenalezneme, bohužel, naznačených zlomů vůbec.

Druhé tektonické názory se opírají o přesunové theorie a týkají se více méně Dinarid všeobecně. Resumé jejich je představa, že v Dinaridech podobně jako v Alpách a jiných horstvech se uplatňuje přesunová stavba, avšak že Dinaridy na rozdíl od klasifikace dřívější — spolu s Apenninami, Atlasem a Taurem se jeví proti ostatním horstvům evropským (Pyrenejím, Alpám, Karpatům, Balkánu a asijskému Kavkazu) jako samostatný celek, s vrásami překlopenými k jihu.

Dlužno uvážiti, že o platnosti theorie přesunové jsou dosud spory, které však vyznívají po většině s určitým omezením příznivě. V poslední době jsou to na př. debaty francouzských geologů o tektonice Atlasu a j.

V Dinaridách rozeznává Kober čtyry zony, tři dinarské vlastní, a čtvrtou adriatickou, vnější zonu; celek je jednotně překlopen k jihu. Jednotlivými otázkami (Termier a j.) se zabývati nebudeme, poněvadž se týkají hlavně vztahu Dinarid k Alpám, na něž není možno z tektoniky vnější zony, kam patří Krk a sousední ostrovy, usuzovati.

V základě můžeme z theorií o stavbě Dinarid předpokládati, že i v popisovaných krajích nalezneme přesuny, případné příkryvy a to překlopené k jihu, resp. jihozápadu; horotvorný vliv*) přicházel od severovýchodu. Podle některých jsou na ostrovech dalmatských massy, přesunuté z Velebitu. Tolik je možno analogicky předpokládati, avšak detailně nebylo v našem území v tomto smyslu pracováno.

Všimněme si lokálních tektonických poznatků o ostrově Krku, tak jak vyplývají přímo z našich studií, a pak pokusíme se srovnati je i s regionální theorií přesunovou, pokud to bude možno. —

Stavba ostrova Krku není zdaleka tak »äusserst klar und einfach«, jak o ní praví Waagen a jak ji také představuje ve své mapě. Přehlížené »zajímavé detaily«, o nichž mluví, jsou mnohdy svědectvím, že jde o stavbu velice složitou.

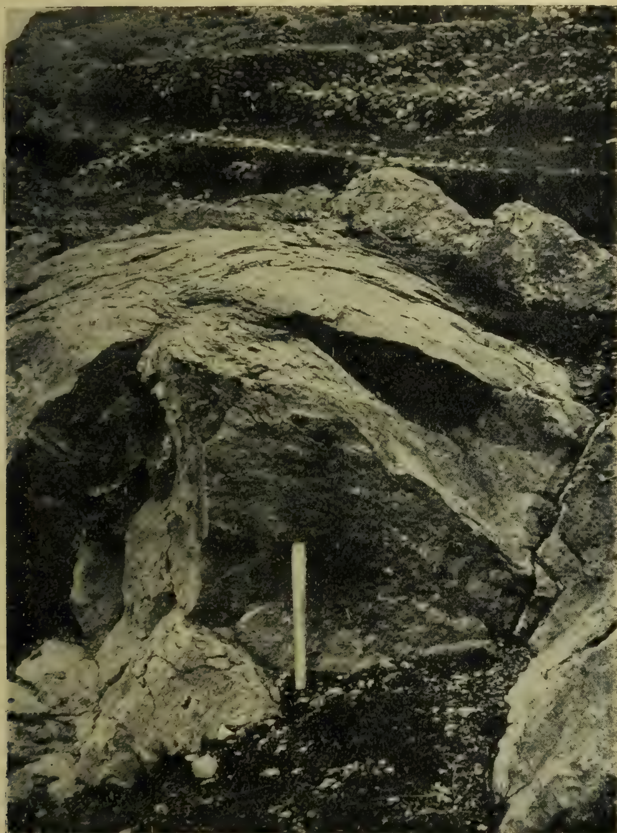
Uvažuje se vlastně jen o vrásnění kenozoickém. Naproti tomu vyplývá přesvědčivě, jak uvidíme z dalšího, že základní rysy dnešních ostrovů byly předurčeny vrásněním lutétienovým. Jeho veliký vliv je patrný na příklad již z toho, že přes kenozoické vrásnění nalezneme paleogenní sedimenty takřka pouze v depressích — které byly dány ovšem již před sedimentací, tedy předlutétienovým vrásněním. Naproti vlastním Dinaridám a j. je tedy stavba ostrovů Krku a okolních dána vrásněním

---

*) Kober předpokládá (Bau der Erde, 1921), že jmenovaná horstva vznikla tlakem mezi massivem africkým a pevnými krami evropskými. Zona horstev překlopených k jihu (dinarský typ) od horstev překlopených k severu (alpský typ) je oddělena jizvami nebo širším »Zwischengebirge«. Hranice mezi Alpami a Dinaridami je v základech dána (Suess) známou jizvou dinarskou.

předlutétienovým — rysy jím dané jsou ještě dnes významnější než účinky orogenetických pochodů kenozoických.

Zjistiti, jak se komplikují účinky obou vrásnění, bude otázkou budoucího mapování. Dosud, jak řečeno, se nevěnovala povaze vrásnění předlutétionového pozornost takřka žádná, a o vrásnění kenozoickém jsou



Antiklinála jurandvorská v baščanském údolí. — L'anticline de Jurandvor dans la vallée de Besca nuova.

spíše všeobecné charakteristiky přesunů v Dinaridech a Alpách, jež jsou budovány na základě vzdálených horstev. W a a g e n o v a tektonika nepodává v moderním smyslu téměř ničeho.

Ostrov Krk v jižní části (a vlastně všechen) je dán křídovými antiklinálami; prostřední synklinála, t. j. na jihu údolí baščanské, je vyplněna paleogenem. Menší synklinály jsou po obou stranách ostrova, tvoříce údolí Staré Bašky a Vela luka. K tomuto schematu dlužno podotknouti,

že baščanské údolí je porušeno nesčetnými směrnými zlomy, takže místo synklinálou může býti označeno téměř příkopovitou propadlinou.

Tolik asi praví Waagen; zlomů však nevyznačuje ani v textu, ani na mapě; profilu nepodává žádného. Jediný profil, který existuje pro tyto krajiny, je Stachův; pochází však již z let šedesátých.

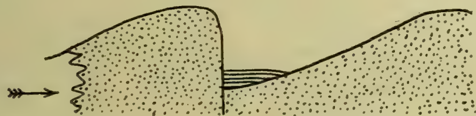
Zvláště důležité je baščanské údolí. Musíme v něm vysvětliti některé nejasné zjevy. Bylo vždy s podivením, že jen výjimečně nalezneme v něm takové zapadání paleogenních vrstev, které by bylo pro synklinálu normální: Obyčejně zapadají vrstvy naopak, leckdy eocen zdánlivě zapadá pod křídu, »was einfach dadurch erklärt erscheint, dass die Kreidekalkplätze ihrer Schwere folgend gegen die Mulde drückten und sich vorschoben«. (Waagen). Přes nejrůznější výklady, často hodně násilné, nebylo podáno dosud řešení uspokojivé; především nebylo možno vysvětliti, proč tyto odchylky, překocení vrstev, jsou po obou stranách synklinály, takřka všeobecné v baščanském údolí, kdežto normální zapadání výjimkou.

Představa synklinály pro baščanské údolí je však nesprávná a vznikla pouze pod dojmem toho, že v severní části Krku byla synklinála zjištěna. Svědčí proti ní jinak vše, sklon vrstev a především autorův nález jádra antiklinály, budovaný jurandvorskými vrstvami, v malé skalce vyčnívající z holocenu jižně od Jurandvora. Antiklinála vznikla vyborcením vrstev mezi křídovými kramí, avšak zároveň vznikaly v ní i směrné zlomy, podél nichž se jednotlivé kry přesmykovaly a to vždy kry od osy antiklinály vzdálenější přes sousední kru, bližší ose. Mimo to uvolněním tlaku patrně některé kry se propadly. Jak patrno z toho, můžeme podle hloubky denudace a p. nalézti vedle sebe vystupovati na povrchu (pokud ovšem jich nezakrývá holocen a nebyly posunovány podél mladších, příčných zlomů) pruhy hornin nejrůznějšího stáří, čemuž také skutečně je. V celku však je relativní (zdánlivé) propadnutí takové, že nejstarší horniny jsou na okrajích, mladší obyčejně blíže středu. Uvážíme-li, že příčné zlomy rozbily tyto pruhy v jednotlivé kry, nejrůznějším způsobem posunované, a že ze všeho vyniká z velké části z pod nánosů jen některá taková kra, jež byla výše vysunuta či vzdorovala více rušivým vlivům, je zřejmo, že je skutečně nesnadné určiti správný pořad vrstev. Nebylo ovšem také možno zjišťovati detailní stratigrafii, když nebylo tektonice porozuměno.

Tektonický ráz byl v zásadě dán již vrásněním předlutétienovým. Musíme předpokládati, že po tomto vrásnění bylo v místech dnešního baščanského údolí a patrně po celé délce ostrova proláklina, jež byla zatopena pak paleogenním mořem. Před lutétienem na těchto místech bylo již tedy předurčeno vytvoření synklinály, což se také v kenozoiku

stalo, vyjímaje však jižní část Krku. Tam vidíme leckde ještě jakési doklady této tendence, ale v podstatě se stal opak: Kry křídové svíraly spolu jiný úhel, dno kladlo odpor, takže tlak působil jinak než na severu. Je pravděpodobno, jak uvidíme v úvahách o směru tlaků, že na západní straně baščanského údolí byla strmá stěna, patrně dislokační, kdežto stěny východního hřbetu byly asi povlovnější. Tlakem neogenním byly vrstvy vypnuty nejprve jen v malou vlnu, ale stále vzrůstajícím tlakem, když nebylo možno pro odpor dna prohnouti se synklinálně, vyborceny mezi tísnícími křídovými kramí v antiklinálu. Když tlak pokračoval, vznikly v antiklinále směrné zlomy a podél nich přemykovány vrstvy přes střed.

Doklady takových přesmyků směrem ke středu antiklinády v baščanském údolí také skutečně nalezneme, ač většina je zakryta holocenem.



Schema povrchu před vyborcením paleogeních vrstev mezi křídovými krami v antiklinálu. Dno klade odpor.

Rélief schématique antérieur au bombement des couches Paléogenes entre les massifs Crétacés, formant un anticlinal. La base résiste.

Tak na příklad několik set metrů severně od Bašky vidíme kru alveolinových vápenců přesmyknutou přes nummulitové vrstvy; celek je ještě porušen příčným zlomem. Podobně několikráte již popisovaná deska křídová u Sv. Madony (Gorička), severně od Batomalje — tedy na západní, protější straně údolí — je přesmyknuta daleko přes paleogen, a spočívá přímo na flyši. Je škoda, že je tolik tam ssuti, že není možno zjistiti tektonické poměry i s druhé strany. Spolupůsobí tu však i činnost příčných zlomů, jež jsou morfologicky dobře patrny. Viz fotografie.

Jak patrno, je hlavní depresse na ostrově Krku ve své jižní části zcela jinak stavěna, než se myslilo. Zbývá vysvětliti vztah jižní části k severní, kde nalezneme doklady pro to, že jde o synklinálu. Již pohled na geografickou mapu ukazuje, že ostrov Krk je uprostřed snížen, s obou stran zaškrcen, asi mezi zátokou u města Krku (Veglia) a zátokou Verbeniku. Jižně odtamtud, na př. u Sv. Juri, je ještě velmi zřetelně patrná antiklinála. Neznám detailněji geologii severní části ostrova Krku, ale je-li tam pravdivá představa o synklinále paleogenní, je jisto, že musíme hledati právě v místech této nejužší části Krku styčný bod. Geologická mapa ukazuje, že je to asi v okolí hory Klam, kde eocen je roztržen ve dva

hlavní komplexy po obou stranách této hory. Poměry na severu ostatně budou asi také složitější. —

Tektonika křídových hřbetů, vykládaných jako prosté antiklinály coniacienového vápence, v nichž uprostřed vyniká, pokud je denudací



Přesmyk alveolinových vápenců přes vrstvy nummulitové. Zlom probíhá vodorovně ve vzdálenosti asi 75 mm od spodního okraje obrázku. Celek přeražen příčným zlomem (na fotografii svislý). Východní horský hřbet, severně od N. Bašky.
Calcaires alvéoliniques charriés au-dessus des couches nummulitiques. La faille est horizontale, 75 mm bord inférieur de la photographie. Le tout est traversé par une faille transversale (verticale). La chaine orientale, au Nord de Besca nuova.

obsaženo, jádro z vápenců turonských, je také značně jiná v detailech.

Nalezneme totiž ve velkém směrném rozštěpu, který jde přes výběžek Braciol na západní břeh ostrova Prviče, uloženiny paleogenní, dosud neznámé. Hřbet je porušen celou řadou směrných zlomů, podél nichž se na něm objevují nejrůznější vrstvy vedle sebe. W a a g e n patrně

nemohl krajinu tu navštíviti, poněvadž není možno jinak vysvětliti, že na mapě tam zanáší jednotný, široký pruh coniacienových vápenců.

Místo toho spatříme, že tyto vápence jsou pojednou nahrazeny vápenci turonskými, v jejichž nadloží následují brekcie a opět coniacienové vrstvy, v nichž jsou vraženy dokonce paleogenní sedimenty. Paleogen má rozlohu podobý klínu, súžujícího a vyklíňujícího se k severozápadu, k jihovýchodu se rozšiřujícího, až zmizí pod mořskou hladinou. Táhne se ovšem pod ní dále a vystupuje na západním břehu ostrova Prviče. Tam je značně širší (pokud není lokálních poruch) a chová v sobě i mladší paleogenní vrstvy. Ale vidíme z nich jen východní křídlo, poněvadž na západ opět je moře; přes to však je zřejmo, že dále k jihovýchodu se znenáhla opět vyklíňuje, horizontálně i vertikálně.

Podobnou klínovitou podobu mají i jiné výskyty eocenu; na př. u Monza Luky, kdež však také nejsou na Waagenově mapě správně zanešeny.

Vraťme se zatím k tektonice celého hřbetu horského. Sledujeme-li jednotliva zmíněná pásma, vidíme, že stavba je mnohem složitější, než kdyby šlo o prostý antiklinální oblouk. Detailnějším mapováním se zdá, že jednotlivé kry jsou přesmykovány přes střed, západnější přes východní, a to až asi k čáře, probíhající zátokou Braciol; stavba východní části je komplikována, a to předběžným morfologickým tvarem.

Sestrojení detailních profilů je mimo jiné na překážku to, že je často dosti obtížno zjistiti určitě sklon vrstev. Zlomy samy bývají patrny morfologicky, rýhou, a kromě toho ovšem chyběním určité polohy (brekcie!). —

Celkem máme co činiti alespoň se třemi horotvornými pochody: nejvýznamnějším předlutétienovým, jehož detaily nám ovšem unikají, po druhé s neogenním vrásněním a konečně s mladou, posthumní fází příčnou.

Rozeznati účinky prvních dvou hlavních vrásnění není snadné. Působily stejným směrem nebo právě protilehlým, takže směrné dislokace jsou směrem nerozeznatelné. Bude úkolem příštích mapování rozlišiti, co je dílem kterého vrásnění, podrobně. Zatím se ukázalo, že snad všechny zjištěné směrné zlomy zasahují i paleogen, jinými slovy, že náležejí vrásnění neogennímu. Zlomů výhradně stáří předlutétienového, ač jistě existují, nepodařilo se mi (spolehlivě) dokázati, a to proto, že by byly patrny jen na náhodném zřetelné příčném odkrytu míst, kde je vyvinuta jak křída, tak i paleogen, což je zjev vzácný.

Některé zlomy směrné jsou nápadně přímočaré, jiné ohnuté, což jistě budí dojem různého stáří. Pod přikrývkou paleogenu ovšem zlomy předlutétienové nejsou viditelny; naopak, kde je — na př. na horských hřbe-

tech — zlom v křídě, není možno rozeznati, je-li předlutétienový nebo neogenní, poněvadž tam vesměs chybí k srovnání paleogen.

Pokud se týče velikých přesunů — aby na př. z pobřeží dalmatského, z Velebitu, byly přesunuty massy na ostrovy — nebyly naprosto zjištěny a pokládám je (alespoň pro severní Adrii) určitě za neexistující. Schubert odmítal také jejich existenci. Tím naprosto se nemůžeme ovšem dotýkati vlastní stavby Dinarid. Ostrovy jsou patrně již pásmo příliš vzdálené. Mimo to je ostrov Krk a okolní stavěn poněkud odchylně než na příklad blízká Istrie. Souvisí to asi nějak se zářezem, který v těchto místech dělá Adriatické moře do pevniny; je to patrno, spojíme-li břehy Dalmacie a Istrie.

Přesunová stavba by se zdála pravděpodobná, kdybychom předpokládali, že všechna křída na ostrově Krku je ohromná ležící vrása, přesunutá tam ze severu, a paleogen v depressích že vyniká jakýmisi okny do ní. Tektonika, o níž mluvíme, by představovala pak jen detailní poruchy. Poznamenávám tuto možnost, avšak nemohu ji připustiti.

Je nyní nezbytno vzíti v úvahu stejný směr neogenního vrásnění, působící od severovýchodu k jihozápadu.

Tentýž směr Waagen uvádí ve svých pracech, avšak nedokládá svého tvrzení ničím. Je to asi jen prostá dedukce ze stavby vzdálenějších krajin. Ve skutečnosti totiž tento směr se ku podivu na ostrově Krku a okolí neuplatňuje zřetelně, naopak převládá tu dojem tlaku právě obráceného směru, jdoucího od jihozápadu. Již pohled na geografickou mapu a tím spíše jízda kolem ostrovů na to zřetelně ukazuje: Na jihozápadní straně ostrovů je sklon mírný, na severovýchodní nápadně příkrý.

Je nyní otázkou, v jakém poměru je tento opačný směr tlaku ke směru vrásnění neogenního jinde. Buď jde o místní odchylku, ovšem co do rozlehlosti regionální, která platí pro tyto kraje, a upomínala by na směr zjevu alpského. Anebo jde o opačný směr z dob vrásnění předlutétienového, jenž nebyl v kenozoiku novými pochody dosti setřen. To považuji za pravděpodobnější. Zatím není možno přesně usuzovati o poměru těchto dvou vrásnění; je dokonce možno, že oboje tu byly tyto možnosti.

Z morfologického rázu se zdá pravděpodobno, že tlak vrásnění snad předlutétienového přicházel od jihozápadu. Snad oba tlaky.

Vrásnění neogenní bylo nuceno navazovati na jeho výsledky, mělo do jisté míry diktované působení. Na rozdíl od severnějších pochodů alpských i dinarských bylo nesrovnatelně slabší: Nejen že nestačilo vytvořiti (alespoň v okolí ostrova Krku) mohutné přesuny vrásové a p.,

nýbrž dokonce nemohlo většinou než pracovati na základech předlutétienového vrásnění, působiti na slabiny tenkráte vzniklé a p. Tak na př. dnešní tvar baščanského údolí byl dán v základě jako depresse v předlutétienových dobách, ale přes to tam intensivně působily na povrchu horotvorné pochody neogenní. Naproti tomu vypnuté kry hřbetů, pevněji stavěné, kenozoickému vrásnění v podstatě odolaly.

Pokud se týče mladých pochodů orogenetických, jsou patrny z příčných zlomů a ohnutí vrstev. O stáří jejich zatím není možno říci ničeho bližšího, je však větší než stáří brekcií. Značí patrně znovu probuzené doznívání alpsko-dinarského vrásnění. Zlomy jsou obyčejně dvojího systému, směru asi *h* 4 a *h* 2. Vrstvy jimi bývají posunovány, avšak mnohem nápadnější jsou morfologicky, hlavně ve hřbetech v podobě rýh, obyčejně velmi hustě vedle sebe. Při pobřeží bývají rovněž dobře patrny nebo zastoupeny sítí diaklas. Uprostřed křídových hřbetů nedají se zlomy dobře sledovat, jsou tam však jistě proti počtu na otevřených místech řidší.

Na některých místech jsou vrstvy esovitě zprohýbány, zborceny. Mapujeme-li jednotlivá pásma, vidíme, že jednotlivé kry mají různý směr. Obyčejně je to zjev působený zlomy, ale někdy je z pravidelného postupu patrno, že vrstvy jsou znenáhla zprohýbány. Směr postupuje na př. *h* 8, 9, 10, 11, případně opět *h* 10, 9 a p. Toto ohnutí je místy viděti již morfologicky z mapy; často ovšem je porušováno (příčnými) zlomy. Pěknou ukázku esovitého ohýbání přímým tlakem vidíme na vztyčených vrstvách pevných pískovců při západním břehu baščanské zátoky. (Srovnej foto.) W a a g e n o v i tento zajímavý výskyt ušel. Vrstvy byly vztyčeny — jsou postaveny skoro na hlavu, zapadajíce poněkud ve smyslu antiklinály k jihozápadu, proti horskému hřbetu ze starších vrstev — v době tvoření antiklinály, resp. vůbec směrných poruch neogenních. Ohnutí vrstev, jež vypadají jako nějaké koleje na hladině, bylo způsobeno tlakem jdoucím celkem napříč jejich směru, tedy tlakem blízkým, který vytvořil i příční zlomy. Je to zároveň důkaz, že vrásnění příčné je mladší než vrásnění podélné. Není ovšem vyloučeno, že jednotlivé směrné poruchy jsou ještě mladší; nejeví totiž již poruch, což však může býti způsobeno tím, že, jak řečeno, horská, masivnější místa příčnému vrásnění odolávala.

Ohnutí vrstev je svědkem, že toto příčné vrásnění působilo tlakem, nikoliv tahem, napětím. Je to však asi jenom fáze, jakých bylo několik, nejméně dvě, je-li zprohýbání synchronické s některým z obou systémů příčných zlomů; jinak alespoň tři. Bohužel v krasovém terénu je bližší řešení poměru zlomů obtížno, a kde terénu krasového není, je to nemožno pro mladé pokryvy. Bude to úkolem dalších prací.

V celkových rysech tektoniky je patrný sice základ synklinál a antiklinál, ale převládá a hlavně morfologicky vyniká rozbití v jednotlivé kry, různě vysunované, případně pokleslé při uvolnění tlaku. Pokleslé



Vztyčené vrstvy pevných pískovců paleogenních na západním břehu baščanské zátoky. Zapadají poněkud ve smyslu antiklinály ke křídě (v pravo) a jsou esovitě zprohýbány na důkaz existence mladého příčného tlaku. V pozadí ostrov Prvič.

Bancs vertic-aux des grès durs du Paléogène à la côté occidentale de la baie de Besca Nuova. Plongeant un peu dans le sens de l'anticlinal vers le Crétacé (à droite) et courbés en sigmoides comme preuve de l'existence d'une pression transversale. Au dernier plan l'île de Pervicchio.

kry bývají stavěny skoro kolmo, — na př. paleogen na západní straně baščanského údolí. —

Resumujeme-li tyto tektonické poznatky, vidíme, že pokud jde o lokální mapování, vyžaduje práce Waagenova úplného přepracování,

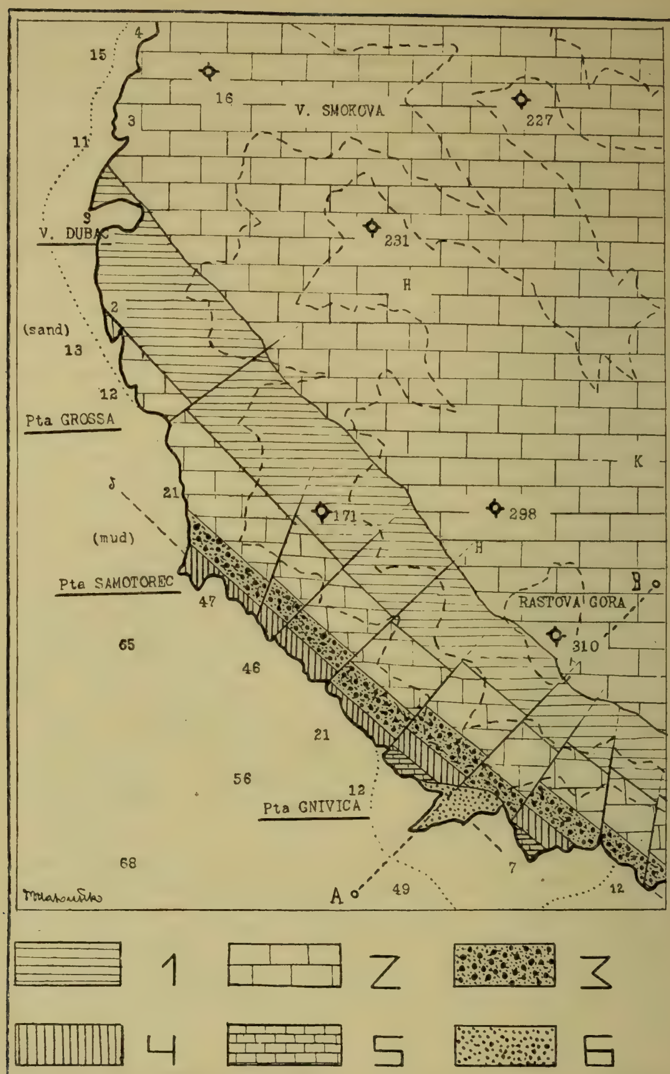
jak bylo naznačeno na př. při popisu stavby baščanského údolí a jinde. Místo synklinály jde o velice porušenou antiklinálu, jejíž zdánlivé propadnutí je zaviněno hlavně postupným přesmykováním křídel přes střed; jinde místo prostých antiklinál nalezneme antiklinály, jichž křídla jsou namnoze také značně složitě stavěna. Svědčí o tom i existence kenozoických vrstev v místech, kde podle map Waagenových bychom hledali právě nejstarší horniny. Srovnáním náčrtků map vyniknou poměry nejlépe. Co se tkne stavby regionální, ukazuje se, že kenozoická vrásnění dotkla se ostrovů poměrně dosti slabě, takže není možno je srovnávati s ostatními kraji, severnějšími hlavně, kde v kenozoiku byla vytýčena dnešní veliká horstva a stopy starších orogenetických vlivů, sebe mocnějších, byly tak značně zakryty. O velikých přesunech, a tím méně o přesunech z Velebitu na ostrovy Krk a okolní, nemůže býti řeči.

Morfologie.

Dnešní rozloha útvarů geologických.

O rozšíření jednotlivých vrstev na dnešním povrchu jednají specielní, lokální práce. Omezíme se tedy jen na několik poznámek, vztahujících se i k přiloženým mapkám. Paleogenní pruh na nejjižnějším hrotu ostrova Krku při západním břehu (Pt. Queniat = Crkveni rt.), je tam v podstatě synklinálně prohnut a obsahuje ve středu jakožto nejvyšší vrstvy nummulitové. Jen zcela nepatrné stopy mladšího paleogenu jsem zjistil; patrně byly kdysi poněkud vyvinuty, ale později rozrušeny. Křídová kra, která vězí v jeho západním křídle, je přesmyknuta přes východnější část. Pruh začíná již u prvého výběžku západně od Pt. Mezzo-Panetto, tedy východněji, než jej kreslí mapa Waagenova.

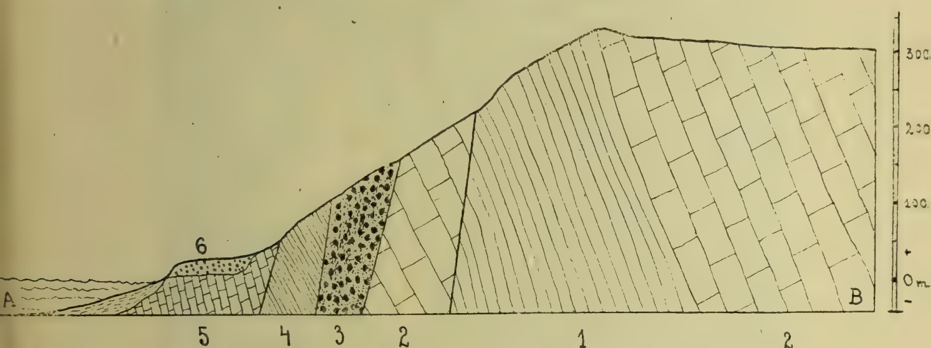
Zajímavý je nově zjištěný pruh eocenu, táhnoucí se normálním směrem přes V. Braciol, složený rovněž z alveolinových vápenců, v nichž jsou vloženy vápence nummulitové. I on je částečně v těchto místech synklinálně prolomen, což je snad v souvislosti s tím, že křídová kra, která se k němu přikládá ze západu, je přes něj opět přesmyknuta. O tomto pruhu, pokračujícím slabě na ostrov Prvič, byla již zmínka v části tektonické. Křídové kry jsou v okolí rovněž značně porušeny. Opakuje se tam několikrát spodní a svrchní oddělení, jak je patrno z mapy nebo v obdobných poměrech, naznačených na situačním profilu západním břehem Prviče. Vidíme, že tam následují od východu k západu místo pouhé massy spodních (turonských) vápenců rudistových postupně: Vápence turonské, vápence coniacenové, turonské; eocenní alveolinové, nummulitové vrstvy a konečně flyš (slíny a pískovce), částečně krytý ještě u Pt. Gnivica diskordantně uloženými žlutými písky, jež jsme popsali již



Náčrtek geologické mapy západní části ostrova Prviče. — Carte géologique de la partie occidentale de l'île de Pervicchio. 1. Turonské vápence. - Calcaires Turoniens. — 2. Coniacienové vápence atd. - Calcaires etc. Coniaciens. — 3. Alveolinové vápence. - Calcaires alvéoliniques. — 4. Nummulitové vrstvy. - Schistes nummulitiques. — 5. Flyš. - Flych. — 6. Písky. - Sables.

u N. Bašky jakožto pravděpodobný nový doklad kolísání hladiny moře ještě v mladých dobách kenozoických. Při břehu jsou ssuť a mořské nánosy. Jednotlivé vrstvy jsou namnoze odděleny zlomy; sklon se mění, převládá však zapadání skoro kolmé, případně k severovýchodu skloněné, tedy antiklinální.

Sledujeme-li poměry na ostrově Krku dále k východu, shledáme, že vrstvy mají výskyty dosti normální; až teprve když se blížíme do baščanského údolí, nalezneme nápadné odchylky. Na západni straně si povšimneme zajímavého výskytu jurandvorských vrstev ve výši asi 70 m umístěnými, jak se zdá, nad nummulitovými vrstvami a zdánlivě pod vápenci alveolinovými. Mají tam směr h 10, sklon asi 20° k jihozápadu, tedy ve smyslu antiklinály. Je to patrně kra, která tam uvízla při vznikání a propadávání antiklinální klenby, tedy směrnými poruchami. Bohužel, není možno poruchy sledovati pod příkryty ssuti.



Průřez k mapě ostrova Prviče přes Pt. Gnivica, znázorňující rozšíření kenozoika. Po stránce tektonické schematisován.

Coupe à travers la carte géologique de l'île de Pervicchio par Pt. Gnivica, indiquant la distribution du Cénozoique. Voir la carte. (Tectonique schématique.)

Waagenovi byly výskyty mladšího paleogenu neznámy všude od svatého Kosmy jižněji. Ve skutečnosti, jak ukazuje náčrt mapy, nalezneme je ještě na několika místech, nemluvě o zmíněné právě kře, uvíznuvší, plovoucí takřka ve výši. Hned při ohybu, kde však namnoze je pokrývají horizontálně zvrstvené písky, vynikají z pod nich při břehu. Nalezneme tam i odkrytý pěkný příčný zlom, jak vidíme na přiložené fotografii, podle něhož na jedné straně jsou slíny, na druhé (severnější) pískovce. Mimo to jsou ještě jižněji při hladině vztyčené vrstvy pevného flyše, o němž se stala již zmínka již v části tektonické.

Vlastní baščanské údolí, přikryté ovšem holocenem potoka, je budováno velice pestře. Střídají se tam v nejrůznějších variacích kry všech mladších poloh paleogenních, jak ukazují místní drobné výskyty. Přesné mapování není možné, poněvadž míst takových, kde alespoň s jakousi jistotou můžeme usuzovati na podklad pod holocenem, je velice málo; ale kdyby i holocenu nebylo, vyžadovala by detailní práce map mnohem podrobnějších.

Západní horský hřbet, k němuž dojdeme dále, ukazuje také zajímavé podrobnosti. Pod flyšem, s nímž se nejčastěji v baščanském údolí setkáme, leží nummulitové vrstvy. Sahají až k mollu, kde jsou značně dislokovány a sousedí právě u molla s alveolinovými vápenci a to s vyšším



Příčný zlom ve flyši jižně od Sv. Kosmy.
Faille transversale dans le flych sud de St. Kosmo.

jejich horizontem. Vápence ty můžeme sledovati po celém břehu až k Pt. Kričin; W a a g e n tu všude omylem kreslí křídu, jíž nalezneme tu leda v ssuti ze západnějšího pruhu. U Pta Kričin jsou poměry komplikovány příčným zlomem a křídovým pásmem. I dále, v Monza Luka, kreslí W a a g e n všude tuto křídu, ve skutečnosti, jak patrno, mnohem menšího rozšíření. Zakresluje tam v zátoce i dva křídové ostrůvky, vyčnívající zpod ssuti. Ve skutečnosti všechno toto údolí je budováno paleogenem a to vápenci alveolinovými, nummulitovými, slíny a pískovci.

Křídové ostrůvky, W a a g e n e m zakreslené, jsou pouze stmelené brekcie z křídových kamenů, obsahujících ovšem v sobě místy i rudisty;

poněvadž i červený tmel je velice podobný, je omyl snadno vysvětlitelný. Nejlepším důkazem jejich stáří je, že nalezneme pod nimi diskordantně ležící pískovce s nummulity, snad odpovídající stáří vrstev svatomichelských.

Křída tvoří pouze úzký pruh, jenž se severozápadně od kostelíka sv. Ivana spojuje s hlavním pásem křídovým. Spojení to je tektonicky dosti komplikované. Dá se těžko přesně vymapovati, poněvadž se tam všude setkáváme s rozbitými skalami a ssutí, k tomu pak se někdy vápence alveolinové, jež tam rovněž zasahují, nedají rozeznati od křídových leč podle alveolin, takže snadno uniknou pro svoji petrografickou podobnost pozornosti, hlavně v místech, kde třeba slézati 200—300metrové skály. Je jisto, že křída se táhne tam mnohem dále, než ji Waagen zaznamenal, jak ukazují četné nálezy rudistů; není to tedy jen osamocená hora, nýbrž souvislý pruh, od celku oddělený jen klínem paleogenu.

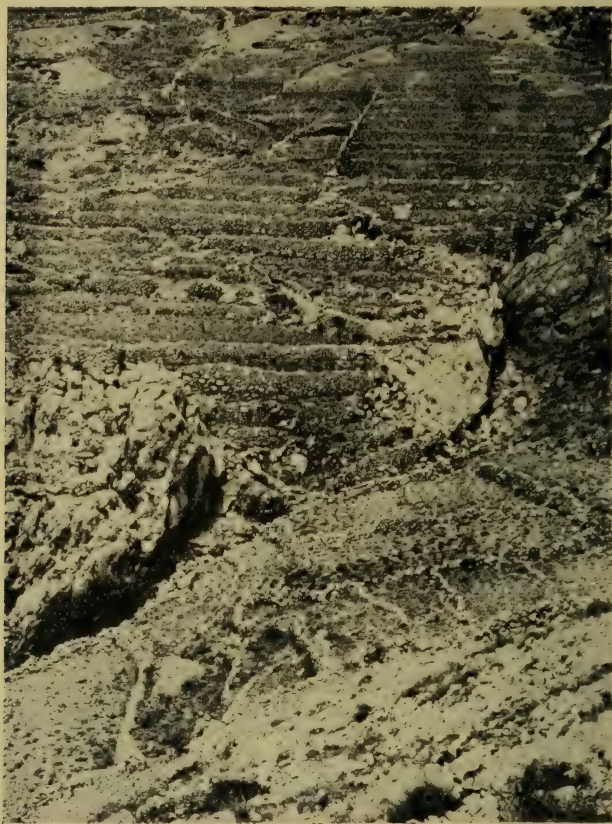
Tento klín se zúžuje směrem do vnitra ostrova a odpovídá svým rázem klínu, jež jsme zjistili v západním hřbetu ostrova. Je však porušenější, jak je viděti již z postupného měnění směru vrstev; mají u moře směr h 10½, severněji se zatáčejí k západu. Jde o sborcení, zohýbání, jež jsme poznali i jinde, a jež je tam nejvýznačnější, patrně pro blízkost mohutného poruchového baščanského údolí.

Levé, západní křídlo je málo zřetelno co do stavby. Probíhají tam četné zlomy, které zmenšují mocnost, nemluvě o zakrytí vrstev recentienem. Tím se stalo, že tamnější vrstvy ušly Waagenově pozornosti vůbec, k čemuž ovšem přispěl i zmíněný omyl s kvaternérními brekciemi.

U výběžku, ležícího východně od Pt. Kričin, kde paleogen hraničí na křídu, stýkají se směrný zlom s příčným. Od mořské strany je viděti, že podél tohoto je přisunut eocen s alveolinami, kdežto na levo je vápenec rudistový, petrograficky velice podobný. Dále k západu nalezneme tyto vrstvy na konci křídové kry. Křída je přes ně přesmyknuta dosti podivně. Pod těmito alveolinovými vápenci jsou ještě polohy, jež bychom mohli přičísti již k vrstvám nummulitovým, kterých si povšiml také p. dr. Remeš. Hned u nich však zakrývají pokračování mladé nánosy, v nichž tu a tam v zářezu spatříme pískovec. Jsou tedy nummulitové vrstvy zatlačeny vlivem tektonickým.

Východní křídlo se táhne dosti souvisle na východ od zátoky Monza Luka. Jak se obě křídla stýkají, je, jak bylo řečeno, dosti těžko přesně zjistiti; jsou částečně rozražena mohutným zlomem, překáží tam i ssuť a příliš nepřístupné, vysoké skály. Že však paleogen tak daleko nepokračuje, jak jej kreslí Waagen, leda snad nějaký tektonický úlomek, bylo poukázáno výskytem křídy s rudisty.

Vlastní horský hřbet, budovaný krasovými vápenci křídovými dále, je dosti jednotvárný a odpovídá celkem starším představám. Profil ostrovem končí v zátoce Velka Luka a Mala Luka, opět podmíněných směrnými poruchami. Převládají tam vápence alveolinové, ale při březích a



Příčný zlom na východní straně baščanského údolí, jihovýchodně od Jurandvora. Typ plotů ze ssuťových kamenů.
Faille transversale à l'Est de la vallée de Besca Nuova, SE de Jurandvor. Type de murs de débris.

pod výšinou Sokola, v proláklině, jež je tektonickým pokračováním Vale Mala Luka, jsou i vrstvy nummulitové. Poblíže zříceniny nalezl jsem dokonce malé stopy flyše, bohužel málo přístupné pro recentní mořské sedimenty. Waagen jich neuvádí. —

Plastika kraje a povrchové zjevy. Pro úplnost se zmíníme zcela stručně o morfologii povrchu, ponechávajíce tuto otázku v podrobnostech pracovníkům geografickým.

Výšiny bývají vázány na ostrově Krku pravidelně na křídový útvar, nížiny na paleogen. Příčina je dána tím, že paleogen se usadil v depresích; změny, jež následovaly, ať tektonické či dynamické, nesetřely dosti tento ráz. Je to tedy příčina tektonická. Většímu rozrušování ostatně podléhají sedimenty paleogenní a to jednak proto, že v depresích působí častěji síla erose vodní než na výšinách, jednak, že (hlavně ve vyšších polohách) sestávají z materiálu snadno mechanickou cestou rozrušitelného, slínů, pískovců. Tedy je tu i důvod dynamický.

Že pro plastiku území však nemá dynamika tak velikého vlivu jako tektonika, ukazuje to, že i v moři, kde erosivní a p. síly nepadají v úvahu, nalezneme největší hlubiny v pokračování paleogenních vrstev, lépe řečeno depresí, a to na rozdíl od křídy obyčejně při západní straně. Tektonická odvislost vynikne také, srovnáme-li polohy nejvyšších bodů. Jsou totiž obyčejně na východní části horských hřbetů, a v bezprostředním jejich sousedství na východ bývají značné deprese, kdežto na západ v téže vzdálenosti jsou místa jen o málo nižší. V průřezu bychom dostali profil, blížící se tvaru duny, kopce se svahem mírně skloněným k jihozápadu, kdežto svah severovýchodní je nápadně strmý. Zmínili jsme se již v kapitole tektonické, že tento tvar, patrný již při prostém pohledu na obrysy ostrovů z dáli, svědčí pro to, že vznikl tlakem, přicházejícím od jihozápadu. Jsou to kry, které na východní (resp. severovýchodní) straně mívají strmé stěny zlomové.

Uvedeme jen několik příkladů na př. z ostrova Prviče; malý ostrov je pro doklad přehlednější. Na západním břehu nalezneme těsně při břehu, jdeme-li od severu k jihu, tyto hloubky: U Val Stražica 19 metrů, jižněji 4 m; V. Dubac 3 m; Pt. Grossa 12 m, jižněji 21 m; Pt. Samotovec 47 m, jižněji 46 m (přímá linie břehu ukazuje, že je tu menší směrná porucha), ještě jižněji opět 21 m, 12 m; u Pt. Gnivica 7 m, 12 m; postupně jižněji 30 m, 36 m, 34 m, atd.

Jak patrno, ani největší hlubina nedosahuje tu 50 metrů, normál je asi 35 m, a severněji, kde jsou pod mořem patrně sedimenty paleogenního pruhu, sotva polovic. I ve vzdálenosti 1 km od břehu není zpravidla hloubka větší než asi 60 metrů (56—68 m; 63 m, 66 m atd.).

Naproti tomu na břehu východním nalezneme od severu k jihu tyto hloubky při břehu: Severně od Veli Boće 59 m, 68 m; u Veli Boće 32 m (malá zátoka); jižně od Veli Boće 63 m, 66 m, 70 m, 68 m, 61 m; u Pt. Samognin 61 m, jižněji 57 m, 59 m, 62 m atd. Je tedy průměrné číslo mnohem větší než na břehu západním, hlubina u břehu je asi dvojnásobná a několik set metrů dále nalezneme již 91 m.

Prudký spád východní strany ostrova Prviče je patrný na mapě také i z hustého průběhu vrstevnic na souši. Tam při samém břehu (tedy

ne uprostřed ostrova) jsou zároveň nejvyšší vrcholy, Guarda 356 metrů, Kur 351 m.

Sledujeme-li západní břeh ostrova Krku, který je pokračováním Prviče, vidíme, že i ten je nápadný ostrým srázem na východě. Na kolmých řezech nalezneme na př. tyto výškové poměry: Na západní straně jsou výšiny ve výši asi 190 metrů (Batelici), zvyšující se k východu, a to až o 100 metrů (hory Gabri 275 m, Martinać 297 m); severněji Ravno čelo ve výši 262 metrů na západě odpovídá východním bodům ve výši 383 m. Ještě dále k severu je rozdíl mnohem větší než 100 m, neboť na jihu působí blízkost moře, resp. příčného poruchového pásu, oddělujícího Krk od Prviče. Tak je na západě Svinski plaj, výška 247 m (trigonometrický bod), 238 m, severněji 259 m; na východě jim odpovídá Orljak 539 m a Obzova 569 m. Rozdíl je tam tedy asi 300 metrů.

Podobné doklady bychom mohli sledovati téměř všude v naší krajině. Že nejvyšší místa nejsou uprostřed hřbetů, je tím s dostatek ukázáno. Je zajímavo — vyplývá to částečně z předešlého, — že jsou vázány pravidelně na coniacienové vápence, nikoliv na vápence turonské.

Pokud se týče obrysů ostrovů, jsou dány především průběhem horstev a směrných depresí. V detailech působí tu drobné zlomy směrné a hlavně četné příčné. Příklad pobřeží, řídícího se směrným zlomem, jsme uvedli na př. na ostrově Prviči mezi Pt. Samotorec a Pt. Gnivica, nebo na západním pobřeží baščanské zátoky. Přímý směr pobřeží bývá namnoze dán ne zlomem, nýbrž jen tím, že vrstvy jsou postaveny kolmo. Příkladem uvádím detail ve východní části zátoky Monza Luka, východně od N. Bašky; nummulitové vápence tvoří tam kolmou stěnu.

Zlomy příčné většinou působí nesčetné zářezy (Val — —), zuby do břehu. Tak na př. Vrzenica východně od N. Bašky, mnohé výběžky (Pt — —), Pt. Samotorec, Grivica a j. Podél diaklas (a ovšem zlomů také) se šíří krasové jeskyně, jiż při pobřeží jsou mořem zvětšovány. Na jižním konci ostrova Krku, při průlivu proti Prviči, jsou nejpěknější; velká část těchto míst je jeskyněmi většími či menšími (namnoze krápníkovitými) prohlodána. Někde je zřejmo, že původní diaklasa, rozšířená případně v jeskyni, ročlenila na konci ostrov. Tak křídové skalisko právě ve jmenovaném průlivu (Bocca di Segna) v moři, hned poblíže břehu, je snad troska staré stěny jeskyně, která kdysi s ostrovem souvisela. O erosivní činnosti moře se šířiti nebudeme.

Morfologie toku vod a otázka výskytu pramenů je velice jednoduchá. Z tektonické stavby ostrovů vyplývá již, že nejčastěji se setkáme se směrem, odpovídajícím směru vrstev a směrných zlomů, a směru zlomů příčných, namnoze kombinovaně. V tomtéž poměru jsou i erosivní rýhy a deprese vůbec. Nejbohatší jsou poměrně vody, vázané na paleogenní slíny.

Tak na př. i na úplně vyprahlém ostrově Prviči za vlhčího počasí jsou u Pt. Gnivica kaluže, které ukazují na tento podklad, často neviditelný. Torrente della Fiumera teče v nejhlubším místě ker baščanského údolí. Je zajímavo, že je to celkem západněji, než je osa propadlé (relativně) antiklinály, na př. jádro u Jurandvora; ukazuje to — pokud nejde o erosi v měkčím materiálu, — že tlak nepůsobil při vzniku a hlavně rozlámání antiklinály na obě křídla stejně silně. Voda částečně neandruje ve vlastních slinitých nánosech, ale částečně se přizpůsobuje tektonice podkladu, jak svědčí to, že západně od Sv. Michala potok se otáčí dočasně právě ve směru příčného zlomu v místech, kde zlom ten musíme předpokládati.

O stáří potoků není možno souditi. Jsou to většinou dočasné svahové vody, často se vytrácející v suchých dobách nebo zase prameny vytryskající z pod ssuti. Ovšem, že můžeme předpokládati, že v baščanském údolí tekl potok — větší či menší — od dob jeho vzniku, tedy od neogenu, případně ještě dříve. U Bescavalle je u dnešního potoka značena kota 51 m, jižně od Jurandvora, 2¾ km pod kotou předešlou, výška 12 m; odtamtud k moři (výška 0 m) je asi 1¾ km. Takový je jeho dnešní spád.

Jinde není po vodě na mnoha místech ani stopy, což je ve vztahu s krasovým rázem krajiny. Proto také chybí rostlinstvo, kdežto na paleogeních vrstvách jsou porosty; hranice bývá velice ostrá, takže již podle ní vidíme někdy rozhraní křídy a kenozoika, jak je zřejmo na př. z fotografie.

Vlastní krasové zjevy jsou vázány na vyskytování křídových vápenců, coniacienového a vápence alveolinového. Proto se liší tak značně ráz ostrova Krku a Prviče na př. od Rábu, složeného hlavně z vápenců turonských. Jsou to karry, mělké rýhy, rozřezávající povrch skal v jednotlivé kameny, na spodu ještě srostlé, navrch často končící v ostré hroty, po nichž není skoro možno chodit. Po deštích bývají v jednotlivých takových prohlubních nádrže vody, jež se však brzy ztrácí.

Zmínil jsem se již o dočasném jezírku, vyplňujícím závrt na jižním konci západního křídového hřbetu ostrova Krku, jež na mapě není vůbec zanesen. Většinou mají horské hřbety nahoře vzhled kamenných moří.

Typické polje nejsou na Krku zjevem hojným, kdežto na dalmatském břehu se s nimi setkáváme stále. O krápníkových jeskyních se stala již zmínka; krápníky jsou čisté a dosahují dosti značné velikosti. Zvláště pěkně jsou vyvinuty v coniacienových vápencích (Skulica), na nichž zjevy krasové jsou ostatně vůbec nejlépe patrny.

Morfologický vývoj ostrova Krku a jeho okolí. Úvahy o tvářnosti ostrovů během dob geologických vyplývají ze stratigrafických a tektonických poznatků, jež jsme uvedli. Proti dřívějším představám jsou změny

hlavně pokud se týče orogenetických pochodů. Menší změny jsou v morfologii ostrova v dobách paleogenních, poněvadž přes značné detailnější přepracování stratigrafie (flyše a p.) zůstávají hrubé obrysy stratigrafie stejné (hlinito-písčitý ráz svrchnějšího paleogenu proti vápencovému resp. dolomitickému rázu paleogenu spodního a křídy).



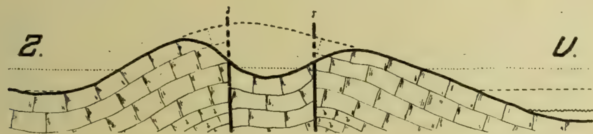
Karry v křídových vápencích, hřbet mezi Starou a Novou Baškou. Typická ukázka krasového povrchu.

Lapiés dans les calcaires Crétacés, montagnes entre Besca vecchia et Besca Nuova. Exemple de région karstique.

O dobách předkřídových můžeme souditi jen z geologie vlastních Dinarid a vůbec širšího okolí, poněvadž na našich kvarnerských ostrovech odkrytů starších než křída není. Podkladem je hlavně asi jura, částečně snad trias a případně na jednotlivých místech i denudované vrstvy starší; v době komanšienu to byla patrně více méně souše.

Transgrese křídového moře zaplavovala všechen dnešní ostrov; pokud z něho snad vyčnívala některá místa, byla denudována ještě během oněch dob.

Přes to to bylo moře mělké, jak ukazují polohy dolomitické a hlavně ve vyšším oddělení rudisti. Brekcie nasvědčují i dočasné, alespoň částečné regresi. Je známo, že na ostrově Krku (a více méně podobně i v chorvatsko-dalmatském Velebitu) je křída vyvinuta poněkud odchylně než v okolí Terstu. Chybějí tu na př. na spodu křídy repenské brekcie, což znamená, že buď ležel ostrov Krk výše a transgrese moře jej zasáhla teprve později, nebo naopak (méně pravděpodobně) níže, t. j. že jsou vyvinuty ve facii vápencové na spodu rudistových vápenců.



Schema morfologie nejjižnější části ostrova Krku v době paleogenní. Západovýchodní řez, odpovídající asi připojenému profilu recentnímu: Na levo přibližně dnešní údolí Crkveni rt, Stará Baška, uprostřed okolí Braciolu, na pravo údolí baščanské. Tečkováním je značena hladina mořská v lutétienu, čárkováním v auversienu, vlnitě koncem eocenu až počátkem oligocenu.

Schèma de la morphologie de l'extrémité Sud de l'île de Veglia au temps du Paléogène. Coupe W-E, correspondant à peu près à la coupe actuelle ci-jointe. A gauche la vallée récente de Crkveni rt-Besca vecchia, au milieu les environs de Braciol, à droite la vallée de Besca Nuova. Le pointillé indique le niveau de la mer Lutétienne, le hachure celui de la mer Auversienne, la ligne onduleuse celui de la fin de l'Éocène et du commencement de l'Oligocène.

Pokud jsem sám mohl zjistiti, jsou nejvyšší polohy křídy (na ostrově Krku) vyvinuty rovněž v podobě čistých rudistových vápenců, což by bylo těžko předpokládati při regresi moře. Svědčí to pro to, že po době, kdy moře odešlo dosti rychle přicházejícími pochody orogenetickými, nastala mohutná denudace a erose, která odnesla nejvyšší polohy.

Horotvorné pochody působily jistě tlakem kolmým i na dnešní směr ostrovů. O velikém významu tohoto vrásnění, značně nedoceněného, byla řeč v části tektonické. Tlak měl za následek vznik synklinál a antiklinál (zhruba řečeno, nemluvě totiž o porušenějších útvarech tektonických), jichž osa šla asi od severozápadu k jihovýchodu a jež tedy představovaly již základní rysy dnešní Adrie. Je pravděpodobno, že se vrásnění vybíjelo v několika fazích, o nichž nám snad podají zprávu moderní studie sousedních krajin. Na souš působily ovšem i voda, vzduch a p. — červený tmel následujících brekcií připomíná terru rossu, tedy krasový fenomén. A tak

před transgresí eocenního moře byly na př. v jižní části ostrova Krku asi takovéto morfologické poměry.

Na souši byly nízké horské hřbety a mezi nimi prohlubně (ať již synklinály, prolomy či j.), oboje táhnoucí se celkem severozápad-jihovýchodním směrem. Prohlubně byly přibližně tam, kde jsou dnes sedimenty paleogenní, tedy v našem příkladu severně od Crkveni rt., v okolí Braciolu a na východě v dnešním baščanském údolí, atd. Byly celkem rozlehleší co do šířky i délky než dnes. Tak na př. prohlubeň u Pt. Bracie se táhla až přes západní břeh ostrova Prviče, jenž ještě souvisel s Krkem.

Pokles pevniny (či vysunutí mořského dna) mělo v londinienu za následek transgresi moře do prohlubní; vyšší hřbety se táhly nad hladinou. Transgresi přičítám pestré brekcie, ležící mezi křídovými vápenci a vápenci alveolinovými. Vápence alveolinové a spodní část nummulitových se podobají petrograficky nápadně vápencům coniacienovým; také biologický charakter ukazuje, že moře opět bylo mělké. Jsou vesměs zoogenního původu. Fauna je po dalekých krajinách velice konstantní a svědčí, že moře po delší čas bylo v klidu.

Teprve ve vyšším lutétienu, již asi v dobách usazování svrchnějších poloh nummulitových, se pevnina znenáhla zvyšuje, ale hned potom neustále kolísá. Zároveň se mění biologický charakter, zkameněliny ukazují nejednotnost, liší se na vzdálenějších lokalitách, ve vyšších polohách jsou jen hladové formy nummulitů. Svrchní oddělení má na spodu slíny, výše proložené lokálně pískovci; mikrofauna slínu ukazuje na moře relativně hlubší. Hlinité vrstvy jurandvorské budou patrně zjevem místním. Jejich fauna, měkkýši s tlustými skořápkami, ukazují na mělčiny, namnoze příbojové povahy; i korále nesvědčí pro větší hlubiny. Pískovce svatomichalské se zakrslými nummulity jsou již z části na přechodu k lagunám, jež jsou charakterisovány svrchním flyšem. V něm najdeme doklady z naplavených starších zkamenělin, že vrstvy sotva usazené, byly místy občas rozrušovány a znovu sedimentovány. V tu dobu můžeme souditi se S t a c h e m i na pohyby zemětřesné. Změna materiálu petrografického ukazuje, že nastalo rozrušování jiných krajin než odkud byl přivážen dříve. Ze srovnání zkamenělin vyplývá, že právě tak, jako kdysi v době komanšienu a křídy, se ostrov Krk a severodalmatské pobřeží lišily od Istrie.

Jen hlouběji pokleslé kry byly zatápěny ještě tímto mladším paleogenním mořem, jež začátkem oligocenu opustilo již všechna místa dnešní souše na ostrově Krku. Biologické variace, souvisící s touto nestálostí moře, jsme poznali již při studiích stratigrafických. Flyšové vrstvy jako petrografický důsledek této nestálosti jsou předzvěstí velkých, nových orogenických pochodů, které vyvrcholily pak nejspíše v neogenu. Jak

bylo řečeno, navazovaly na výsledky předlutétienových pochodů tektonických, jež nedovedlo v naší krajině zdolati. Zvrásnění se spíše obnovovalo a doplňovalo, vznikaly vrásy a zlomy, hlavně v slabinách, a to jednak přesmyky, jednak při uvolnění tlaku i poklesy. Obraz, který nastal po



Baščanská zátoka, v pozadí Prvič. (Kur 351 m.) V pravo křídový hřbet, pod ním paleogen, dříve přehlížený a vodorovně zvrstvené mladé písky, patrně doklad kolísání moře v mladém kenozoiku.

La baie de Besca Nuova, à l'arrière-plan Pervicchio. (Kur 351 m.) A droit la chaine Crétacée, devant elle le Paléogène ignoré jusqu'à présent, et les sables plus récents horizontalement stratifiés probablement dús à une oscillation Néogène ou Quartenaire de la mer.

ukončení horotvorných pochodů, lišil se od dnešního v několika bodech. Jak křídové hřbety, tak především paleogenní vrstvy v depresích byly vyšší; od těch dob jsou zarovnávány, snižovány. Hřbety jsou dnes značně zpeneplainisovány, nemluvě ovšem o krasových zjevech, které na souši

vznikaly. Baščanské údolí, jež je pěkným příkladem deprese, vyplněné paleogenem, nebylo zdaleka tak hluboké jako je dnes.

Viděli jsme, že z žlutavých, vodorovně zvrstvených pískovců, místy ještě zachycených při pobřežích, musíme (podle našeho názoru), usuzovati na krátké zasažení moře do depresí v mladé době. Snad to bylo ve vztahu se vznikem zlomů a ohýbání vrstev při příčném tlaku, který byl někdy v tu dobu.

V hloubi baščanského údolí písků těch nenalezneme, ač nutně sahaly dosti daleko, soudě podle jejich výšky při pobřeží. Byly tedy odneseny. Také mnohé paleogenní sedimenty uprostřed údolí byly odstraněny. Tak na příklad u Jurandvora vystupuje antiklinála z jurandvorských vrstev, ale mladších uásem, totiž svatomichelských pískovců a hlavně mocného svrchního flyše nad ní nenajdeme (jen po stranách). Kdysi, i po neogenních horotvorných pochodech, tam ovšem byl a zaplňoval do značné výše baščanské údolí. Jeho odstranění — a právě tak ovšem odstranění zmíněných písků atd. — jinými slovy dnešní prohloubení údolí, je tedy dílem erose Torrento della Fiumera. Malé kolísání výšky mořské hladiny bylo i v holocenu.

O recentních změnách, jež se dějí na povrchu se nebudeme šířiti. Jsou to hlavně změny dynamické a to většinou destruktivní.

Prosinec 1923.

Geologický ústav Karlovy university v Praze.

Résumé.

Cette publication est un précis des observations principales de l'auteur, faites pendant ses études géologiques dans la partie méridionale de l'île de Veglia (Krk) et ses environs pendant l'été de l'année 1921 et le printemps de 1922.

Je voudrais remercier sincérement M. le professeur Dr. Philippe Počta, qui suivant mes travaux avec un rare intéret, et M. le professeur Dr. Paul Oppenheim a Berlin de m'avoir bien voulu déterminer plusieurs fossiles.

Stratigraphie.

Le Crétacé: Pour le moment il faut se tenir à la division établie en calcaires à rudistes inférieur et supérieurs, ou comme nous disons en calcaires Turoniens et Coniaciens. Quelquefois ils sont difficiles à distinguer, mais le plus souvent les calcaires Turoniens sont foncés, grisâtres, par endroits couleur de chair, en certains horizons laminés et sans rudistes. Vers leur limite contre les calcaires Coniaciens j'ai trouvé une bréche de débris Turoniens. Où alle manqpue, je crois que c'est pour des raisons tectoniques. Les calcaires Coniaciens, caractérisés par autres couleurs, sont très purs, blancs, jaunâtres, ou roses, sonnants, subcristallins, le plus souvent pleins de grands rudistes.

Le Paléogène: Pour la stratigraphie du Paléogène on doit comparer le tableau ci-joint. Il fallait bien modifier surtout la division des horizons supérieurs. Nous distingons:

B.
- 6. flych supérieur
- 5. grès jaunes a Nummulites de St. Michel
- 4. grès marneux de Jurandvor
- 3. flych inférieur en bas marneux

A.
- 2. calcaires nummuliques, en haut passant à des grès
- 1. calcaires karstiques alvéoliniques avec des brèches à la base.

La brèche se compose de morceaux blancs et roses de calcaires Coniaciens, à ciment rouge (terra rossa!). Elle a été regardée comme faisant

partie du Crétacé, mais je la tiens pour une phénomene de la transgression Éocene, correspondant peut-être à la zone a Nummulites planulatus d'Orb. (Condinien).

Les calcaires alvéoliniques sont bien à distinguer des couches nummulitiques, si nous prenons une limite base que celle de Stache, c'est à dire où dans des calcaires encore assez uniformes au point de vue lithologique, les grands nummulites deviennent plus fréquents. Des couches Crétacées ils ne se distinguent au premier coup d'oeil que par leur faune, par les innombrables coupes de Hemifloscülina etc.

Les couches nummulitiques surtout dans leurs horizons supérieurs sont composées de grands nummulites. J'y ai trouvé par exemple Assilina spira de Roissy et Nummulites laevigatus Lk., indiquant un âge des horizons inférieurs du Lutétien moyen. La présence de Terebratula Hoeferi Oppenheim est remarquable, comme elle indique peut-être l'existence d'un horizon à Terebratula, comme ailleurs.

La groupe du flych: Un chaos règne dans la stratigraphie détaillée, comme partout dans le flych. Á Veglia c'est encore aggravé par la couverture presque ininterrompue de Holècene-Récentien et par le morcellement en massifs, alternant sans règle. Nous avons établi par endroits une division provisoire des couches. Dans les roches à la côte de Besca nuova (Baška) au-dessous de la poste il y a des couches plongeant vers le NE et cela à l'ouest (plus près de l'axe de l'anticlinal, représenté par la vallée de Besca nuova (à comparer la téctonique) des couches que nous appelons couches de Jurandvor, et dans leur toit des couches de St. Michel. Comme il n'y a point de dislocatione entre elles, leur âge relatif est donc établi; les couches de Jurandvor sont plus anciennes.

Au toit et au mur de ces deux complexes de couches se trouvent des couches de flych puissantes. J'ai distingué dans ces couches plusieurs horizons (grès tendres et durs, grés à noyaux gris, marnes claires, foncées, schisteuses etc.), mais jusqu'à présent que d'une signification locale. Dans le nature elles sont difficiles à distinguer. Nous les appelons flych inférieur et flych supérieur.

Les couches de Jurandvor sont riches en coraux bien conservés. Au sud de Jurandvor elles affleurent dans le noyau d'un anticlinal (voir la photograghie) et renferment beaucoup de mollusques. Entre autres j'y ai trouvé Campanile giganteum Lk., Corbis lamellosa Lk. etc., indiquant à peu près l'âge représenté par le calcaire grossier de Paris. Il est remarquable que j'ai trouvé dans cet anticlinal Nummulites laevigatus Lk. du Lutétien inférieur ensemble avec Nummulites perforatus d'Orb, c'est à dire avec une fossile auversienne.

En tant que le flych renferme des fossiles, la faune est très variée ce qui indique des oscillations et des conditions lithologiques différentes du normal, et auxquelles on ne peut pas appliquer la règle. Des fossiles se trouvent quelquefois à côté l'un de l'autre, qui ailleurs appartiennent à des temps différents. Ces phénomenes s'expliquent en partie par une faune déjà fossile, mais non trop cimentée dans les sables et les marnes, ayant été détachée des couches dénudées pendant les oscillations de la mer et après de nouveau sédimantée. C'est fort probable, car les pièces sont soulées par les vagues. Encore est-il possible que le flych supérieur va jusqu'a l'Éocene le plus supérieur.

Néogene, Quaternaire. Des sediments plus recents il faut citer surtout les sables jaunes à stratification horizontale, indiquant en toute probabilité une oscillation du niveau de la mer (à voir le châpitre sur la morphologie). Les autres sediments, brèches, terra rossa-beauxit etc., ont été déjà décrits en détails par les auteurs précédants.

La tectonique

des îles dans l'Adrie septentrionale est fondée sur des anticlinaux crétacés aujourd'hui bien disloqués, et des depressions entre eux, en somme parallèles avec le rivage de la Dalmatie. Les depressions sont remplies de paléogene, en partie par la mer. Sur les hauteurs il n'y a point de couches Kénozoiques; elles ne se trouvent plus en moins que dans les dépressions originales d'âge prélutétien. Les traits principaux de la tectonique de l'île de Veglia prouvent, qu'ils on été causés par une pression du SW, non du NE. Au SW des fles, ou bien des chaines de montagnes l'inclinaison est faiblé, au NE très forte. On peut expliquer cela le mieux par la supposition, que cette direction y avait un plissement prélutétien.

Nous voyons ainsi que dans notre zone intérieure le plissement Kénozoique n'avait qu'une influence delativement faible à la différence des Dinarides dans un sens plus restreint, et qu'il complétait seulement la structure donnée par les mouvements orogéniques prélutétiens; il ne suffisait pas a éffacer leurs traces.

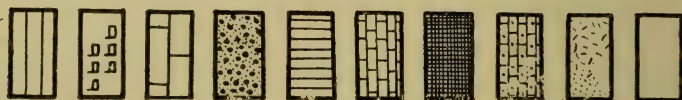
Ce n'est donc pas possible à comparer Veglia et ses environs avec les contrées septentrionales, où au contraire les traces du plissement prélutétiens furent presque complétement obliterées. C'est pourquoi nous ne trouvont point des grandes surélévations sur les îles de l'Adrie septentrionale: il n'y a pas la moindre trace de surélévations du Velebit dans l'île de Veglia est ses environs.

Le plissement Kénozoique ne suffisait qu'à des changements dans les depressions ou qu'à des moindres modifications. Même les dislocations sont beaucoup moins fréquentes dans les chaines de montagnes.

Km. 0 1/4.

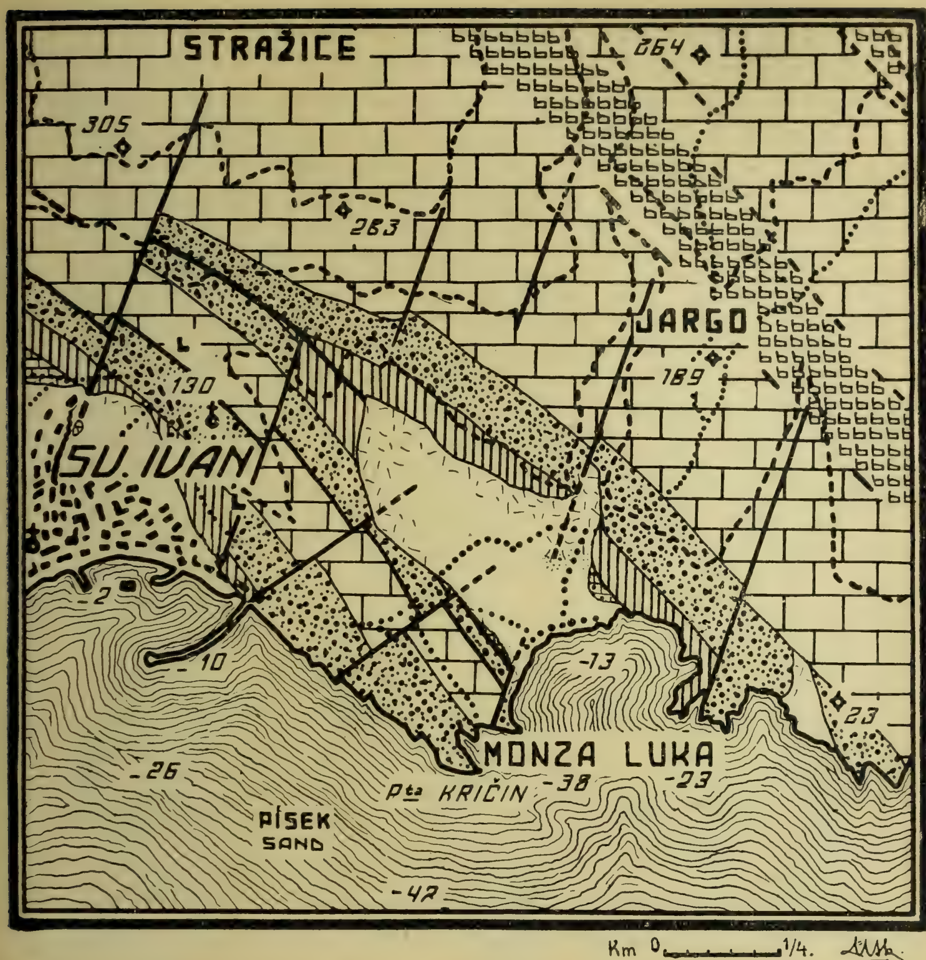
Mapka západní části baščanské zátoky.
La carte de la partie occidentale de la baie de Besca Nuova.

Vysvětlivky k mapkám. — Explications des cartes.



1. 2. 3 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

1. Turonské vápence. - Calcaires Turoniens. — 2. Brekcie na basi svrchních rudistových vápenců. - Brèches à la base des calcaires Coniaciens. — 3. Svrchní (coniacienové a mladší) rudistové vápence. - Calcaires Coniaciens (et plus jeunes?) à rudists. — 4. Alveolinové vápence s brekciemi na basi. - Calcaires alveoliniques avec des brèches à la base. — 5. Nummulitové vápence až vápnité pískovce. - Schistes nummulitiques. — 6. Slíny a pískovce, spodní a svrchní flyš. - Grès, marnes, flych inférieur et supérieur. — 7. Slinité pískovce jurandvorské. - Grès marneux de Jurandvor. — 8. Nummulitové pískovce svatomichelské. - Grès de St. Michel. — 9. Písky, ssuť a recentní brekcie. Sables, brèches etc. récents. — 10. Holocen. - Holocène.



Mapa východní části baščanské zátoky.
Carte schématique de la partie orientale de la baie de Besca nuova.

Nous avons trouvé des dislocations longitudinales, en partie droites, en partie courbées, ce qui indique un âge différent. Le plissement le plus récent causait des dislocations transversales (h *2* et h 4) très visibles dans la morphologie de la région et très fréquentes, et une pression transversale — sans tension — qui en partie déjetait les couches. C'est le mieux visible dans les environs du golfe de Besca nuova (voir la phot. du flych). —

La structure locale est bien différente et plus compliqué qu'elle n'a été représentée. La vallée de Besca nuova par exemple n'est pas un synclinal, mais un anticlinal (relativement) affaissée. On sait que les cou-

ches plongent le plus souvent dans un sens contraire que celui qui indiquerait un synclinal. On a tâché d'expliquer cela de différentes manières (par un renversement des couches etc.), mais insuffisamment. Cependant la stratigraphie détaillée démontre le plus souvent que les couches ne sont pas renversées, et que c'est donc un anticlinal. Comme nous avons trouvé le noyau de l'anticlinal, affleurant au sud de Jurandvor (voir la phot.) la structure anticlinale est prouvée.

L'anticlinal est disloqué par des dislocations transversales, d'après lesquelles les massifs des flancs ont été surélevés assez régulierment au-dessus des massifs plus près de l'axe, ainsi que le centre apparâit être affaissé. L'anticlinal se formait par le plissement entre deux massifs Crétacés. Par l'augmentation de la pression les flancs furent aussi surélevés au-dessus du centre (dans le synclinal les massifs du centre furent surélevés au-dessus de ceux des flancs. — Comparer le Barrandeum du centre de la Bohême). Par la deminiation de la pression quelques massifs s'affaisaient, comme par exemple les couches Paléogènes a l'ouest de la vallée de Besca nuova.

Ailleurs les couches furent disloquées de la même manière, peut-être aussi en certain dégré l'anticlinal original de la chaine Crétacée dans l'ouest de l'île de Veglia.

Après l'affaissement (relative) de l'anticlinal les couches furent dénudées au centre et les zones de roches (d'après la profondeur de la dénudation et l'affaisement etc.) alternant sans règles, furent morcelées en petits masifs qui on souffert des mouvements différents. C'est pourquoi la structure de la valée encore couverte d'Holocène, est très variée.

Après tout il faudra des observations plus détaillées sur le plissement prélutétien, que — comme nous l'avons dit — est plus important pour les îles que les mouvements orogéniques Kénozoiques. Une publication spéciale s'occupera de la tectonique qui demande une étude nouvelle des faits en détail et en total.

La morphologie actuelle.

Comme dans mes travaux locaux j'ai déjà parlé de la distribution actuelle des formations géologiques je me borne ici à quelques remarques pour corriger ou compléter la carte de W a a g e n. Cette distribution est aussi représentée sur la carte géologique schématique ci-jointe. La zone Eocene a l'extrémité méridionale de l'île de Veglia à la côte occindetale commence déjà au premier contre-fort à l'ouest de Pta Mezzo-Panetto.

La zone de Paléogène,dont nous avons établi l'existence, est remarquable. Elle se continue à travers le Val Braciol et puis au-dessous de la mer jusqu'à la côte occidentale de i'île Pervicchio (Prvić), d'ou elle n'avait

été non plus conaissée avant. Puis, comme représentée sur notre carte, il n'y a pas une simple zone de calcaires à rudistes inférieurs, mais une zone formée des deux calcaires crétacés, puis des calcaires alvéoliniques et nummulitiques, et enfin de flych, recouvert en partie par des sables plus récents d'une stratification horizontale.

Dans la vallée de Basca nuova (Baška) des massifs très variés de toutes les bandes paléogenes alternent, le plus souvent entièrement recouverts du Holocène du ruisseau. Le massif de couches de Jurandvor est remarquable. Il est situé à gauche du golfe près des calcaires à alvéolines, en environ 70 mètres de hauteur. Evidemment il y est resté pendant la formation et l'effondrement de la voute anticlinale.

Les couches à alvéolines forment aussi la côte entre le mollo et Pt. Kricin. Les couches à Monza Lucca, souvent recouvertes de décombres etc., sont aussi Paléogènes (Alveoliniques jusqu'au flych). Les deux petites îles Crétacées, indiquées en ce lieu sur la carte de Waagen, n'existent point: En réalité ce sont des brèches recentes de décombres Crétacés cimentés. En ce lieu le Paléogène entier à l'air d'un coin enfoncé dans les roches Crétacées.

Les élevations de cette région coincident le plus souvent avec la formation Crétacée, surtout en ce qui régarde les points les plus élevés dans la partie Ne de la chaîne des montagnes, les bas-fonds avec le Paléogène et cela surtout au SW. Il y a donc une cause tectonique. L'influence dynamique agissant dans le même sens, est moins importante (Les couches Paléogènes succombent plus vite a l'érosion et se composent d'éléments moins résistents).

La forme des îles est donnée par le parcours des chaines et des dépressions longitudinales. Les faille transversales ne produisent le plus souvent que des petits entaillages de la côte. La direction des failles et diaclases a une influence manifestée sur le parcours des grottes à stalactites, par exemple près de Skulica dans la partie méridionale de l'île de Veglia.

L'eau se trouve au dessus des marnes Paléogènes, en partie dans les décombres etc. Le Torrente del la Fiumera parcourt la partie le plus basse des massifs de la vallée de Basca nuova à l'ouest de l'axe de l'anticlinal effondré, ce qui indique que la pression orogénique ne se manifestait point de la même façon dans les deux flancs. A l'ouest de St. Michel le ruisseau se recourbe, visimblement sous l'influence d'une lithoclasse transversale.

Les phénomenes karstiques sont le mieux développées dans les calcaires Coniaciens — en haut, à l'ouest de Besca nuova il se trouve dans ces calcaires un petit lac, non représenté sur la carte — moins dans les calcaires Turoniens et alveoliniques.

Le dévelopement morphologique de l'Ile de Veglia et de ses environs est à peu près le suivant:

La mer Cretacée peu profonde inondait tout ce qui est aujourd-hui au-dessus de la mer, mais en partie il y avait des regressions pendant ces temps indiquée par les brèches. Les horizons supérieurs du Crétacé avait été denudés avant la sedimentation des couches alvéolinques, car j'en ai point trouvé des sediments appartenant à la régression definitive. Puis l'action déstructive de l'atmosphère et le plissement intensif du temps prélutétien avaient lieu. Les chaines de montagnes et les dépressions se formérent dans la direction qu'elles ont conservées jusqu'à nos jours, c'est à dire les traits principaux de l'Adrie actuelle. Elles étaient approfondies à peu près, là, où elles sont aujourd'hui, et pendant le Londinien elles semblent avoir été inondées de nouveau par la mer. A la transgression j'attribue la brèche basale au murs de calcaires à alveolines. La nature biologique démontre que la mer était peu profonde, et qu'une période assez considérable de tranquillité regnait dans l'Adrie entière.

Les oscillations paraissent avoir commencées vers la fin des temps de la sedimentation des couches à nummulites. Elles se manifestent dans la nature lithologique (nature sableuse, plus tard état lagunaires du flych) et paléontologique (la faune varie d'après l'endroit et elle est très mixte). Quelques fossiles bien rounlés prouvent que les couches à peine sedimentées furent par endroits de nouveau dénudées et puis sedimentées la deuxième fois.

Les couches du flych se sont sedimentées déjà seulement dans les dépressions plus profondes, et sont d'après leur nature les précurseurs des nouveaux mouvements orogéniques qui culminaient en toute probabilité pendant le Néogène. Comme nous l'avons déjà dit, ils ne faisaient dans notre région que développer les résultats du plissement prélutétien, qu'ils ne pouvaient point obliterer. Plûtot ils les renouvelèrent et les accentuerent, des lis et des failles se formerent surtout dans les places faibles, soit des failles inverses, soit des affaissement par la préssion diminussante.

Une fois encore il y avait une petite oscillation du niveau de la mer, se manifestant par les sables jaunes à stratification horizontale, par endroits trouvés près de la côte, qui se trouvent dans les mêmes altitudes sur l'île de Veglia et de Pervicchio. Ils se composent surtout de grains arrondis de calcaires, avec des horizons de brèches. Ils remblayerent une fois la vallée de Besca nuova tout comme les couches du flych et furent déblayés plus tard par l'érosion du ruisseau qui approfondissait la vallée.

Encore pendant le Holoocène il y avait des petites oscillations du niveau de la mer, prouvées par l'alternation local de couches à mollusques marins (Cerithium, Trochus sp.) et d'eau douce. Les changements recents sont surtout dynamiques, et cela en somme déstructifs.

Décembre 1923.

L'institut Géologique de l'Université Charles à Prague.

Literatura. — Litérature.

Ze starší:

1860. *G. Stache,* Die geologische Verhältnisse der Quarnerischen Inseln (Verhandl der k. k. geol. Reichsanstalt in Wien).

1889. *G. Stache,* Die Liburnische Stufe und deren Grenzhorizonte. (Abhandl. der k. k. geol. R.-A. in Wien.)

1893. *J. Cvijić,* Das Karstphänomen (Penck's Geographische Abhandlungen).

1902—03. *L. Waagen,* Ein Beitrag zur Geologie der Insel Veglia I., II., III., IV. (Verhandl. der k. k. geol. R.-A. in Wien.)

1905. *L. Waagen,* Erläuterungen zur geol. Karte von Veglia und Novi. (Wien, k. k. geologisches Reichsanstalt.)

1905. *R. J. Schubert,* Zur Stratigraphie des istrisch-norddalmat. Mitteleocäns. (Jahrbuch der k. k. geolog. R.-A. in Wien.)

1910. *A. Grund,* Beiträge zur Morphologie des Dinarischen Gebirges (Penck's geograph. Abhandlungen.)

1911. *L. Waagen,* Erläuterungen zur geolog. Karte von Cherso und Arbe. (Wien, k. k. geolog. R.-A.)

1912. *R. Schubert,* Geologischer Führer durch die Nördliche Adria. (Berlin, Bornträger.)

1914. *F. Kober,* Alpen und Dinariden. (Geolog. Rundschau.)

Ostatní práce jsou jmenovány v uvedených publikacích, hlevně ve *Waagenových* vysvětlivkách k mapám nebo v *Schubertově* průvodci.

Z nové:

1921. *M. Remeš,* Eocén u Nové Bašky (Besca Nuova) na ostrově Krku (Veglia). (Rozpravy České Akademie.)

1922. *O. Matoušek,* Předběžná zpráva o geologii lázní Bašky a okolí.

1923. *J. Petrbok,* Stratigrafické doklady kolísání hladiny jaderského moře v holocenu. (Ibidem.) L'oscillation du niveau de la mer Adriatique pendant l'époque Holocène. (Bulletin internat. de l'Acad. des Sciences de Bohême.)

1923. *O. Matoušek,* Nález eocenního útvaru na ostrově Prviči v sev. moři adriatickém. (Rozpravy České Akad.) Discovery of Cenozoiz beds on the island of Pervicchio in the North. Adriatic Sea. (Bull. intern. de l'Akad. des Sc. de Bohême.)

1923. *O. Matoušek,* Nový nález paleogenu a geol. poměry v nejjiž. části ostrova Krku. (Rozpravy České Akademie.) — A strip of Paleogene hitherto ignored and the structure of the southernmost part of the island of Veglia. (Bull. intern. de l'Ac. des Sc. de Bohême.)

1923. *O. Matoušek,* Geologie baščanské zátoky na ostrově Krku. (Rozpr. České Akademie.) — The geology of he Bescanuova on the island of Veglia. (Bull. intern. de l'Ac. des Sciences de Bohême.)

Mimo to jsou četné práce všeobecné, publikace o krajinách odlehlejších, dále paleontologické (Oppenheim a m. j.), jež jsou uvedeny v jmenovaných dílech. — Pour la liste plus détaillée voir les ouvrages de *M. Waagen, Schubert* etc.

Přehled stratigrafie paleogenu na ostrově Krku a Prviči.

Tableau synoptique de la stratigraphie du Paléogène dans la partie meridionale de l'île de Veglia et Pervicchio.

Stache r. 1867		Schubert 1905	Waagen 1911	Matoušek 1922			
Gruppe der Konglomerate und Sandsteine	Versteinerungs-arme oder leere Sandsteine und Mergel	Mergel und „Konglomerate“ im Bescatale mit Flyschbänken wechsellagernd	Mergel und Sandsteine	**B. Flyše**	6. Svrchní flyš 5. žluté nummulitové pískovce svatomichelské 4. slinité pískovce jurandvorské	**B. Flych**	6. flych supérieur 5. grès jaunes à Nummulites de St. Michel 4. grès marneux de Jurandvor
	Versteinerungs-reiche konglomeratische und mergelsandige Schichten	Globigerinenmergel			3. slíny a spodní flyš		3. grès et flych inférieur
Nummuliten-führende Kalkgruppe	Hauptnummulitenkalk	Nummulitenkalk	Alveolinen- u. Nummulitenkalk	**A. Vápence**	výše až pískovce 2. nummulitové vápence	**A. Calcaires**	en haut passant à des grès 2. calcaires nummulitiques
	Boreliskalk	Alveolinenkalk			1. β) krasové vápence alveolinové		1. β) calcaires karstiques alveoliniques
					α) s brekciemi na basi		α) avec des brèches à la base

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 17.

R. N. ST. LADISLAV HALÍK:

Příspěvky k fysiologii roztočů skupiny Hydracarina.

Contributions to the physiology of the water-mites (Hydracarina).



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 17.

R. N. ST. LADISLAV HALÍK:

Příspěvky k fysiologii roztočů skupiny Hydracarina.

Contributions to the physiology of the water-mites (Hydracarina).



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

R. N. St. Ladislav Halík:

Příspěvky k fysiologii roztočů skupiny Hydracarina.

(Whit english summary.)

(Z druhého oddělení zoologického ústavu Karlovy university v Praze.)

1. O padákovitých pohybech vodule *Unionicola crassipes* (O. F. Müll.).

Měl jsem příležitost na své exkursi k Černému moři pozorovati výskyt roztoče *Unionicola crassipes* (O. F. Müll.) na okraji rostlinných porostů euhydatophytů v místech, kde končí litorale a začíná pásmo pelagické a sice ve středu bažiny, ležící na přepážce mezi jezerem Sint Ghiol a mořem. Tím by se tento roztoč blížil oekologii vodule *Piona* (= *Curvipes*) *rotunda* (Kramer), jejíž pelagický výskyt popsal Thon (1900, loc. cit. pag. 15). Také bezbarvé, téměř průsvitné tělo mluví pro obyvatele volné vody. Ale na individuích, chovaných v kyvetě, pozoroval jsem vždy, že chytala potravu, jenom když tiše seděla na dně nebo na rostlinách. Stála na posledních dvou párech noh, prvé dva páry zdviženy poněkud do výše. Prvý pár noh stiskl vždy bleskurychle *Cyclopa*, jenž zabloudil na jeho dosah. Kořist uchopila rychle makadla a nohy se hned uvolnily. Toto pozorování ovšem velmi málo odpovídá zvykům živočichů žijících ve volných masách vodních. Naproti tomu způsob pohybu živočichů zajatých je zcela ve shodě se sběžnými poznámkami, jež jsem učinil v přírodě.

Plove-li tento roztoč ve volné vodě, jak jej pravidelně nacházíme v jezerech a rybnících s čistou vodou (Koenike 1909), střídají se rhytmicky po sobě stadia činnosti (plování) se stadii odpočinku (padání). Ve stadiu činnosti je pouze prvý pár noh bez zřejmého pohybu, natažen do předu a při pohledu se shora poněkud v úhlu rozevřen. Články jeho jdou v přímé skoro čáře za sebou, poslední dva se vychylují. Pohyb vodule vzbuzován je veslováním všech tří zbývajících párů noh, při čemž druhý pár, velmi chudý na brvy, nabírá vodu daleko dopředu nad pár prvý. V nejbližším okamžiku je plo-

vání nahrazeno stadiem padákovitého odpočinku, obvyklého u živočichů pelagických. Všechny nohy roztáhnou se v poloze horizontální daleko do šířky a kladou tak společně se svými brvami odpor vodě (obr. 1.). Živočich vznáší se na svých nohách jako na padáku a jen zvolna klesá dolů. Stadium toto netrvá příliš dlouho, obyčejně kratšeji, než stadium plování. Roztoč je ukončí tím, že opět začne pokračovati v původním směru.

Padákovité pohyby možno velmi dobře pozorovat při vhodném optickém zařízení v ploché, ale poměrně dosti vysoké kyvetě. Než padání trvá jen potud, pokud se vodule cítí ve volné vodě; jakmile se dotkne

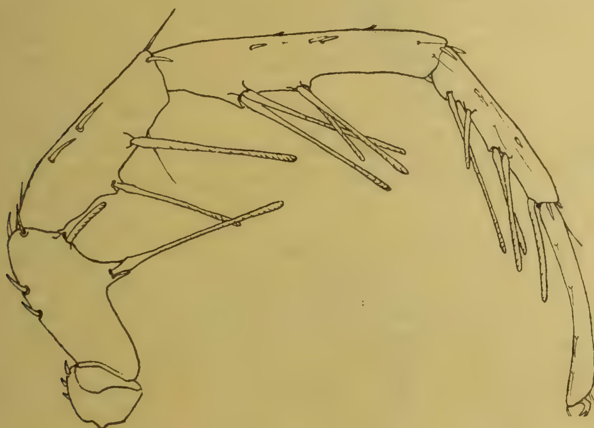


Obr. 1. *Unionicola crassipes* (Müll.) — Posa při padákovitém pohybu, ze spoda.

některou z roztažených noh skleněné tabule, okamžitě začne buď znovu plovat, nebo usedne na stěnu. Kromě toho viděl jsem též, že roztoč, sedící na vodní rostlině, pokročí až na okraj listu, pustí se volně do vody a padá bez předchozího plování. Zde by padání mělo význam aktivní, živočich chce jím změnit místo. Naproti tomu padákovitý pohyb ve volné vodě je passivním vznášením se, aby vodule udržela kontakt s povrchovým planktonem, jímž se živí.

Vysvětlení mechanické stránky padákovitého pohybu roztoče *U. crassipes* nalezneme v jeho morfologii. Jsou to především neobyčejně prodloužené nohy, které roztaženy do šířky kladou vodě značný odpor. Tento odpor je sesilován rozmanitými brvami na nich. Význam těchto brv byl by ovšem kapitolou pro sebe, Brvy vodulí možno totiž dle morfo-

logických kriterií roztřídit v několik kategorií a ke každé kategorii hledat fysiologické vysvětlení. O to prvý se pokusil Haller (1882 *b*), ale snaha jeho, rozlišovat přesně brvy na sluchové, hmatové a čichové byla již Henking-em (1882, loc. cit. pag. 577) a Schaub-em (1888, loc. cit. pag. 15—16) uvedena v pochybnost. Morfologické roztřídění jich podává Thon (1899, loc. cit. pag. 6—8). V našem případě účastní se nejvíce při padání dlouhé trny na třetím a čtvrtém páru noh a hlavně tak zv. spirálně vinuté brvy na páru prvém (obr. 1. a 2.). Tyto posledně jmenované brvy, jež slouží též k lapání potravy, vyznačují se proti ostatním kromě své struktury a síly též zajímavým zařízením kloubovým při místě svého vetknutí (obr. 3.). Kdežto brvy ostatních vodulí bý-



Obr. 2. Levá noha prvého páru vodule *Unionicola crassipes* (Müll.) se strany vnitřní (na praeparátu od spoda).

vají prostě vetknuty do chitinové jamky, jsou tyto spirálně točené brvy pohyblivě upevněny pružným vazem blíže kořene hrbolku na ventrální jeho straně. Hrbolek je zploštělý a má na spodu širokou rýhu, do které dolní část brvy může zapadnouti (obr. 3.). Svaly žádné se na brvu nepřipínají.

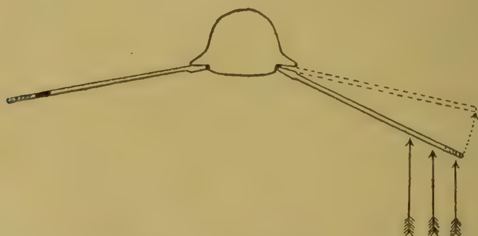
Brvy tyto jsou vetknuty po páru tak, že leží na straně ventrální, je-li noha v přirozené poloze do předu natažené (obr. 1.). Při tom místa vetknutí brv jsou si blíže nežli základny hrbolků, takže, působí-li na brvy tlak od spodu, míří každá na odvrácenou stranu, opře se o svůj hrbolek a zapadne pevně do jeho rýhy (viz schem. obr. 4.!).

Okolnost, že při únavě roztoče *U. crassipes* je potřebí nohou extrémně roztažených, nese s sebou velmi zajímavý zjev, že tu nastává dříve ochabování flexorů před extensory, kdežto u ostatních živočichů je tomu naopak. Pozoroval jsem, že na celkové tělesné

podráždění, na př. při fixaci živých objektů roztokem Z e n k e r-o v ý m, reaguje též roztažením nohou a je v této pose fixován. Na drobná mechanická podráždění reaguje ovšem instinkty prchavými.



Obr. 3. Schema vetknutí spirálně vinuté brvy vodule *Unionicola crassipes* (Müll.). Vnější brva na druhém článku pravé nohy od spodu.



Obr. 4. Schema opření spirálně vinutých brv o hrbolky p ř i t l a k u o d s p o d u.

2. S e p a r o v á n í s e k r e t u k o ž n í c h ž l a z *Hydracarin.*

Kožní žlázy *Hydracarin* jsou drobné, vícebuněčné orgány, jichž tunica propria je podepřena tenkým obalem chitinovým. Za popsání jejich anatomie děkujeme R o b. v. S c h a u b-u (1888, loc. cit. pag. 13—15). Ovšem již chitinová stavba jejich u rodu *Limnesia,* s nímž jsem pracoval, se dosti podstatně liší od stavby popsané S c h a u b-e m pro druh *Hydryphantes dispar* Schaub. Tak není vnitřní obal chitinový podepřen chitinovými, v polygony spojenými trámečky a silně chitinisovaný kruh kol jejich vývodu je v jedno spojen s destičkou, nesoucí ochrannou brvu (obr. 5.).

Kožní žlázy vodulí bývají sestaveny do několika řad v nevelkém počtu na těle *Hydracarin,* hlavně na hřbetě, pak v okolí orgánu pohlav-

ního, po páru vedle vývodu žlázy exkreční a mezi druhým a třetím epimerem. Jejich počet a rozložení jsou pravidelné a charakteristické pro druhy.

Rozptýlená pozorování nás učila, že ryby nepožívají zpravidla vodulí. Ovšem nechybí ani údajů opačných. Tak Piersig (1897—1900, loc. cit. pag. *32—33*) cituje práci amerického autora Forbes-a, jež mi zůstala nepřístupnou: »Entgegen Hallers und Forels Behauptungen konnte der Nordamerikaner Forbes nach eingehenden Untersuchungen sicher feststellen, dass die Hydrachniden durchaus nicht von den Fischen



Obr. 5. Vývod kožní žlázy vodule *Limnesia maculata* (Müll.) Dle praeparátu leptaného kali- kaustikem. Mikr. Leitz, homogenní immerse 1/12 okul. 2.

als Nahrung verschmäht werden.« V české literatuře nalézáme v práci Fričově a Vávrově (1895, loc. cit. pag. 73) zaznamenáno, že v obsahu žaludku a střeva vyloveného okouna nalezeny Hydrachny.

Ostatně snadno můžeme se přesvědčiti pokusem. Dáme-li do akvaria s rybou vhodné velikosti voduli, nejlépe některý větší, pestrý druh, polapí nezkušená ryba brzy do svých úst, ale téměř právě tak rychle jej zase vyvrhne, aniž by mu uškodila. To opakuje obyčejně několikrát, ale velmi brzy naučí se rozeznávati roztoče od ostatní potravy a nechá ho spokojem. Opakoval jsem pokus několikrát, vždy s týmž výsledkem.

Bylo na snadě sváděti odpor ryb proti vodulím na kožní žlázy jejich, jimž podkládána sekrece látky nepřátele odpuzující.

Než to všechno byly vývody ryze spekulativní a ničím nedoložené. Také nebylo žádných určitějších představ o sekretu žlaz kožních. H a l l e r (1882, *a*) popsal pouze tyčinky, vyčnívající z vývodů těchto žlaz u rodu *Limnesia*. S c h a u b nepopisuje ani žlaznatých buněk těchto orgánů a udává pouze: »Bei der Präparation werden die Secretionszellen in der Regel zerstört, so dass es selbst bei gut gehärteten Schnitten nur selten gelingt, einige Reste derselben innerhalb des Chitinnetzes anzutreffen.« Zkroucené tyčinky sekretu mohl jsem pozorovati před vývodem mohutné, párovité žlázy po stranách genitálního pole roztoče *Unionicola crassipes* (O. F. Müll.). Tyto dvě žlázy možno sice fylogeneticky odvozovat z páru normálních žlaz kožních, obvyklých po stranách zevního orgánu rozmnožovacího u všech téměř vodulí. Než fysiologický jejich význam jest zajisté již pozměněn. P i e r s i g (1897—1900, loc. cit. pag. 203) potvrzuje údaj H a l l e r-ů v. Mně se podařilo s e p a r o v a t i a p ř e d b ě ž n ě z k o u m a t i tento sekret kožních žlaz vodulí, o čemž zde podávám zprávu.

Za objekt jsem si vyvolil druh *Limnesia maculata* (O. F. Müll.) pro hojný jeho výskyt od jara do podzimu. Jednalo se především o způsob, jak vyprovokovat žlázy kožní k zvýšené činnosti a dále, jak separovati sekret. Methoda skleněných kapillár, ani nejtenších, nevedla k cíli. Je totiž dosti obtížno již vyrobit kapilláru o průběru, jenž musí býti menší než světlost vývodu žlázy (11 μ, viz obr. č. 5.). Nadto fysikální vlastnosti sekretu, jak jsem po jeho separování poznal, nemohou způsobiti vystoupení do kapilláry.

Teprve později jsem pozoroval, že sekrece žlaz velmi stoupá, vyjmeme-li roztoče z vody na sucho. Pak stačí dotknouti se mikroskopických vývodů žlaz nějakým předmětem hrotitým a v y t á h n o u t i l e p k a v ý s e k r e t v p o d o b ě v l á k n a, jež možno navíjet.

S e k r e t k o ž n í c h ž l a z vodulí při vyšetřování na vzduchu je látka p o l o t e k u t á, h u s t á a l e p k a v á, v malém množství bezbarvá, v y s o c e v i s k o s n í, táhnoucí se v dlouhá, pavučinovitá vlákna. C h u ť sekretu při dotyku jazykem i n t e n s i v n ě h o ř k á, asi jako morfium, a t r p k á. Na značnější jedovatost její bych neusuzoval, neboť živočichové hladoví přece jen *Hydracarin* požívají. Její význam obranný jest však jistý. Na křiklavé zbarvení *Hydracarin* (v našem případě červené, černě skvrnité) nutno pak hleděti jako na z b a r v e n í v ý s t r a ž n é.

Contributions to the physiology of the water-mites (Hydracarina).

1. The parachute-like motions of the *Unionicola crassipes* O. F. Müller.

The motion of the swimming water-mite *Unionicola crassipes* consists of two successively following phases: first it is an active swimming, during which the beast moves with the second, thirth and fourth pair of legs. Secondly follows the phase of rest, during which the mite stretsches horizontal its long legs into the breadth, by which it offers the water a great resistance and sink slowly down. These two phases alternate rhythmical so, that the second stage use to be shorter than the first.

The power of resistance to the water is strengthened by the various hairs on the legs of the mite the physiological importance of which is not quite clear. Many authors-named in the bohémian treatise-attempted to clear this question: Haller (1882 *b*), Henking (1882), Schaub (1888) and Thon (1899).

In our case the most participating are the so called spiral winded hairs on the first pair of legs, that also act as an organ of catching (fig. 2.). They are fastened moveable with an elastic sinew close by the root of a small tubercule which has on the undersite a large notch. The under part of this hair may fall into this notch. They are situated pair to pair so that they are on the ventral sido if the leg is stratching forward in the natural position. The both places of root of the pair are closer together than the bases of tubercule so that a pressure from bellow acts on the pairs each tends on the oposite side supportes itself on its tubercule and inserts fast into his notch.

The extending of the legs during this parachute-like motion is a nervous reflex, that is possible to imitate p. e. with the fixation of Zenker.

2. The separation of the secretion from skin's glands of *Hydracarina.*

I have separated and preliminary examineted the secretion from the microscopical skin's glands of the water mite *Limnesia maculata* (O. F. Müll.). The mite taken out of the water produces very much secretion which can be glued on a point and drawn out from the gland in the form of a thread.

The secretion in a small quantity is a substance without colour high viscous and of an intensive bitter taste. It procures the beast from the enemies.

Literatura - Bibliography.

Forbes, S. A., Studies of the Food of Fresh-Water-Fishes: Bull. Illin. State. Labor. Nat. Hist., Vol. 2, Act. 7, p. 433—473.

Idem, On the Foodrelation of Fresh-Water-Fishes; a Summary and Discussion, ibid., Act. 8. pag. 475—538.

Forel, F. A., 1878, Faunistische Studien in den Süsswasser der Schweiz. Zeitschrift f. wiss. Zoologie, Bd. XXX., Suppl., Leipzig.

Frič, prof. dr. A. & Vávra, dr. V., 1895, Výzkumy zvířeny ve vodách českých. IV. Zvířena rybníků dolnopočernického a kačležského. Archiv pro přírodovědecký výzkum Čech, IX. díl, čís. 2. V Praze.

Haller, G., 1882 (a), Die Hydrachniden der Schweiz. Mitt .der Naturf. Gesellschaft zu Bern. S. 1—83, Taf. I.—IV. Bern.

Idem, 1882 (b), Zur Kenntnis der Sinnesborsten der Hydrachniden. Wiegmanns Archiv f. Naturgeschichte, 48. Jahrg. 1. Heft.

Henking, H., 1882, Beiträge zur Anatomie, Entwicklungsgeschichte und Biologie von Trombidium fuliginosum Herm. Zeitschrift f. wiss. Zoologie, Bd. XXXVII., pag. 553—663, Taf. XXXIV.—XXXVI. Leipzig.

Koenike, F., 1909, Acarina, Milben. Brauers Süsswasserfauna Deutschlands, Heft 12. II. pag. 13—184. Jena.

Piersig, dr. R., 1897—1900, Deutschlands Hydrachniden. Zoologica, Heft 22, pag. 1—602. Stuttgart.

Schaub, dr. Rob. v., 1888, Über die Anatomie von Hydrodroma (C. L. Koch). Sitzungsberichte d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, Bd. XCVII., Abth. I., pag. 98—151, Taf. I.—VI. Wien.

Thon, Karel, 1899, Příspěvky ku poznání českých vodulí (Hydrachnidae). II. Monografie českých druhů rodu Hydryphantes C. L. Koch. Rozpravy Čes. Akademie, roč. VIII., tř. II., č. 45. V Praze.

Thon, Karel, 1900, Hydrachnologický výzkum Čech. Díl I. Rozpravy Čes. Akad. roč. IX., tř. II., čís. 15. V Praze.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 19.

Sur le problème de la panachure.

Deux cas de provenance de la structure en forme d'étui des plantes panachées.

(Extrait de la dissertation: „Sur la question de l'existence de chimères périclinales des plantes panachées".) (Avec 2 tableaux.)

Par **P. MILOVIDOV.**



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 19.

Sur le problème de la panachure.

Deux cas de provenance de la structure en forme d'étui des plantes panachées.

(Extrait de la dissertation: „Sur la question de l'existence de chimères périclinales des plantes panachées".) (Avec 2 tableaux.)

Par **P. MILOVIDOV.**



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Sur le problème de la panachure.

Deux cas de provenance de la structure en forme d'étui des plantes panachées.

(Extrait de la dissertation: »Sur la question de l'existence de chimères périclinales des plantes panachées«.) (Avec 2 tableaux.)

Par P. Milovidov.

Au cours de mes recherches sur des plantes panachées que j'ai exécuté à l'Institut de la physiologie des plantes de l'Université Charles de Prague j'ai rencontré deux cas interessants de la perte de la chlorophylle dans les feuilles vertes pendant leur développement. C'est ainsi que les feuilles vertes se transforment dans des feuilles albomarginates panachées. En même temps les feuilles reçoivent la structure en forme d'étui.[1])

I. Vinca minor.

Dans les cellules de bordure Vinca a des chloroplastides facilement distinguables lorsqu'ils sont jeunes. Dans les stomates des feuilles adultes parfois il n'y a pas du tout de contenu granulé, parfois il y a des formations incolores rondes ou oblongues, qui se colorent au Sudan III en rouge-orange et se dissolvent entièrement dans l'alcool — des huiles, à ce qu'il parait. On a découvert de l'amidon seulement dans les jeunes stomates. Les chloroplastides dans les cellules de bordure dans les sections blanches et vertes sont pareilles.

La présence de la chlorophylle dans les stomates de l'épiderme ne permet pas de mettre cette structure au nombre des purement en forme d'étui, mais seulement au nombre de conditionnelement en forme d'étui. Les bords d'une jeune feuille de la Vinca minor (Tab. I, 5) sont colorés en vert-jaunâtre, le milieu en vert. Sous l'épiderme se trouve une couche de palissade très courte, ensuite de 5 à 7 rangs de cellules de paren-

---

[1]) J'apelle la strucure en forme d'étui telle structure, dans laquelle le tissu d'une couleur est enfermé de tous les côtés par le tissu d'une autre couleur. Schéma (Tab. I, II).

chyme, tendues horizontalement, les 3—4 couches inférieures ont généralement une teinte plus foncée, leurs chloroplastides sont plus gros et leur nombre est plus grand.

Plusieurs couches de mésophylle d'une feuille adulte perdent la chlorophylle en haut et en bas, ce qui se réparcute sur l'extérieur du limbe de la feuille, ses bords deviennent blancs et le noyau prend une nuance mate.

L'intransparance est plus grande vers le bas à cause des lacunes.

C'est ainsi que la chlorophylle de la Vinca minor disparait des 2—3 couches subépidermique supérieures et inférieures ainsi que sur les bords de la feuille (6, 7, 8) de toutes les couches du mésophylle. Plus haut nous avons vu que les stomates aussi en sont dépourvus dans leur virilité.

La répartition générale des tissus dans les organes de la Vinca minor adulte, se soumet à la règle de la forme d'étui, mais avec certaines restriction (*a, b, c,* 9, 10, 11, 12). Le nombre des couches vertes change (par degrés ou d'un seul coup), il en arrive à deux (formule 431, 421, 331, 251, 252, 232 etc.[2]), dans les sections blanches on rencontre de 5 à 6 couches incolores.

Le tissu vert est parfois divisé en groupes (12). Entre les cellules incolores de la couche subépidermique inférieure on rencontre des chlorophyllins isolés. A part cela on rencontre encore des taches brillantes d'un vert vif (aussi chez Glechoma et le Pelargonium).

Ces taches sont construites d'après le schéma Tabl. I, 9 : deux couches de palissade courte d'un vert intense adhérant à l'épiderme, puis jusqu'à 4 couches de parenchyme lacuneux, en bas une couche incolore.

La structure de la tige et du pétiole des plantes panachées et non panachées de la Vinca diffèrent peu l'une de d'autre: la première couche subépidermique du collenchyme de la tige et du pétiole est dénuée, dans les deux cas, de toute chlorophylle (aussi Pelargonium zonale, race de M-me Salleray).

La tige a jusqu'à 4 couches vertes. Il est difficile de remarquer la régularité des répartitions des chloroplastides du pétiole. Je n'ai pas trouvé de feuilles blanches sur la Vinca minor.

II. Evonymus japonica.

Sur les feuilles de l'Evonymus japonica, les pertes de la chlorochylle sont encore plus nettement exprimées. Les limbes des jeunes

[2]) Le premier chiffre désigne le nombre des couches incolores du haut, le 3-e celui du bas, celui du milieu le nombre des couches vertes. Il n'est pas tenu compte de l'épiderme.

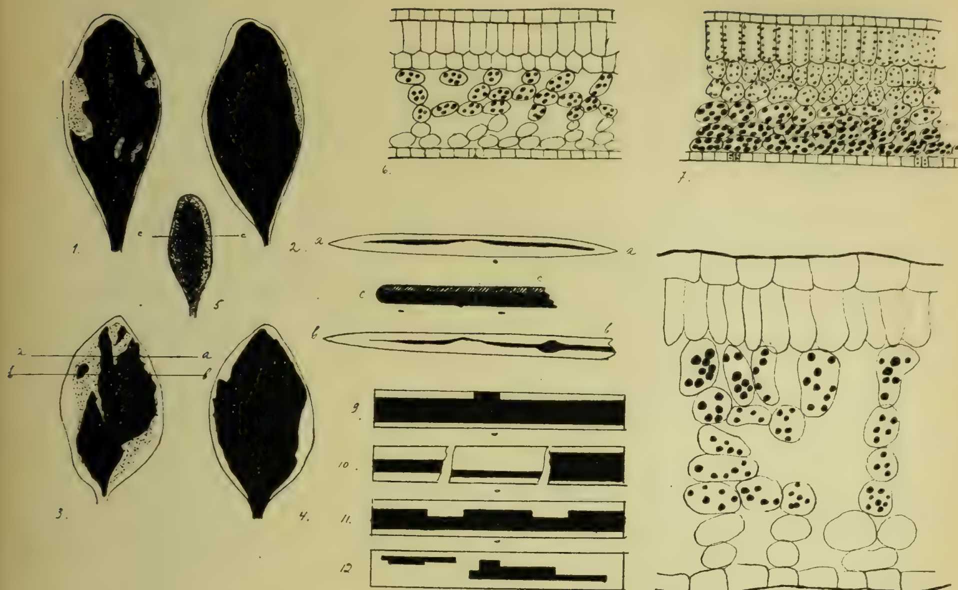
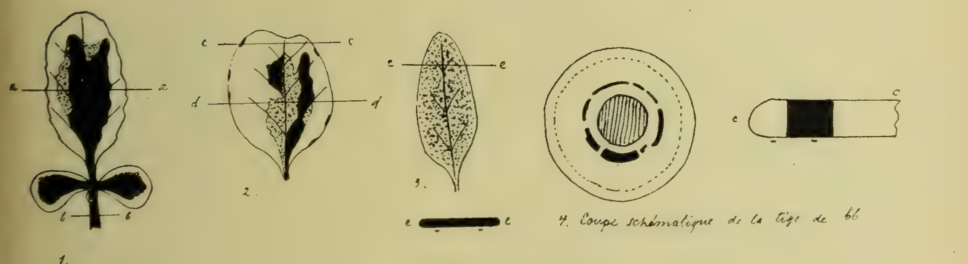
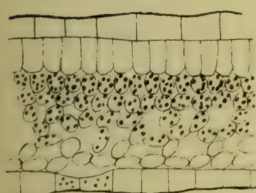


Tableau I. Vinca minor.

Schéma de la répartition des tissus des feuilles. (Parties)

8. Partie de la coupe normale. Leitz. 1:7.





5. Partie de la coupe aa. Schéma

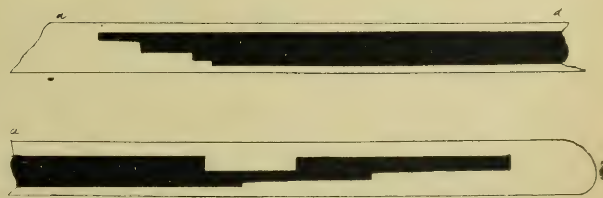


Schéma de la répartition des tissus des feuilles 1 et 2; Coupes partielles de aa et dd

Tableau II. Evonymus japonica.

feuilles (Tab. II, 3) sont vert clair, le milieu est plus foncé. Sous l'épiderme on trouve de 7 à 8 couches de cellules vertes qui se joignent l'une à l'autre, presque sans lacunes. La couche supérieure est en palissade courte, les autres, pour la plupart, tendues horizontalement. Avec l'âge apparait une bordure d'un jaune vert, provoquée par la disparition de la chlorophylle des couches subépidermiques, supérieures et inférieures du mésofylle.

Une feuille adulte (Tabl. II, 1, 2) a les bords presque blanc et le milieu vert foncé qui tranche. Une jeune feuille est d'une structure ordinaire (*e*), une feuille adulte est d'une structure en forme d'étui (*d, a,* 5). Dans les coupes transversales d'une feuille adulte on a trouvé 1 couche supérieure et 2 couches inférieures incolores, entre elles il y a de 3 à 6 rangs de cellules vert foncé avec de grandes lacunes. C'est par leur grand nombre que s'explique l'aspect glauque des parties vertes, vues d'en bas, mais les différents degrés d'intransparence de la surface, dépendent du nombre des couches incolores supérieures (*a, d*). Le tissu vert se termine en angle et disparait graduellement vers les bords (formules 152, 159, 162, 134, 125, 124). Dans les parties blanches il y a jusqu'à 8 couches incolores. On rencontre aussi des »taches« qui se trouvent généralement près du bord et qui sont composées de cellules vertes, adhérant a l'épiderme des deux côtés (*c*).

Le nombre des cellules blanches et vertes de la tige varie (4), — »l'anneau« vert est souvent interrompu, sa larguer varie aussi.

Les exemples de la Vinca et de l'Evonymus (Tabl. I et II) démontrent à simple vue que la structure en forme d'étui de la feuille peut surgir d'une structure entièrement verte, sans prendre pour cela une disposition spéciale des divers tissus spécifiques du point végétatif.[3]) (Chimères).

Il se peut qu'on ait affaire ici à l'hérédité quoique l'influence de conditions extérieures ne soit pas exclue.

Correns[4]) fait part du status albopelliculatus de certaines plantes panachées (par ex. Mesembryanthemum cordifolium) caractérisé par la formation de telle ou telle couleur de la couche subépidermique de la feuille qui dépend clairement d'influences diverses:

---

[3]) Voir E. Baur: »Das Wesen und die Erblichkeitsverhältnisse der „varietates albomarginatae hort." von Pelargonium zonale«. Zeitschrift für ind. Abst.- und Vererbungslehre III., p. 34/-98. — — Einführung in die experimentelle Vererbungslehre. Berlin. 1922.

[4]) Correns C.: Vererbungsversuchen mit buntblättrigen Sippen II., 1919*a*. Vier neue Typen bunter Periklinalchimären. Sitzungsberichte d. preuss. Akademie d. Wiss., p. 820—857.

»Jedesmal bei dem Hervorwachsen eines Blatthöckers muss bestimmt werden, dass die Plastiden in ihm bald desorganisiert werden, während sie sich beim Entstehen einer Sprossanlage und beim Ausbilden der Internodien unter Ergrünen wesentlich normaler entwickeln. Im Prinzip ist das für uns freulich nichts Neues, haben wir doch schon gesehen, dass bei dem st. pseudoleucodermis und leucodermis der Arabis albida die subepidermale Zellschicht, die sonst streng, in Blatt und Stengel, weiss ist, in den Samenanlagen so grün wird, wie bei der typisch grünen Sippe.«

»Die Ausbildung der blassen Schicht, also der Grad, bis zu welchem die Bildung der normalen Chloroplasten behindert ist, hängt nicht nur von der Schicht selbst, sondern auch von Bedingungen ab, die ausserhalb der Schicht liegen. So werden regelmässig in der subepidermalen Schicht der Samenanlagen und jungen Samen bei allen drei Periklinalchimären der Arabis albida die Chloroplasten so gut ausgebildet wie bei der normalen Sippe. So treten am Rande der Kelchblätter der sonst ganz rein weissen Triebe der pseudoleucodermis-Pflanzen stets einige streifenformige Inselchen grünen Gewebe auf. So sind im Stengel des weissbunten Mesembryanthemum cordifolium die Chloroplasten der peripheren Schichten noch deutlich grün, wenn sie in gleichalten Blättern schon farblos sind und mehr oder weniger desorganisiert sind.«

Résumé.

1. Certaines plantes panachées ont la faculté de perdre la chlorophylle des cellules du bord de la feuille et des couches supérieures et inférieures du mésophylle avec le temps.

2. Pendant le développement de quelques plantes panachées on observe une transition immédiate de la structure normale (ou presque normale) à la structure en forme d'étui par la perte de la chlorophylle dans les parties correspondantes du mésophylle.

Je me fais un devoir agréable d'exprimer ma profonde gratitude au professeur Dr. B. Němec, dans le laboratoire duquel a été fait ce travail, pour son attention envers moi et ses indication précieuses.

Prague, Juin 1924.

Institut de la physiologie végétale de l'Université Charles.

Explication des tableaux.

Les schémas sur les tableaux à la touche représentent seulement les couches du mésophylle. Les stomates, aux endroits où l'épiderme n'est pas représenté, sont en forme de lentilles ou de raies. La couleur noire indique partout une coloration verte normale, le pointillé une coloration vert clair.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 20.

LYDA MÜLLEROVÁ:

Analyses du „Mycobacterium lacticola β perrugosum".



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 20.

LYDA MÜLLEROVÁ:

Analyses du „Mycobacterium lacticola β perrugosum".



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Lyda Müllerová:

Analyses du „Mycobacterium lacticola β perrugosum“.

Le signe caractéristique du groupe des mycobactéries est la quantité des lipoides. Par »lipoides« nous entendons toutes les matières que nous pouvons extraire de l'organisme au moyen des dissolvants organiques. Ce sont les parties primordiales de la cellule, présentes dans chaque cellule et nécessaires à la vie de la cellule.

L'étude de la présence des lipoides dans le corps des microbes en tant que quantité et nature a donné lieu à beaucoup de travaux, mais ces problèmes scientifiques ne sont pas encore résolus de façon précise. Plusieurs savants ont analysé les cultures cultivées dans différents milieux, qui influencent évidemment la formation des lipoides dans le corps des microbes; et voilà pourquoi nous n'avons pas obtenu de résultats précis sur leur composition chimique.

Ces lipoides sont également intéressants en ce sens qu'ils sont la cause de la grande résistance des microbes, ce qui est important pour la thérapeutique de la tuberculose. Ils sont si résistants, qu'ils ne peuvent être hydrolysés ni par la lipase du Ricinus ni par l'effet du Bacterium fluorescens dont l'action lipolytique est bien connue. (Kořínek.)

Hammerschlag a été le premier qui se soit occupé de l'analyse des bacilles tuberculeux. Il a recueli 27% de matières grasses, se décomposant en tripalmitin, tristearin et lecithin.

Schweinitz et Dorset ont confirmé ces résultats. Ils ont recueilli 37% de matières grasses dans lesquelles ils ont identifié par le point de congélation une grande quantité d'acide palmitine, arachine et laurine. Dans le résidu des microbes après leur combustion, ils ont découvert 50% de phosphore.

Selon Weyl, qui est arrivé aux mêmes résultats que ses prédécesseurs, on colore, avec des colorants à base d'aniline les lipoides de la même façon que les microbes.

Ruppl distingue dans le corps du Bacillus tuberculosis trois catégories de corps gras: ceux qui sont solubles dans l'alcool à froid; ceux

qui sont solubles dans l'alcool à chaud après le traitement par l'alcool à froid; ceux enfin qui sont solubles dans l'éther.

Aronson a isolé 20 à 25% de matières grasses en traitant les cultures cultivées dans un bouillon glycériné. On suppose que ces matières ne se trouvent pas dans le corps des microbes, mais entre eux comme produit secrété, ainsi que l'a déjà observé Koch qui a dénommé cette matière »la substance liante«.

Des expériences analytiques de Kresling il ressort comme évident que la matière grasse qui existe dans le corps des microbes, est différente de tous les corps gras et de toutes les cires connus.

Les travaux de Tamura avec le Mycobacterium lacticola, démontrent que la nature du milieu influence la composition chimique des microbes. Il a cultivé ces bactéries dans un bouillon peptoné ainsi que dans un milieu synthétique sans albumine. Dans ces deux milieux les microbes croissent bien. La quantité de composés organiques est identique, la différence est seulement dans la quantité des matiéres anorganiques.

Tous ces savants ont analysé les bacilles tuberculeux. Parmi ces expériences j'ai pris comme thème le Mycobacterium lacticola β perrugosum. Ces microbes, par la cultivation et par la morphologie ont une grande similitude avec les bacilles tuberculeux.

Petri fut le premier qui les découvrit en recherchant les bacilles tuberculeux dans le lait, en 1898. Ils ont été aussi trouvés dans le beurre par Rabinowitsch.

Webr a observé que ces microbes, tout comme les bacilles tuberculeux croissent plus vite dans un milieu glycériné que dans un milieu sans glycérine et qu'ils se colorent comme les bacilles tuberculeux; ils ne perdent leur coloration ni par les acides ni par l'alcool. Ces microbes ne sont pas pathogènes, mais s'ils sont en grande quantité ou mélangés avec les corps gras dans l'organisme, ils ont le même effet que les microbes pathogènes.

Mon étude porte sur les points suivants, en ce qui concerne le Mycobacterium lacticola:

1. Comment la glycérine est utile au développement des microbes.

2. La quantité des lipoides dans le corps des microbes, cultivés dans des milieux contenant plus ou moins de glycérine, et quelle est la relation entre la quantité de glycérine du milieu nutritif et la quantité de lipoides dans le corps des microbes.

3. Comment la coloration des microbes varie après les extractions partielles au moyen des dissolvants.

4. Quelle est la coloration de la matière grasse qui est extraite.

Technique.

Les cultures destinées aux expériences ont été obtenues dans un milieu nutritif liquide, dans un bouillon peptoné, additionné d'une quantité de glycérine de 1,5%, 3% et 6%, à la température de 26 à 30° C, durant 26 à 33 jours. (La préparation du bouillon était de: 1,5% d'extrait de Liebig, 1% de peptone dans 1 litre d'eau.)

Dans tous ces milieux, les microbes croissent bien. Dans le milieu de 1,5% de glycérine, ils couvrent la plus grande partie de la surface du milieu nutritif; avec 3% la taie se forme sur la surface entière et avec 6% de glycérine, elle est sur la surface entière en considérable épaisseur et se forme jusque sur les parois des fioles. Les taies ont l'aspect du cuir; elles sont de couleur jaunâtre et leur surface est ridée. Sur un milieu solide (sur la gélose glycérinée) les microbes forment des taies sèches de couleur orange; sur les pommes de terre, ils forment une taie muqueuse, jaunâtre. Humides, les microbes se colorent en orange dans l'air, vraisemblablement par l'oxydation.

Pour faire ces expériences j'ai employé les cultures croissant sur la surface du milieu nutritif. Si une partie des microbes tombe au fond, ils croissent, mais ils créent les formes d'involution.

Puis les cultures ont été filtrées, lavées à l'eau et séchées d'abord dans le thermostate à la température de 60 à 70° C et ensuite, pour le complet séchage, dans l'exicateur. Les microbes séchés ont une couleur jaune-brune et ont l'odeur caractéristique des cultures fraîches. Ils se pulvérisent aisément et on peut bien les conserver.

Pour la détermination des matières grasses, les microbes secs, pulvérisés, ont été traités dans l'appareil de Soxhlet par des extractions fractionnées à l'éther, au chloroforme et à l'alcool.

Les épreuves ont été préparées avec trois colorations succesives, celle des cultures fraîches, une deuxième après les extractions partielles et enfin celle des matières grasses extraites de chaque fraction, par les méthodes suivantes:

1. Méthode à l'acidorésistance d'après Ziehl-Neelsen. Par le carbolfuchsin à la température de 60° C (8 minutes), la décoloration se fait avec une solution d'alcool additionné de 3% H_2SO_4 (5 secondes). Cette méthode fut indiquée pour les bacilles tuberculeux et pseudotuberculeux. Elle a ceci de particulier, que les microbes prennent la couleur lentement, mais qu'ils la conservent à tel point qu'ils ne se décolorent ni par les acides ni par l'alcool.

2. A la grampositivité par la méthode de Gram. Par le carbolgentiana à la température de 60° C (5 minutes), dans une solution de jodjodkalium (1 minute), la décoloration se fait dans l'alcool. Le carbolgentiana

et la solution d'iode colorent les parties fixes du corps des microbes en violet; cette coloration ne change pas à l'alcool. Les microbes qui se colorent à cette iode violette sont dits grampositifs.

3. Selon Zweibaumm, la démonstration des matières grasses dans les cellules vivantes est faite de la façon suivante:

Solution *A*: 0,5 *gr* de *α* naphtol dissous dans 100 cm^3 d'eau, en ajoutant 0,5 *gr* de 33% de la solution KOH.

Solution *B*: 0,5 *gr* de dimethylparafenylendiamin, 3,7 cm^3 nHCl dissous dans 100 cm^3 d'eau.

Pour que les solutions, réagissent in statu nascendi, elles sont mélangées immediatement avant la coloration dans la proportion de 0,5 cm^3 pour 20 cm^3 d'eau, et une goutte de cette solution est ajoutée sur l'épreuve. Dans 5 à 10 minutes, la matière grasse se colore en bleu par l'oxydation du bleu indophénol, mais dans 36 à 48 heures, par la réduction, la coloration disparaît.

Expériences.

Le tableau 1. démontre la quantité de microbes secs, traités par des dosages différents de glycérine cultivés dans le milieu nutritif de 1 litre, du 17. XII. au 12. I., soit durant 26 jours, à la température de 26 à 28° C.

Tab. 1.

Quantité de glycérine p. 100	Poids des microbes secs dans 1 litre du milieu nutritif	Pourcentage
1,5	2,9714	100
3	3,8166	128,4
6	5,5276	186,0

La plus grande proportion de glycérine dans le milieu nutritif a une action augmentative sur la quantité des microbes.

Le tableau 2. démontre la quantité des microbes, cultivés dans le milieu nutritif de 3 litres, avec un dosage de glycérine de 6%, traités du 6. II. au 10. III., soit durant 33 jours à la température de 28 à 30° C.

Tab. 2.

Quantité de glycérine p. 100	Poids des microbes secs dans 3 litres du milieu nutritif
6	19,9384

De ces tableaux il ressort que non seulement le dosage de glycérine dans le milieu nutritif, mais aussi la température et proportionnellement la petite différence du temps de cultivation, augmentent la quantité des microbes.

Le tableau 3. indique le développement des microbes, vaccinés par une autre culture, dans le milieu nutritif de 0 à 16% de glycérine du 31. V. au 10. VI., soit durant 10 jours, à la température de 27° C.

Tab. 3.

Quantité de glycérine p. 100	Poids des microbes secs dans 100 cm^2 du milieu nutritif	Pourcentage	P_H avant	P_H après
0	0,2250	100	6,2	6,6
1	0,3750	166,6	6,2	7
2	0,5746	255,3	6,2	7
4	0,4260	189,3	6,2	7
8	0,4170	185,3	6,2	7
16	0,3570	158,6	6,2	7

Dans ces expériences, le dosage de glycérine le plus favorable au développement du Mycobacterium lacticola est de 2%. De 2% à 8% la quantité des microbes diminue, bien qu'elle soit toujours supérieure à celle obtenue dans un milieu de 1% de glycérine. Avec 16% de glycérine, la quantité est moindre que dans le milieu de 1% de glycérine.

Tableau 4. Détermination de la quantité des lipoides dans le corps du Mycobacterium lacticola par extractions fractionnées à l'éther, au chloroforme et à l'alcool.

Tab. 4.

Quantité de glycérine p. 100	Poids des microbes secs	Quantité des lipoides. Pourcentage calculé par rapport aux microbes secs. Extraits			Total	Pourcentage
		par l'éther	par le chloroforme	par l'alcool		
1,5	2,9714	9,5	0,6	1,2	11,3	100
3	3,8166	12,4	2,9	3,0	18,3	161,9
6	5,5276	17,2	2,2	8,6	28,0	247,6

Le tableau 5. démontre la quantité des lipoides par extractions partielles, calcul fait en prenant l'extraction par le chloroforme dans la proportion de 1% (selon les résultats obtenus indiqués dans le tableau 4.).

Avec un plus fort dosage de glycérine dans le milieu nutritif, la quantité des lipoides présents dans le corps des microbes augmente.

Tab. 5.

Quantité de glycérine p. 100	Quantité des lipoides extraits		
	par l'éther	par le chloroforme	par l'alcool
1,5	15,8	1	2
3	4,2	1	1
6	7,8	1	3,9

Le tableau 6. démontre la quantité des lipoides dans le corps des microbes, cultivés dans un milieu nutritif de 6% de glycérine, à une plus haute température avec une prolongation de 7 jours dans la durée de la cultivation.

Tab. 6.

Quantité de glycérine p. 100	Poids des microbes secs	Quantité des lipoides. Pourcentage calculé par rapport aux microbes secs. Extraits			Total
		par l'éther	par le chloroforme	par l'alcool	
6	19,9384	22,4	2,9	5,2	30,5

Tableau 7. Etabli conformément au tableau 5.

Tab. 7.

Quantité de glycérine p. 100	Quantité des lipoides extraits		
	par l'éther	par le chloroforme	par l'alcool
6	7,7	1	1,8

La quantité totale des lipoides, établie d'après ces deux expériences, n'est pas très différente. Dans la seconde expérience, la quantité des matières solubles dans l'éther et dans le chloroforme augmente tandis que la quantité des matières solubles dans l'alcool diminue.

Division qualitative des matières selon leur capacité de solubilité.

Extraction par éther + acéton

Partie soluble contenant les matières grasses et une faible partie des phosphatides.

Partie insoluble contenant la majeure partie des phosphatides.
+
alcool

Partie soluble lecithin

Partie insoluble mélange des divers phosphatides.

Ce qui est extrait par l'éther est de couleur jaune-orange, d'une consistance solide, se liquéfiant à une température de 40 à 45° C; son odeur est l'odeur caractéristique des microbes frais. Dans l'aceton, la partie soluble est plus faible que la partie insoluble. C'est une matière visqueuse, demi-liquide, de couleur brun clair, transparente, facilement soluble dans l'éther. Ce sont les matières grasses neutres avec une faible quantité des acides graisseux libres. Le chiffre de l'acidité indique le nombre de mg de KOH, nécessaire à la neutralisation des acides graisseux libres et à la saponification des éthers. Il était déterminé par la titrage de la solution d'alcool contenant les matières grasses avec n/10 KOH. Il est 9,1. Comme 1% d'acide oléïne répond à un chiffre d'acidité de 1,98, la quantité d'acide oléïne est de 4,62%. En dehors des matières grasses dissoutes dans l'aceton, on remarque la présence d'une faible quantité de phosphatides. Ces phosphatides ont été révélés dans le résidu des matières grasses après leur combustion, par la réaction microchimique due à la solution molybdenée. Le cholesterine n'a pu être dans le corps du Mycobacterium lacticola obtenu par aucune de mes réactions.

La partie insoluble dans l'aceton, matière analogue à la cire, de couleur jaune-blanche, se liquéfiant à 40° C, se coagule après refroidissement. Cette partie insoluble dans l'aceton est facilement soluble dans l'éther, ne laissant qu'une très faible quantité insoluble. La solution tire sur l'opale. Elle contient une grande quantité de phosphore. Le phosphore est quantitativement déterminé sous forme de magnesiumpyrophosphate (Deux mêmes analyses)

I. $p = 0{\cdot}0066$ (poids de $Mg_2 P_2 O_7$).
$a = 0{\cdot}0106$ (poids de matière employé pour l'analyse).

$$Mg_2 P_2 O_7 : 2\,PO_4 = p : s$$

$$s = \frac{2\,PO_4}{Mg_2 P_2 O_7} \cdot p$$

$$s = 0{\cdot}0056\ gr\ PO_4,$$

$$a : \frac{2\,PO_4}{Mg_2 P_2 O_7} \cdot p = 100 : x$$

$$x : \frac{100 \,.\, 2\,PO_4}{Mg_2 P_2 O_7} \cdot \frac{p}{a}$$

$$x = 53{\cdot}13\ \%\ PO_4.$$

II. $p = 0{\cdot}0082$
$a = 0\,0130$
$s = 0\,0070\ gr\ PO_4$
$x = 53{\cdot}82\ \%\ PO_4.$

L'alcool à froid dissout une petite partie. Après l'évaporation, il reste une matière blanche, visqueuse, qui forme avec l'eau la gelatinose, solution colloidale, qui apparaît au microscope sous la forme de petites gouttes et de fils muqueux; cette matière peut être colorée par le car-

bolgentiane et par le carbolfuchsine, mais elle se décolore dans les acides et dans l'alcool. C'est le lecihtin, qui n'est pas complètement pur; il se coagule par l'action de l'acetate de plomb.

Ce qui est extrait par le chloroforme a une couleur plus sombre, une odeur plus pénétrante.

Ce qui est extrait par l'alcool est de couleur brune, contient la plus grande partie des phosphatides. Avec l'eau il forme la gelatinose, solution colloidale.

Dans le corps des microbes, les phosphatides vraisembablement liés à des composés quelconques, passent dans la dernière fraction obtenue par l'alcool, bien qu'ils soient facilement solubles dans l'éther.

Tableau 8. Division quantitative des matières selon leur capacité de solubilité dans l'aceton et l'éther. Pourcentage calculé par rapport aux microbes secs.

Tab. 8.

Quantité de glycérine p. 100	Extrait par éther + aceton			Extrait par chloroforme + aceton			Extrait par alcool + éther		
	totalité	soluble	insoluble	totalité	soluble	insoluble	totalité	soluble	insoluble
1,5	9,5	4,6	5,9	0,6	0,4	0,2	1,2	0,8	0,4
3	12,4	5,1	7,5	2,9	1,8	1,0	3,0	1,8	1,1
6	17,2	8,2	9,1	2,2	1,4	0,8	8,6	4,4	3,9

Tab. 9.

Quantité de glycérine p. 100	Extrait par éther + aceton			Extrait par chloroforme + aceton			Extrait par alcool + éther		
	totalité	soluble	insoluble	totalité	soluble	insoluble	totalité	soluble	insoluble
6	22,4	10,5	12,3	2,9	0,8	2,0	5,2	1,0	3,8

Le tableau 10. indique la quantité d'azote contenue dans les microbes extraits par la méthode de Khejdal.

Tab. 10.

Quantité de glycérine p. 100	Quantité d'azote
1,5	1,4
3	1,4
6	1,4

La quantité d'azote dans les microbes extraits provenant de cultures différemment dosées en glycérine est uniformément la même.

Tableau 11. Coloration des épreuves de cultures fraîches et après extractions partielles.

Tab. 11.

Méthode de coloration	Résultats des colorations			
	Sur les microbes frais	Après l'extraction		
		par l'éther	par le chloroforme	par l'alcool
Ziehl-Neelsen	Entièrment colorés	Granulation	Nombre moindre de granules	Petit nombre de granules
Gram	"	"	"	"
Zweibaumm	Microbes entièrment colorés en bleu clair	"	"	"

Tableau 12. Coloration des matières grasses extraites par les mêmes méthodes dans des conditions identiques.

Tab. 12.

Méthode de coloration	Matières grasses extraites		
	par l'éther	par le chloroforme	par l'alcool
Ziehl-Neelsen	Matière intensivement colorée dans laquelle sont les granules sans couleur réfractant la lumière.	Matière faiblement colorée dans laquelle se trouve un grande nombre de granules sans couleur.	Granules sans couleur réfractant la lumière.
Gram	"	"	"
Zweibaumm	Matière colorée en bleu	Plus faiblement colorée	Sans couleur

Tableau 13. Totalité des résultats des analyses du Mycobacterium lacticola β perrugosum (cultures faites du 7. XII. au 12. I. à la température de 26 à 28° C).

Tableau 14. Totalité des résultats obtenus dans les cultures du 6. II. au 10. III. à la température de 28 à 30° C dans un milieu nutritif de 6% de glycérine.

Tab. 13.

Quantité de glycérine p. 100	Quantité des microbes secs	Pourcentage	Quantité des lipoides. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Pourcentage	Matières solubles dans l'aceton. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières insolubles dans l'aceton. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières solubles dans l'éther. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières insolubles dans l'éther. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Quantité d'azote dans les microbes extraits
1,5	2,9714	100	11,3	100	5,8	6,1	0,8	0,4	1,4
3	3,8166	128,4	18,3	161,9	6,9	8,5	1,8	1,1	1,4
6	5,5276	186,0	28,0	247,6	9,6	9,9	4,4	3,0	1,4

Quantité de glycérine p. 100	Quantité des microbes secs	Quantité des lipoides. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières solubles dans l'aceton. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières insolubles dans l'aceton. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières solubles dans l'éther. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Matières insolubles dans l'éther. Pourcentage par rapport aux microbes secs	Quantité d'azote dans les microbes extraits
6	19,9384	30,5	11,3	14,3	1,0	3,8	1,4

Considérations générales.

La glycérine du milieu nutritif favorise le développement du Mycobacterium lacticola *β* perrugosum. Les microbes ayant la quantité suffisante de matières à leur développement, croissent plus rapidement et leur nombre augmente. Avec une augmentation dans le dosage de glycérine du milieu nutritif, les cultures augmentent quantitativement par leur périphérie et par leur poids. Avec la quantité de glycérine la plus favorable, dans le milieu nutritif, les cultures couvrent la surface entière du milieu nutritif en une considérable couche; pour une quantité de glycérine moindre, la surface du milieu nutritif est seulement recouverte d'une membrane et parfois n'est pas entièrement recouverte.

D'après ma première expérience, la quantité des microbes dans 1 litre de milieu nutritif dosé de 1,5% de glycérine est de 2,9714 gr. La quantité des microbes dans le milieu de 1,5% de glycérine étant prise comme unité de comparaison. Dans un même volume de milieu nutritif et dans des conditions semblables, par l'élévation à 3% du dosage de glycérine, la quantité des microbes augmente de 0,8452 gr, c'est à dire de 28,4%; dans un milieu de 6% de glycérine il augmente de 2,5562 gr soit de 86,0% sur la quantité de microbes obtenue dans un milieu dosé à 1,5% de glycérine. (Tab. 1.)

Dans le tableau 2. est indiquée la quantité des microbes secs cultivés dans 3 litres d'un milieu nutritif analogue, dosé de 6% de glycérine, à la température de 28 à 30° C, avec une prolongation de la cultivation de durée de 7 jours sur la première expérience. La quantité de microbes augmente. (Tab. 2.)

Le tableau 3. indique la quantité de microbes cultivés dans des milieux dont le dosage de glycérine est de 0 à 16%, à la température de 27° C, du 31. V. au 10. VI., soit avec une durée de 10 jours. Ces microbes provenant d'une culture autre que celle des expériences précédentes. La quantité des microbes secs est un peu différente. A 0% de glycérine, la taie couvrant la surface est sous forme de fine membrane et le poids des microbes est de 0,2250 gr. Dans le milieu glycériné, la taie est ridée et couvre la surface en une couche considérable. Dans une même quantité de milieu nutritif et dans des conditions analogues, la quantité des microbes croît avec 1% de glycérine de 0,1500 soit de 66,6%, avec 2% de glycérine de 0,3496 soit de 155%, avec 4% de glycérine de 0,2010 gr soit de 89,3%, avec 8% de glycérine de 0,1920 gr soit de 85,3% avec 16% de glycérine de 0,1320 gr soit de 58,6%.

Dans ces cultures la quantité des microbes augmente avec une proportion de 2% de glycérine, pour diminuer ensuite jusqu'au dosage de 8%, tout en restant toujours jusqu'à ce dosage supérieur à la quantité obtenue dans un milieu glycériné à 1%. A 16% seulement, la quantité des microbes est inférieure à celle obtenue par le dosage de 1%, tout en étant supérieure à celle donnée par un milieu nutritif sans glycérine.

La concentration de $H^{\cdot}$ dans le milieu restant, s'abaisse. J'ai évalué cette concentration par la méthode colorimétrique de Michaelis, qui n'est pas précise; c'est pourquoi les résultats signalés dans le tableau 3. ne sont pas précis. J'ai seulement cherché à établir la relation entre l'abaissement de $H^{\cdot}$ et le développement des microbes.

Le Mycobacterium lacticola contient une quantité considérable de lipoides. Cette quantité de lipoides dans le corps des microbes augmente par l'addition de glycérine au milieu nutritif. L'extraction a été faite par des extractions partielles par l'éther, par le chloroforme et par l'alcool, un dissolvant ne pouvant dissoudre toutes les matières contenues dans le corps des microbes.

Résultats des extractions par l'éther, par le chloroforme et par l'alcool, des microbes cultivés dans un milieu contenant 1% de glycérine:

Extraction par l'éther	0,2816 gr	9,5%
Extraction par le chloroforme	0,0190 gr	0,6%
Extraction par l'alcool	0,0380 gr	1,2%
Totaux	0,3380 gr	11,3% de substances grasses.

Microbes cultivés dans un milieu dosé à 3% de glycérine:

Extraction par l'éther	0,4742 gr	12,4%
Extraction par le chloroforme	0,1090 gr	2,9%
Extraction par l'alcool	0,1140 gr	3,0%
Totaux	0,6972 gr	18,3% de substances grasses.

Microbes cultivés dans un milieu dosé à 6% de glycérine:

Extraction par l'éther	0,9540 gr	17,2%
Extraction par le chloroforme	0,1210 gr	2,2%
Extraction par l'alcool	0,4770 gr	8,6%
Totaux	1,5530 gr	28,0% de substances grasses.

De ces expériences, il résulte que le corps des microbes se décompose en une quantité de matières solubles plus grande dans l'éther, moindre dans le chloroforme, inférieure dans l'alcool à la quantité obtenue par l'éther tout en étant supérieure à la quantité obtenue par le chloroforme. (Tab. 4.)

Le tableau 6. donne les résultats de la même expérience, faite avec des cultures cultivées dans un même milieu nutritif dosé à 6% de glycérine, avec une seule modification de durée (prolongation de 7 jours) et de température (28 à 30° C).

Extraction par l'éther	4,4516 gr	22,4%
Extraction par le chloroforme	0,5750 gr	2,9%
Extraction par l'alcool	1,0384 gr	5,2%
Totaux	6,0650 gr	30,5% de substances grasses.

La quantité totale de la substance grasse extraite augmente seulement de 2,5% sur la quantité obtenue par l'expérience précédente. La quantité des matières solubles dans l'éther augmente de 5,2%, la quantité des matières solubles dans le chloroforme de 0,7%, tandis que la quantité des matières solubles dans l'alcool diminue de 3,4%.

Puisque, par un dosage plus fort de glycérine dans le milieu nutritif, la quantité des lipoides contenus dans le corps des microbes augmente, il est évident que la glycérine a une part considérable dans la formation de ces lipoides. Dans le corps du Mycobacterium lacticola ces lipoides sont le mélange des matières grasses et des phosphatides. Ces matières grasses sont pour la plupart formées par l'alcool trivalent — glycérine — agissant sur les acides graisseux. Voilà pourquoi, l'addition de glycérine

au milieu nutritif augmente la production des corps gras dans le corps des microbes.

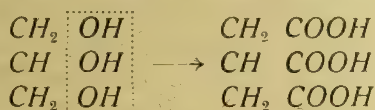
Les acides graisseux proviennent des aminoacides par la substitution de l'hydrogène au groupe NH_2.



$$C_n\ H_{2n}\ NH_2\ COOH \longrightarrow C_n\ H_{2n+1}\ COOH$$

Les aminoacides proviennent de la décomposition des albumines par les enzymes proteolytiques, qui sont dans le milieu nutritif.

D'après les expériences, la quantité de H· du milieu nutritif diminue pendant le développement des microbes. Ceci s'explique de la façon suivante: les microbes, prenant la glycérine du milieu nutritif la décomposent en substituant les radicaux des acides graisseux aux groupes OH.



$$\begin{array}{ll} CH_2\ OH & \quad CH_2\ COOH \\ CH\ \ OH & \longrightarrow CH\ \ COOH \\ CH_2\ OH & \quad CH_2\ COOH \end{array}$$

Pour la formation des acides graisseux par les aminoacides, les microbes prennent H· de la glycérine déjà décomposée et voilà pourquoi la quantité de H· diminue dans le milieu nutritif restant.

Si le milieu nutritif n'a pas été additionné de glycérine, la quantité de H· diminue aussi, mais bien moins. La cause de cela est la même que précédemment car tout comme précédemment les microbes se servent de H·, de la même façon. Il ressort comme évident que les microbes composent eux — mêmes la glycérine, la glycérine étant la partie fondamentale des substances grasses.

C'est ansi que le développement est plus grand dans un milieu glycériné; les microbes ayant, dans le milieu nutritif, les matières nécessaires à leur développement sans avoir à les préparer, à les composer eux — mêmes pour leurs propres besoins, croissent plus rapidement.

Les lipoides se formant dans le corps de ces microbes sont le mélange des corps gras et des phosphatides. Le cholesterine dans le corps du Mycobacterium lacticola n'a pu être obtenu par aucune de mes réactions.

Il est possible et relativement facile de séparer les matières grasses et les phosphatides par l'aceton, bien qu'une petite quantité des phosphatides passe dans la solution des matières grasses dans l'aceton. Il m'a été cependant impossible de séparer les diverses matières grasses les unes des autres, à cause de la faible quantité et de l'instabilité de ces matières.

Les phosphatides ont été separés par l'alcool; dans la solution passe le lecithine, qui n'est pas complètement pur car il se coagule par l'effet

d'acétate de plomb. Il ne m'a pas été possible de séparer les phosphatides insolubles dans l'alcool, en raison de leur très faible quantité.

La détermination quantitative des corps gras et des phosphatides dans les diverses extractions concernant les cultures cultivées dans des conditions variées, offre des différences peu sensibles.

La quantité des corps gras séparés par l'aceton dans ce qui est extrait par l'éther, en ce qui concerne les microbes cultivés durant un plus court laps de temps, à une température plus basse, dans un même milieu nutritif différemment dosé en glycérine, est plus faible que la quantité des phosphatides. Il en est de même pour ce qui est extrait par l'éther en ce qui concerne les microbes cultivés à une température plus haute et durant un plus long laps de temps.

Dans ce qui est extrait par le chloroforme, la quantité des corps gras et des phosphatides est différente selon que la culture est de plus courte durée, à une température plus basse, on de plus longue durée, à une température plus haute. Dans la première culture, ce qui est extrait donne une plus grande quantité de corps gras que de phosphatides; dans la deuxième culture, c'est la quantité de phosphatides qui est la plus forte.

Ce qui est extrait par l'alcool donne, dans la première expérience plus de matières solubles dans l'éther et dans la deuxième plus de matières insolubles dans l'éther.

D'après les expériences nous voyons que, non seulement la composition du milieu nutritif, mais encore la température et la durée de la cultivation, ont une influence sur le développement et la composition chimique des microbes.

Durant les fortes variations relatives à la quantité des lipoides dans le corps des microbes, quantité variant de façon intense selon le dosage de glycérine additionnée au milieu nutritif, la quantité d'azote dans les microbes extraits, reste constante quelle que soit la culture qu'ils aient subie.

Dans les cultures les plus favorables au développement des microbes, les lipoides sont en plus grand nombre.

Les microbes frais sont acidorésistants et grammpositifs; ils se colorent aussi selon Z w e ï b a u m m. Avec les dosages faibles de glycérine les microbes se colorent en moins clair qu'avec les dosages plus forts.

Après l'extraction par l'éther quelques microbes se colorent en entier mais la plupart des microbes se pointillent de granules intensivement colorées, visibles dans la matière tout à fait faiblement colorée.

Après l'extraction par le chloroforme et par l'alcool, le nombre des granules intensivement colorés va en diminuant. Après l'extraction par

l'alcool, il n'y a plus que quelques granules intensivement colorés dans la matière colorée en clair.

Au contraire, la substance extraite par l'éther se colore intensivement, sans se décolorer dans les acides et dans l'alcool. Au microscope, elle ressort comme une matière intensivement colorée dans laquelle se trouve une petite quantité de granules sans couleur, la lumière nettement réfractant.

La substance extraite par le chloroforme se colore faiblement. Au microscope, elle ressort comme une matière faiblement colorée, contenant une grande quantité de granules sans couleur.

La substance extraite par l'alcool ne se colore pas. Au microscope, elle ressort comme des granules sans couleur.

Les épreuves ont été colorées par les différentes méthodes dans des conditions analogues, à la même température, pendant une même durée de temps. Les séries ont été étudiées sur une lame de comparaison.

De cela, il résulte, que l'acidorésistance et la grampositivité du Mycobacterium lacticola sont subordonnées aux lipoides ainsi qu'aux matières solubles dans l'éther. Comme, d'après l'expérience, les phosphatides separés par l'aceton dans ce qui est extrait par l'éther, se décolorent par l'alcool et par les acides, cette acidorésistance et cette grampositivité dépendent d'un alcool gras supérieur quelconque.

Resumé.

Dans le milieu nutritif, la glycérine favorise le développement du Mycobacterium lacticola β perrugosum. Dans le milieu nutritif restant, la concentration de H· diminue.

Avec la plus grande quantité de glycérine dans le milieu nutritif, la quantité des lipoides dans le corps des microbes augmente. La plus grande quantité de ces matières est soluble dans l'éther; le chloroforme en dissout une petite partie. Moins de matières sont solubles dans l'alcool que dans l'éther, mais le chloroforme en dissous encore moins que l'alcool. Les microbes se servent de la glycérine pour la formation des lipoides.

Les lipoides dans le corps du Mycobacterium lacticola sont le mélange des corps gras et des phosphatides. L'extraction par l'éther donne une plus grande quantité de phosphatides et l'extraction par le chloroforme une plus grande quantité de corps gras. L'extraction par l'alcool donne un mélange de phosphatides.

La quantité d'azote dans les microbes extraits est constante malgré la différence des cultures et des dosages de glycérine. La quantité seule des lipoides varie.

Les microbes frais sont acidorésistants et grampositifs. Dans des concentrations plus faibles de glycérine, ils sont moins colorés que dans les concentrations plus fortes.

Aprés les diverses extractions, seuls les granules se trouvant dans la substance colorée en clair, sont intensivement colorés. Après l'extraction par l'alcool, il reste seulement une petite quantité de ces granules intensivement colorés.

Par contre, les substances extraites par l'éther se colorent intensivement et les substances extraites par le chloroforme se colorent plus faiblement. Les substances extraites par l'alcool ne sont pas colorées.

L'acidorésistance et grampositivité de ces microbes dépendent d'un alcool gras supérieur quelconque.

Selon la capacité de coloration de ces microbes, après les extractions diverses, il est évident que les lipoides sont présents à l'état de depôt dans ces corps.

Prague, juillet 1924.

Travail de l'Institut de Physiologie végétale du M. Prof. Dr. Němec, à l'Université Charles, de Prague.

Bibliographie.

Aronson: Zur Biologie der Tuberkelbacillen. Berl. klin. Wochenschr. p. 484, 1899.

Bang: Chemie und Biochemie der Lipoide. 1911.

Benedikt-Ulzer. Analyse der Fette. 1903.

Frouin et Maylis Guyllaumie: Influence de la concentration de la glycérine dans les milieux de culture sur le rendement en poids du Bacilles tuberculeux. Compt. rend. de la Soc. Biol. 90, 11, 1924.

Goris: Composition chimique du Bacillus tuberculeux. Ann. Past. 1920.

Glikin: Chemie der Fette. 1912.

Hammerschlag: Bakteriologisch-chemische Untersuchungen über Tuberkelbacillen. Centrbl. f. klin. Med. Bd. 12, 9—18, 1891.

Kořínek: Über den Einfluss der pflanzlichen Lipasen auf das Mycobacterium tuberculosis poikilothermorum. Bioch. Zeitschr. Bd. 136, 4/6.

Kořínek: De l'influence de Bacterium fluorescens et B. pyocyaneum sur le Mycobacterium de Friedmann.

Kresling: Über die Fettsubstanz der Tuberkelbacillen. Centrbl. f. Bakt. Bd. 30, 897, 1901.

Kruse: Mikrobiologie. Leipzig 1910.

Löwenstein: Vorlesungen über Tuberkulose. Jena 1920.

Petri: Nachweis der Tuberkelbacillen in Butter und Milch. Arbeit a. d. kaiser. Gesundheitsamte Bd. 14, 1898.

Ruppl: Zur Chemie der Tuberkelbacillen. Zeitschr. f. physiol. Chemie Bd. 24, 218, 1898.

Rabinowitsch: Zur Frage des Vorkommens von Tuberkelbacillen in der Marktbutter. Centrbl. f. Bakt. 19, 707, 1898.

Schweinitz et Dorset: Further notes upon the fats contained in the tuberculosis bacilli. Centrbl. f. Bakt. 19, 707, 1898.

Tamura. Beiträge zur Chemie der Bakterien. Zeitschr. f. physiol. Chemie. 87, 85. 88, 190. 89, 289.

Weyl: Zur Chemie und Toxigologie des Tuberkelbacillus. Deutsche med. Wochenschr. N. 7, 1891.

Webr: Über die Tuberkelbacillen ähnliche Stäbchen. Arbeit a. d. kaiser. Gesundheitsamt Bd. 19, 1902.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 22.

Dr. JAROSLAV HAHN:

FACETTOVÉ OČI MUSCID

(r. Sapromyza).

5 obrázků v textu a 3 tabulky.

Les yeux composés des Muscides.

Avec 5 figures et 3 planches.

(Se stručným úvodem do studia složených očí.)



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Facetlové oči Muscid.

(r. Sapromyza.)

(Se stručným úvodem do studia složených očí.)

V této práci předkládám část výsledků studia o anatomii a histologii rodu *Sapromyza*. Nebylo původně mým úmyslem zabývati se otázkou složených očí, ne snad proto, že bych pokládal problem ten za definitivně rozřešený, ale poněvadž jsem si byl vědom toho, že k úspěšnému řešení je třeba důkladných znalostí anatomických a fysiologických, že dále je nutno ovládnouti i základy optiky, avšak pro jiné práce na to vše se mi nedostávalo času. Když jsem však nalezl v literatuře protichůdné názory, rozmanité kontroverse a často i závěry, které jsem nemohl uvésti v soulad s vlastními nálezy, pokládal jsem za vhodno, pokud je to ovšem možno při nedostatečném srovnávacím materiálu, popsati anatomickou skladbu složených očí *Sapromyz* a nadhoditi několik myšlenek, které, třebas by snad měly jen cenu negativní, mohou býti pobídkou k důkladnému studiu tohoto problemu.

Materiál a fixace. Rod *Sapromyza* je velmi uniformní jak po stránce zevní, tak i pokud se týká vnitřní organisace. K studiu bylo použito druhů nejhojnějších, jako jsou: *S. rorida Fll., praeusta Fll., multipunctata Fll., quadripunctata L., thoracica,* méně již druhů *apicolis R.* a *plumicornis Fll.* Většina obrázků pořízena z praeparátů prvních tří druhů.

K fixaci se nejlépe osvědčily tekutiny alkoholické, v jiných objekty plovaly na povrchu a byly špatně pronikány. Z toho důvodu bylo upuštěno od Bouina, fixace formol-Flemming (chrom-formol-octová) i sublimátu, který obzvlášť ukázal se jako velmi málo vhodný, neboť působil značné deformace pletiv. Nejlépe možno doporučiti Carnoy, fixaci Dietrichovu (6 dílů formolu, 15 dílů 96% alkoholu, 1 díl octové kyseliny, 30 dílů vody: fixace asi 12 hod.), dále sublimát-alkohol-octovou kyselinu a alkohol-octovou.

Veliké obtíže působí i zalévání do parafinu, u *Muscid* hlavně tím, že v objektu zůstává vzduch a parafin poměrně těžko proniká chitinem. Pomůžeme si buď tak, že objekty rozřežeme a tím usnadníme pronikání te-

kutin, nebo použijeme methody kombinované. K histologickým pracím na *Arthropodech* vřele doporučuji kombinovanou methodu celloidin-parafinovou. Není mým úmyslem obšírně se rozepisovati o této methodě, podrobnosti najde každý v příručkách nebo literatuře,*) chci jen stručně promluviti o způsobu, kterého jsem sám užíval. Připravíme si 1% roztok celloidinu v hřebíčkovém oleji**) nejlépe tak, že smícháme 2% roztok celloidinu v ether-alkoholu se stejným dílem oleje. Objekty dobře odvodněné byly ponořeny do této tekutiny 12 hodin; staly se průsvitnými a klesly ke dnu. Pak byla nádobka otevřena po 12 hod., aby se z roztoku vypařil ether. Tedy celkem byly ponechány objekty v celloidinu 24 hodiny, pak osušeny na filtračním papíře od nadbytečné tekutiny a praeparovány dále methodou parafinovou. Za převodní tekutinu byl použit xylol, neboť chloroform prchal rychleji nežli mohl parafin pronikati, tetralin pak příliš pomalu. V čistém xylolu ponechány asi hodinu a pak pokračováno zcela normálně.

Touto methodou docílil jsem dobrých výsledků, neboť bylo možno řezati objekty na 3 μ, tedy při materiálu chitinovaném tloušťka dosti uspokojivá. Řezy byly nejčastěji barveny hoematoxylinem Heidenhainovým, Delafieldovým, barvivy karmínovými a dle Malloryho. Hlavně barvení poslední doporučuji pro elektivní tinkci a z toho plynoucí přehlednost praeparátu.

—

Studium facettových očí není bez určitých obtíží a proto je myšlena tato práce zároveň jako stručné uvedení do tohoto thematu. Budiž mi proto dovoleno předeslati několik všeobecných poznámek anatomických a fysiologických, ovšem jen pro první orientaci, neboť chce-li se někdo zabývati tímto thematem, nemůže se přirozeně obejíti bez studia klasického díla Exnerova a Müllerova.

Facettové oko, které charakterisuje *Arthropody*, můžeme rozděliti ve tři zony: 1. dioptrickou, 2. percepční, 3. katoptrickou.

Zona první představuje světlolomný aparát, jehož úkolem je sbírati světelné paprsky z okolí a soustřediti, po případě usměrniti kužel paprsků k zoně percepční, tedy k retině. V nejjednodušším případě skládá se z chitinové spojky různého tvaru (plankonvexní, bikonvexní) a různé křivosti, jak toho prostředí vyžaduje. Všeobecně možno říci, že živočichové vodní proti suchozemským mají čočku o menším radiu křivosti, aby tak korrigovali vyšší index lomu vody. Čočka tvořena je chitinem, který rozpadá se více méně ve dvě vrstvy, zevní tvrdší a vnitřní pod-

*) Péterfi: Zeitsch. f. w. Mikroskopie, Bd. 83, 1921. — Zool. Anz. Bd. 56.

**) Možno použíti i methylbenzoatu, který má tu výhodu, že nehnědne.

dajnější, tedy podobně jak i u normálního pokryvu těla nalézáme. Poměr obou vrstev je rozmanitý. Čočka vyloučena je změněnými buňkami hypodermálními, t. zv. buňkami korneagenními. Ty zachovávají si někdy svoji původní polohu i funkci po celý život, jak je tomu na př. u *Crustacei*, neboť při svlékání obnovuje se i cornea, která tedy opět a opět musí býti vylučována. U některých *Orthopter* však buňky opouštějí sousedství čočky, sestupují doleji ke »krystalovému kuželi« a slouží pak k světelné isolaci, neboť uvnitř vytvoří se pigment. Poměry takové se typicky vytvářejí na př. u *Dipter*, kde korneagenní buňky přeměňují se v »pigmentové buňky prvého řádu« (Hauptpigmentzellen). Počet korneagenních buněk je různý, původnější stav je více buněk sestavených bez určitého pořádku (*Phyllopoda* s výjimkou *Branchipus*, u něhož se počet buněk redukuje na 5); nejobvyklejší číslo je 2, které se typicky u vyššího hmyzu (i *Decapoda*) všude vyskytuje.

Oči, jichž dioptrický aparát skládá se pouze z čočky, slují aconí, neboť chybí jim druhá část světlolomného zařízení, t. zv. conus (lomný kužel). Oči takové shledáváme na př. u *Thysanura, Forficulidae, Rhynchot* i u některých *Coleopter*.

Druhou kategorií jsou t. zv. »euconí oči« charakterisované přítomností conu (Kristallkegel). Ten skládá se ze 4 částí seskupených těsně kol optické osy ommatidia. Čtyřdílnost dokumentuje původ lomného kužele ze čtyř buněk, které jako plášť celý útvar obklopují. Plasma jejich je silně redukována, tvoří často jen jakýsi povlak s jádry obyčejně na straně k čočce uloženými (Sempersche Kerne). I počet »krystalových buněk« nebývá stejný, též zde bylo původně více buněk, u *Estherie* a *Limnadie* na př. 5, u vyšších forem pak došlo k redukci na 4. Lomný kužel sestává z kutikulární masy, pevné konsistence, která dle názoru Exnerova (1891) skládá se z vrstev nestejné optické hustoty, různé optické mohutnosti, které ubývá směrem od optické osy k plášti (podrobně v kap. o fysiologii oka). U *Crustacei* žijících v temnu nastává redukce kužele, po případě mizí úplně, tedy oko jejich vrací se k stavu původnějšímu, aconím očím. Euconí oči jsou nejrozšířenějším typem u *Insect*, nalézáme je od *Apterygot* přes *Orthoptery, Coleoptery, Lepidoptery* až k *Hymenopterám*.

Pseudoconí oči liší se od předcházejících tím, že jejich kužel není pevný, kutikulární, nýbrž je tvořen hmotou měkkou, rosolovitou, někdy až tekutou, která je úplně se stran obklopena pigmentovými buňkami prvého řádu. Další rozdíl tkví v tom, že krystalové buňky leží proximálně od kužele, tvoříce jaksi dno pohárku vytvořeného pigmentovými buňkami. Oči tohoto typu jsou charakteristické pro *Diptery*.

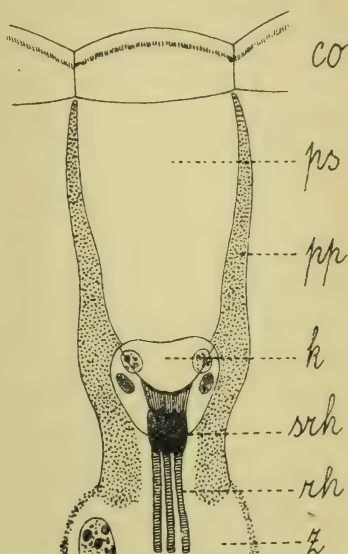
Je ovšem přirozeno, ježto všechny typy představují nám jaksi vývojovou řadu, že hranice mezi nimi nejsou ostré, existují přechody, tak pseudoconus u r. *Laphria* blíží se svojí konsistencí čočce, u *Forficula auricularia* (aconí oči) nasedají krystalové buňky na corneu ze spoda jako pohárek, tvoříce tak jakýsi primitívní kužel, u *Elateridů* pak (mají aconí oči) t. zv. processus corneae zastupuje conus. Vzdor tomu je dobře zachovávati tyto typy stanovené Grenacherem (1878), neboť přes nepopíratelné ponenáhlé odstupňování jsou ve své morfologické skladbě a hlavně rozšíření charakteristickými a jak ve fysiologické části uvidíme, i pokud se týče dioptrických vlastností je podstatný rozdíl mezi jednotlivými typy. My pojednáme o rozdílech mezi očimi pseudoconími a euconími.

2. Vlastní percepční aparát u oka facettového představuje »retinula«. Složena je z několika buněk protáhlých ve směru optické osy a sestavených do kruhu, takže příčný průřez dává obraz hvězdy. Na vnitřní straně zduřuje každá buňka v hranu, t. zv. rhabdomer, který skládá se z čípků (zřetelně u *Periplaneta*); zduřené hrany spojují se dohromady v rhabdom. Počet buněk není konstantní, u *Lycaenidu* 10, u *Asella* 14, u *Hymenopter* 8. Nejčastěji dochází k redukci jedné nebo i více buněk, a sice hlavně v části proximální, poněvadž zde funkcionelní dráždění světla je nejmenší. Z poměrů u *Apterygot* možno souditi, že zrakové buňky byly původně ve dvou vrstvách (3 a 4), což je snad ještě vyjádřeno u některých hmyzů proximálním a distálním seskupením jader. Buňky zrakové nejčastěji redukovány jsou na 7, ale i tu pak nezřídka nalézáme osmou redukovanou buňku, často jen již jako jádro. Z toho můžeme souditi, že původní počet buněk byl osm. Srovnáme-li počet buněčných elementů v jednotlivých zonách, shledáme, že se objevují nejčastěji čísla 2, 4, 8, což snad poukazuje na původ z jediné mateřské buňky.

3. Jednotlivá ommatidia jsou navzájem isolována pigmentem, který je uložen jednak v buňkách prvého řádu (Hauptpigmentzellen), jednak v b. druhého řádu (Nebenpigmentzellen), jichž počet je velmi různý, až 48 (Dietrich 1909); kromě toho i v samotných buňkách smyslových někdy nalézáme pigment. K isolaci slouží dále tapetové buňky uložené mezi retinulami interomaerně, po případě pod nimi. Pigment jejich bývá složen z větších zrnek. Původu jsou asi mesodermálního. Z proximální části zrakových buněk vycházejí nervová vlákna, která skrze ganglia optická (v počtu 1—4) vedou podráždění do mozku. Mezi ommatidia vstupují i trachee, které ztrácejí však chitinové spirální vystužení.

Anatomie oka rodu Sapromyza. Složením oka zachovává *Sapromyza* typ pseudoconí. Čočka bikonvexní složená ze dvou vrstev nevykazuje žádné novum, jen tolik poznamenávám, že v temném poli zřejmě vystoupí její dvouvrstnost, neboť povrchová tužší část intensivně září, kdežto měkčí, objemnější vrstva úplně se ztrácí (na praeparátu nebarveném). Na řezích barvených dle Mallory-ho hranice obou vrstev (povrchová se barví žlutavě, spodní modře) je značena červenou linií (obr. 1.), tedy se zdá, že chitin je zde trojvrstevný jako nalézáme v kloubech hmyzu.

Pigmentové buňky prvého řádu jsou v počtu 2 a tvoří nálevku zajímavě formovanou (obr. 1., 13., 14.). Jsou to mateřské buňky, které vyloučily corneu a pak přejaly funkci aparátu isolačního. Jádra jejich jsou oválná a uložena jsou asi uprostřed těsně nad krystalovými buňkami. Tak tomu je u *S. praeusta* i *rorida*, u *multipunctata* však jsou protáhlá a sestupují doleji a se stran obklopují buňky krystalové. Poloha jader vůči šestiúhelníkovému obrysu čočky vysvítá ze schematu 19., leží tedy v ose druhořadé. Buňky pigmentové se v dolejší části vakovitě rozšiřují (obr. 14.) a těsně objímají krystalové buňky, dosahujíce pod nimi až skoro k rhabdomu. Hranice jejich v těchto místech je nezřetelná.



Obr. 1.

Krystalové buňky jsou jaksi pevně vklíněny na spodu pohárku pigmentového, tvoříce tak dno nálevky, kterou vyplňuje polotekutá hmota — pseudoconus. Na fixovaných praeparátech pseudoconus je sražen v podobě centrálního sloupku, který zůstává v souvislosti buď s corneou nebo krystalovými buňkami. Mallorym barví se modře, jeví tedy jakousi příbuznost se spodní vrstvou chitinovou.

Dle názoru Grenacherova (1879) je pseudoconus vyloučen čtyřmi krystalovými buňkami, které leží na spodu. Carrière (1886) však tvrdí, že pseudoconus není nic jiného než část čočky a na základě svých studií na *Bibio hortulanus* popírá rozdíly mezi typem pseudoconím a euconím a zdůrazňuje, že euconí oči jsou jen zvláštním stupněm očí aconích. Grenacher kladl důraz na to, že pseudoconus je hmota tekutá, podstatně se lišící svojí konsistencí od chitinu čočky a která jen pasivně je

udržována mezi oběma pigmentovými buňkami. Ovšem při dalším studiu očí *Dipter* se ukázalo, že v některých případech neplatí definice Grenacherova, neboť pseudoconus je podstatně tužší, i při fixaci zachovává svůj tvar, nebo jen málo se smršťuje (Dietrich 1909). Proto Carrière je přesvědčen, že pseudoconus je jen částí corney. K názoru tomu se přiklání i Dietrich na základě studií na r. *Laphria*, ale hlavně r. *Simulium* a *Chrysogaster*, u nichž není možno stanoviti přesných hranic mezi facettou a pseudoconem, neboť oba útvary přecházejí v sebe zcela neznatelně. Nepokládám za vhodno činiti konsekvence z toho, zda pseudoconus a cornea se barví souhlasně, či různě, nebo zda pseudoconus zůstává v souvislosti s corneou, po případě zase s krystalovými buňkami, neboť případy obojího druhu najdeme hojně dle materiálu i způsobu barvení. Mnohem přesvědčivější je předpoklad, že jestliže pseudoconus je vyloučen čtyřmi buňkami krystalovými, musíme očekávati, že i na příčných průřezech tento čtyřnásobný původ se nějak projeví. Carrièrovi se však nikdy nepodařilo něco podobného zjistiti, rovněž ani Dietrich nebyl šťastnější při studiu i velice vhodného materiálu (jak sám praví), jako je *Laphria*. Sice tu a tam objevovala se jakási čtyřdílnost, ale poněvadž neméně často přicházelo zaškrcení ve tři i pět dílů, pokládá Dietrich zjev ten za produkt smrštění pseudoconu. Proto přidává se k mínění Corrièrovu, že pseudoconus jest jen »eine zapfenartige Vorwölbung der Cornea«. Poněvadž tedy dle něj cornea i pseudoconus jsou jedno a totéž, nutně musí býti vylučovány týmiž buňkami, to jest pigmentovými buňkami prvého řádu, jejichž homologii s corneagenními buňkami, jak je nalézáme u *Crustacei* nebo *Ephemer* (Zimmer), dokázal Hesse (1901). Jest ovšem překvapující, že by jedna buňka během vývoje vykonávala tolikerou funkci. Tedy především vyloučila by chitinovou pevnou corneu, pak pseudoconus, který, krom několika celkem vzácných případů, jest konsistence tekuté, a posléze by vyloučila pigment a převzala službu isolační. Sám pokládám za správnější názor Grenacherův a odůvodňuji to jednak dříve řečeným, jednak tím, že nedostatek stop po čtyřnásobném původu není celkem pro otázku tu směrodatným, neboť pro hmotu polotekutou nebo zcela tekutou je to úplně pochopitelno, a že ani u hmoty pevné nemusí se nijak projeviti několikanásobný původ (dle počtu buněk ji vyloučivších), dokazuje cornea, která, ač jest vyloučena dvěmi buňkami, nezachovává nijakých hranic, které by prozrazovaly její dvojitý vznik. A konečně podařilo se mi u *S. praeusta* na příčném průřezu pseudoconem a sice jen v jeho dolejší části nalézti zřetelné rozdělení ve čtyři stejné části, při čemž kříž dělící přesně odpovídal svojí polohou čtyřem buňkám krystalovým. Že se zde nejedná o artefakt, je patrno z toho, že ve všech zjištěných

případech dělící linie pseudoconů na témž řezu ležely souhlasné. Pokládám tedy za jisto, že pseudoconus vylučován je čtyřmi buňkami krystalovými a nikoli pigmentovými buňkami prvého řádu.

Krystalové buňky jsou tedy čtyři, jsou průhledné a mají jádra položena úplně distálně v části buňky, která je jaksi zapuštěna do pigmentových buněk. Jsou tak umístěna proto, aby svojí lomností, odchylnou od optické mohutnosti vlastního plasmatu, nebránila průchodu světelných paprsků. Jejich rozložení kol osy ommatidia i poloha jader vzhledem k ostatním elementům je patrna na schematu 19. Tvar buněk je význačný, nikde v literatuře nezdůrazněný a jak uvidíme v části fysiologické, velmi důležitý pro pochopení funkce celého oka. Při pohledu se strany mají tvar srdčitý (obr. 1., 13.). Takový tvar buněk nalézáme i na obrázcích Grenacherových u *Musca vomitoria*, i Dietrichových u *Oxycera pulchella, Microchrysa polita, Haematopa, Chrysogaster cemeteriorum, Laphria flava* atd., takže můžeme předpokládati, že je to vůbec charakteristický tvar pro všechny *Diptery*. Ovšem takto jeví se tyto buňky jen při pohledu se strany. Máme-li však řez jejich středem (podélný), nebo stačí již, když v prvém případě zaostříme (máme-li ovšem tlustší řezy) na hlubší rovinu optickou, tu se ukáže, že čtyři krystalové buňky tvoří dokonalou misku nejsilnější uprostřed, tedy jakousi konkavkonvexní čočku, jejíž dutá strana je obrácena k pseudoconu (obr. 1., 13., 14.). Na příčném průřezu, asi ve výši jader, zastihneme tuto misku v podobě mezikruží, jehož zevní kruh je tvořen vnějšími stěnami buněk, vnitřní pak průřezem konkávní stěny obrácené k pseudoconu (obr. 16. dole). Nutno zdůrazniti, že tvar těchto buněk je zjevem sui generis, že není určován tvarem pseudoconu, neboť ten je tekutý, bez určité formy, takže krystalové buňky formují pseudoconus a ne naopak. Řez, který je zobrazen obr. 14., je trochu šikmý, takže tvar krystalových buněk je poněkud zkreslen.

Pak následují vlastní buňky zrakové značně protáhlé, sestavené normálně do kruhu a opatřené rhabdomery. Ty zdají se homogenními, ale po maceraci v zředěné vodě formolové objeví se příčné čárkování (Vigier u *Calliphora vomitoria*). I při barvení Heidenhainem vystoupí někdy tato struktura. Buňky zrakové uzavírají tedy kanál, který však nemá po celé délce stejné světlosti, nýbrž asi v jedné třetině délky je nejširší a zužuje se opět ponenáhlu směrem proximálním (obr. 13.). V horní třetině blíže krystalových buněk jest skupina několika jader (přesné poměry zjistíme na příčných řezech, o čemž později bude jednáno), v dolejší pak jádro jediné. Nejzajímavější jsou oba konce rhabdomerů. Distální konce poněkud naduřují a silně se sbližují a zdá se, že

spolu splývají, neboť ani na příčných řezech neznamenáme hranic mezi jednotlivými rhabdomery. Tvoří se zde jakási kulovitá zduřenina, z níž vybíhají jednotlivé rhabdomery, jak dobře je patrno na praeparátech barvených haematoxylinem Heidenhainovým (obr. 14.). Celý útvar je zasazen do krystalových buněk, což pozoroval již G r e n a c h e r u *Musca vomitoria*. Poněvadž stav tento nalézáme mimo *Muscid* též i u rodu *Syrphidae*, *Asilidae* i *Lipoptena*, možno souditi, že zjev ten je u *Dipter* všeobecný. Ovšem je otázka, zda rhabdomery vstupují jen mezi buňky krystalové, či vnikají přímo do nich. Dle mého názoru je pravděpodobnější stav druhý, že totiž jsou přímo zapuštěny do buněk, čemuž by nasvědčovaly příčné i podélné průřezy. Na příčném řezu vypadají sblížené rhabdomery jako čtyřboký sloupek s hranami zakulacenými, který postupuje skoro až pod konkávní stěnu krystalových buněk. Z něj vystupují pak jemná vlákénka, která se táhnou až ke konkávní stěně buněk a zde tvoří temnější linii složenou ze zrnéček. Jsou to snad primární fibrilly zduřelé na konci v čípky (obr. 1., 14.); i na příčném průřezu vedeném ve výši jader krystalových buněk postřehneme tmavší linii kol vnitřního kruhu (obr. 16. dole).

Již dříve jsme se zmínili, že distální konec rhabdomerů zasazený do buněk krystalových barví se intensivně haematoxylinem Heidenhainovým, zatím co ostatní část rhabdomerů postupující proximálně, zbarvena je poměrně málo, ovšem že přec intensivněji, než plasma zrakových buněk. Od této zduřeniny postupuje pak až ke konkávní hranici buněk krystalových jemněji zbarvený conus, který se ponenáhlu rozšiřuje. Ještě nápadněji projeví se tento stav při barvení dle Mallory-ho. Kdežto rhabdomery barví se šedomodře, zbarví se zduřenina oranžově-červeně a od ní vychází conus zbarvený v tónu přecházejícím do šedomodré; těsně pod pseudoconem nalezneme tmavší linii, jak již dříve bylo podotknuto. Toto shodné zbarvení s proximální částí rhabdomerů, které jsou složeny ze zrakových čípků, svědčilo by pro názor, že i t e n t o c o n u s j e t v o ř e n f i b r i l l a m i, k t e r é n a k o n c i z d u ř u j í v č í p k y.

Vnikání rhabdomerů do krystalových buněk popisoval již před G r e n a c h e r e m C i a c c i o (1876), ale poněkud nepřesně, důkladný popis podal teprve V i g i e r (1907). Tvrdí, že rhabdomery jsou distálním koncem zapuštěny mezi b. krystalové, nevstupují tedy do nich, a zde zduřují. Prostor mezi buňkami je vyplněn zvláštní fibrillovou hmotou, která hraničí nahoře s pseudoconem. V ní uloženy jsou zduřelé konce rhabdomerů a jsou ještě navzájem isolovány hmotou, která v podobě trnů přesahuje konce rhabdomerů; na podélném řezu se zdá, jakoby sám rhabdomer pokračoval v trnovitý výběžek. Ale na příčných řezích »on reconnait alors qu'il ne s'agit nullement d'un prolongement épineux propre

à chaque baguette de rhabdomère, mais que cet aspect est dû à la section d'une bandelettes obturantes (Kittleiste) qui unissent, près de leur surface libre, les cellules épitheliales«.

Poněvadž jsem nepoužíval speciálních method k barvení blány buněčné, nechávám prozatím nerozhodnuto, zda zduřené rhabdomery vnikají do buněk či leží mezi nimi (proč však konkávní hranice buněk krystalových tvoří jedinou souvislou linii?), neboť nepokládám okolnost tu pro naše účely za věc zásadní důležitosti. Zde budiž jen zdůrazněno, že nenalezl jsem nijaké hmoty isolující a že fibrillový conus je pokračováním pozměněných konců rhabdomerů. O významu tohoto zařízení bude promluveno ve fysiologické části.

Na příčných průřezích ommatidiem zdůrazňuje Dietrich (1909) konstantní assymetrické rozložení jednotlivých rhabdomerů. Poněvadž míním důkladněji pojednati o těchto zjevech, uvádím příslušný passus doslovně. Dietrich praví: »Es zeigt sich, dass die Rhabdomere 1—3 stets in einer geraden Linie angeordnet und nach der Mediane des Körpers zu gelegen sind; 3—5 bilden ebenfalls eine Gerade, die in einem spitzen Winkel zur ersteren geneigt ist, während die Verbindungslinie von 5 und 6 der von 1—3 parallel läuft. Das siebente Rhabdomer schiebt sich zwischen 1 und 6 nach dem inneren Lumen zu vor. Diese assymetrische Zusammensetzung ist für alle Ommatidien eines Auges konstant, dagegen wechselt die Orientierung je nach dem Bezirke des Auges, in dem sie auftreten. Wie bereits erwähnt, ist die Gerade von Rhabdomer 1—3 nach der Mediane zu gelegen, die Linie 5—6 nach den Seiten zu. Diese Regel erleidet keine Ausnahme. Das siebente Rhabdomer jedoch tritt in der dorsalen Augenhälfte von unten her zwischen die übrigen hinein, im ventralen Teil aber von oben her. Das Facettenauge der Dipteren besteht demnach aus zwei spiegelbildlich gleichen Teile.«

Jest příznačno, že Dietrich zakresluje assymetrii rhabdomeru jen na svém textovém obrázku, na ostatních obrázcích není po ní ani stopy. Sám ovšem studoval jsem jen rod *Sapromyza*, ale přes to na základě svých výsledků tvrdím, že assymetrie rhabdomerů není nikterak konstantní, nýbrž spíše zjevem náhodným, pravděpodobně způsobeným fixací; k tomu by poukazovaly i obrázky Dietrichovy, které někdy činí dojem, jakoby byly kresleny z praeparátů ne nejlépe konservovaných, jak ještě zdůrazníme u systému tracheálního v oku. Jednotlivé zrakové buňky jsou sestaveny přibližně do kruhu, resp. do šestiúhelníku, jak také ani není jinak možno, uvážíme-li těsné sousedství jednotlivých ommatidií (blíže o tom bude pojednáno při počtu zrakových elementů).

Mnohem zajímavější než-li assymetrie rhabdomerů je rozdělení facettového oka na dvě poloviny, dorsální a ventrální, v nichž ommatidia jsou k sobě orientována jako předmět ke svému zrcadlovému obrazu. Tuto konstantní polohu sedmého rhabdomeru mohu potvrditi i u r. *Sapromyza,* ale nalezl jsem ji jen v distální části ommatidií, kdežto v proximální třetině svíraly »význačné rhabdomery« sousedních ommatidií úhel 90°, aniž by zachovávaly rozdělení oka na dvě poloviny (obr. 26.). Zdá se tedy, že ani v poloze tohoto rhabdomeru není stálosti, je pravděpodobně resultátem organogenetických pochodů (viz dále).

Dietrich na základě zvláštní polohy sedmého rhabdomeru v oku *Dipter* polemisuje s názorem Rádlovým o morfologické hodnotě dvojitých očí, to je očí buď úplně nebo jen částečně rozdělených ve dvě polovice, horní a dolní. Rádl klade si otázku: co je původnější, jednoduché oko či dvojité? — Je zajímavo, že již Patten (1887) dospěl na základě studia očí *Acilia* k názoru, že dvojité oči složené nevznikly rozdělením původního, homogenního oka, nýbrž užším spojením dvou původně od sebe oddělených částí. Poněvadž však podkladem pro tento názor byla mu nesprávná fakta, vzdal se jej později. Teprve Rádl (1901) navazuje na myšlenku Pettenovu, resp. dochází k podobnému závěru na podkladě celé řady zjevů bohatě v jeho práci snesených, i na základě vlastních pozorování. Zdůrazňuje, že příčiny dvojitosti očí jsou čistě povahy morfologické, stavě se tak proti fysiologickému výkladu Chunově, Zimmerově atd. Chun vidí v dvojitosti očí jen přizpůsobení zvláštním podmínkám. Nalezl je totiž u hlubinných korýšů volně plujících a to ho vedlo k výkladu, že tyto oči jsou jen zvláštním účelným zařízením, aby v šeru, které v hloubce panuje, nalezli svou kořist. Ovšem tím, že i denní hmyz má podobné zařízení, stává se názor Chunův pochybným.

Dle Rádla složené oko vzniká ze dvou základů. Ty během fylogenetického vývoje buď úplně splynuly aniž zachovala se hranice, nebo jeden ze základů byl redukován, takže v obojím případě resultuje oko jediné, ovšem různého morfologického významu. Později doplnil svoji theorii tak, že předpokládá trojí základ očí. Pro tuto theorii nalézá Zavřel (1907, 1916) další potvrzení u celé řady larev a pup *Dipter,* u nichž během vývoje objevují se buď dva nebo tři základy očí se samostatnou inervací.

Dietrich se rozhodně staví proti tomuto výkladu a ukazuje, že základy očí larev nesúčastní se tvoření očí imaga ani tam, kde facettové oko zůstává jednoduché (*Tipulidae, Culicidae, Chironomidae*), ani tam, kde diferencuje se v útvar dvojitý (*Stratiomyidae, Tabanidae, Bibionidae*...). Kdyby byl názor Rádlův správný, museli bychom předpo-

kládati, že samičky, jichž samečkové mají dvojité oči, musely by míti o jeden rudimenterní základ oka více než samečkové, čemuž ale tak není. Mimo to sameček r. *Simulium* mimo rozdělené oko má ještě dva rudimenty, takže bychom museli konsekventně předpokládati 4 základy. Dle Dietricha dvojitost oka má základ v morfologické skladbě jednoduchého facettového oka, které je stavěno ze dvou polovin jsoucích ve vztahu předmětu a jeho zrcadlového obrazu. Poněvadž, jak výslovně praví, je jakékoliv vysvětlení dvojitých očí z motivů čistě biologických nemožné, ale na druhé straně »die Differenzierung der Augen immer in Anpassung an der Lebensweise vor sich geht« (na př. snadnější vypátrání kořisti nebo samičky), spočívá dvojitost očí na dvou příčinách, na morfologické a biologické, která vyvolává resp. sesiluje dvojitost již morfologicky danou.

Názor Dietrichův je ovšem velmi pravděpodobným, ale platí snad jen pro *Diptery*, ač ani u nich všude nebyly zjištěny podobné poměry (Zavřel na př. u *Tendipedid*); ani vývoj oka dvojitého u jiných skupin nepřispívá k sevšeobecňování názoru Dietrichova, neboť u larvy *Cloë* (Carrière 1886) jest jen dolení oko vyvinuto a teprve ke konci larválního stadia počnou se na jeho horní straně prodlužovati hypodermální buňky, z nichž vznikne základ horního oka. I u *Libellulid* děje se něco podobného (Rádl 1901). Hoření oko *Libellulid* a *Ephemer* vyvíjí se tedy později než dolní a sice ke konci larválního stadia (jinde po př. se odehrává opačný vývoj). Dvojitost očí má hlubší kořeny, neboť u některých forem zasahuje i ganglia optická. U *Microchrysa polita* ♂, *Dilophus vulgaris* ♂, *Chrysophilus auratus, Bicellaria spuria* a j. pod každým rozděleným okem je samostatné první ganglion. Podobně i u r. *Gyrinus* (Carrière) první oční ganglion je rozděleno, druhé ganglion je sice párové, ale obě části splývají. Dle Rádla u *Musca* je druhá oční zauzlina spojena s prvními dvěmi svazky nervovými. Oba tyto svazky v horizontální rovině se kříží, v příčné ale jsou odděleny širokými tracheemi. Dle Johansena (citováno z Rádla) vznikají u *Vanessa* dva nervy zrakové, dorsální a ventrální. Poněvadž je zde jakási samostatnost inervace jednotlivých částí (příkladů nalezlo by se více) a je známo, že inervace je důležitým kriteriem pro posouzení původu, po př. příslušnosti, nějakého orgánu, vyplývá tedy z toho, i z dříve řečeného, že ani v otázce dvojitosti očí není vysloveno poslední slovo, tím spíše, že u *Arthropodu* najdeme spíše tendenci k splývání původně samostatných očí než naopak. Zejména u *Dipter* (Zavřel 1916) možno konstatovati takovou snahu na očích larválních i na frontálním orgánu. Něco podobného platí i o temeném oku u *Vespa*, které vzniká ze dvou z počátku oddělených jamek a v době dospělosti má dvě ganglia a dvojitý nerv (Zavřel 1902).

Je zajímavo, že Z a v ř e l poznamenává, zda by se stavba složeného oka ze dvou zrcadelně stejných polovin nedala pochopiti fysiologicky i tehdy, kdy krom zvláštní polohy sedmého rhabdomeru oko představuje orgán jednoduchý; nezdá se mu totiž nemožným předpoklad, že následkem tohoto ustrojení máme zde jakési stereoskopické zření jediným takovým okem. Pak by dle něj i chiasma nervů z jediného oka vycházejících mohla míti analogický význam fysiologický jako chiasma očních nervů u obratlovců. Ovšem je otázka (nehledě k jiným námitkám) co s druhým chiasmatem? Pak pro stereoskopické vidění jedním okem padaly by na váhu jen ommatidia těsně u hranice mezi oběmi polovinami, neboť divergence vzdálenějších je tak značná, že zorná pole nemohou se krýti. A pak i u ommatidií ležících těsně u rozhraní obou polovin možno těžko mluviti o stereoskopickém vidění, když vlastně týž předmět pozorují z jednoho místa. Neboť k stereoskopii jsou vhodné konvergentní osy optické, jaké mají u některých hmyzů na př. frontalní ommatidia levého a pravého oka složeného, ne však jejich divergence.

Shrneme-li naše úvahy, můžeme říci, že p o k l á d á m e-l i n á z o r D i e t r i c h ů v z a s p r á v n ý p r o *Diptery*, n e m ů ž e m e j e j t a k b e z e v š e h o a p l i k o v a t i i n a o s t a t n í h m y z, p r o n ě j ž n a m n o z e v y s v ě t l e n í R á d l o v o a Z a v ř e l o v o n e n í b e z u r č i t é o p r á v n ě n o s t i. (K věci se ještě vrátíme o něco níže.)

Příčné řezy ommatidiem objasní nám rozložení jednotlivých zrakových buněk. Směrodatnými jsou pro nás řezy vedené v rovinách *c* a *d* (obr. 13.). Především zdůrazňujeme znovu, že neexistuje assymetrie v rozložení rhabdomeru jak vykládá D i e t r i c h na svém textovém obrázku a že ani v poloze sedmého, význačného rhabdomeru není takové pravidelnosti, jak týž autor tvrdí (obr. 26.), takže dedukce jeho musíme i v tomto ohledu bráti s reservou. Řezem v rovině *c* (obr. 17.) zastihneme 7 zrakových buněk, z nichž 6 jest sestaveno do kruhu (přihlížíme-li k rhabdomerům); sedmá buňka zraková je jaksi stísněna, její rhabdomer vystupuje z kruhu ostatních a zaujímá z v l á š t n í p o s t a v e n í. Kdežto normálně ležící buňky mají příslušné jádro, schází toto význačnému rhabdomeru (v rovině *c*). Na řezu vedeném těsně pod skupinou šesti jader narazíme však na příslušné jádro sedmé zrakové buňky (obr. 24., 25.). Nemůžeme se proto ubrániti dojmu, že zvláštní poloha sedmé buňky je vyvolána čistě mechanicky z nedostatku místa a proto i jádro její je jaksi vytlačeno z kruhu ostatních šesti do nižší polohy.

Když sledujeme příčné řezy na serii dále, nezjistíme celkem nic zajímavého, jen že kanál retinulární se rozšiřuje a pak zas zvolna zužuje, jak je patrno na podélném řezu ommatidiem (obr. 13.). Interes náš bude vzbuzen až řezem *d* (obr. 18.), vedeným asi na rozhraní druhé a třetí

třetiny (proximálně). Zde zastihneme opět jádro, tedy již jádro osmé, takže vidíme, že i v našem případě retinula jest tvořena osmi zrakovými buňkami. I zde tedy byla původně založena dle čísla 8, jak vůbec nejčastěji přichází (srovnej na př. jen práci Dietrichovu, kde u všech jím zkoumaných *Dipter* zjistil obdobné poměry). Všimněme si však vztahu jádra k zrakovým buňkám. Kdežto Dietrich ve všech případech, kdy nalezl osmé jádro, zjistil, že toto bylo obyčejně menší a ať nalézalo se nad skupinou šesti jader (*Dilophus vulgaris*), nebo v části proximální (*Laphria flava*), vždy bylo to jádro buňky redukované, ke které nepatřil žádný rhabdomer. Jádro toto, resp. tato osmá buňka, vsouvala se mezi 1. a 2. buňku smyslovou (viz schema Dietrichovo). V našem případě však narážíme na zajímavou okolnost, tu totiž, že osmé jádro náleží buňce, která je opatřena rhabdomerem, který k tomu ještě zaujímá zvláštní postavení, neboť vystupuje z kruhu šesti ostatních rhabdomerů a leží blíže středu rhabdomového kanálu (obr. 18., 26.). Tedy v našem případě i osmé jádro, resp. buňka smyslová opatřena je rhabdomerem. Ale jak na řezu rovinou *d* je viděti (obr. 18.), i zde je celkem jen sedm rhabdomerů. Jest tu tedy jakási záhada, máme zde totiž 7 rhabdomerů ale 8 jader, z nichž každému odpovídá zraková buňka opatřená rhabdomerem, kromě toho sedmé význačné buňce zrakové náležejí 2 jádra. Vysvětlení tohoto zjevu není tak nesnadné, ovšem jen theoreticky, neboť velmi těžko můžeme na praeparátu sledovati řez za řezem týmž ommatidiem, nemáme skoro vodítka, abychom poznali, že jedná se o jedno a totéž ommatidium. Již dříve jsme zdůraznili, že je zde místo jen pro šest smyslových buněk, proto pravděpodobně sedmá buňka je jaksi stlačena a jádro její sestupuje pod šest ostatních. Buňka konečně úplně vykliňuje, aniž by došla až k proximálnímu konci oka a na její místo nastupuje buňka osmá, kterou stihne částečně podobný osud, je zas ostatními stísněna, takže rhabdomer zaujímá opět význačné postavení. Proto zdánlivě buňka sedmá má dvě jádra. Nedovedu však pověděti, zda osmá buňka zraková přímo pokračuje v poloze buňky sedmé, zda tedy běží význačný rhabdomer (složený tedy dvěmi b.) kontinuitně od distálního konce až k proximálnímu, či vsouvá se mezi buňku 1 a 2 (Dietrich), takže by význačné rhabdomery téhož ommatidia (sedmý a osmý) promítnuty do jedné roviny svíraly přibližně úhel 90°. Poměry nalezené v proximální části oka (obr. 26.) by spíše svědčily pro názor druhý, resp. pro neustálenost polohy rhabdomeru osmé buňky zrakové.

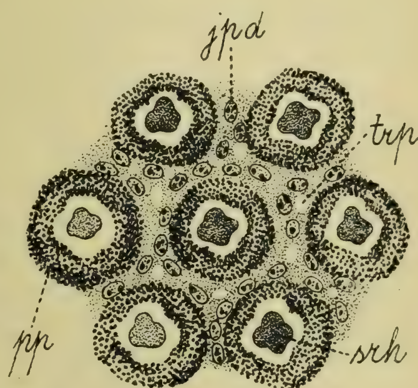
Neméně zajímavý jest v našem případě i proximální konec ommatidia. U normálního oka všech sedm rhabdomerů nasedá v pravém slova smyslu na basi trojúhelníčku (resp. kužele) rovnoramenného, který vrcho-

lem míří k basální membráně a je vyplněn pigmentem (obr. 13.). Z vrcholu jeho pak vybíhá svazek nervových vláken, který proráží membránu a zřetelně se dá sledovati i v gangliích optických (obr. 28.). Tedy nalezáme zde poměry poněkud jiné, než jaké Dietrich popisuje u celé řady *Dipter*, neboť kreslí dolní pigment po stranách ommatidií těsně na membrana fenestrata, takže rhabdom dotýká se přímo blanky. Nikdy se mi nepodařilo najíti nějaké jádro, které by příslušelo k této rozšířenině, takže nemyslím, že bychom mohli pokládati tento trojúhelníkový útvar za samostatnou buňku. Zvláště oči jednoho individua *S. praeusta* byly vhodné k studiu, neboť pigment byl spoře vyvinut a dolní (retinální) chyběl úplně. Ani v tomto případě nebylo jádro zjištěno (obr. 28.). Je otázka, jak máme tomu rozuměti. U Hesseho (1901) čteme při popisu oka *Dytiscus marginalis*: »An der Basis jeder Retinula hört das Rhabdom eine Strecke weit auf; die an die Retinazellen ansetzenden Nervenfasern weichen auseinander, und in dem so geschaffenen Raum liegt axial eine Zelle mit grossen Kern — die Basalzelle — die sich proximal in eine Nervenfaser auszieht, distal aber einen stark färbaren Aufsatz trägt, der besonders da, wo er der Zelle aufsitzt, eine Längsstreifung erkennen lässt; an Querschnitten erscheint dieser Aufsatz zweiteilig — ich kann aber keine Erklärung für diese Teilung geben.« Kirchhoffer, který též studoval oči potápníka, nalezl, že basální rhabdomer je v úzkém styku s rhabdomerem ostatních šesti buněk. Mezi oběmi však na řezech zjistil jasnější mezeru, takže spojení jest vlastně jen zdánlivé. Basální rhabdomer je úplně uzavřen basální buňkou. Názor Güntherův (1912) se podstatně neliší od vysvětlení Kirchhofferova, jen neuznává rozdělení obou částí; dle něj jest rhabdom produktem všech sedmi zrakových buněk (basální buňky a šesti radiárních) a představuje jednotný útvar. Pigment (kromě irispigmentu) leží zvlášť nahromaděn v blízkosti basální buňky.

Srovnáme-li tyto poměry s dříve popsaným stavem u rodu *Sapromyza*, je velice pravděpodobno, že i zde nalézáme něco podobného, že totiž osmá buňka v dolejší části své rozšiřuje se v trojúhelníkový útvar. I to souhlasí, že rhabdomer této zvláštní buňky zúčastní se na tvorbě retinuly, která u *Dytisca* ovšem má podobu čtyřhranného sloupku, u *Sapromyz* však tvořena jest sedmi rhabdomery samostatnými. Jedině v tom nalezáme rozdíl, že jádro neleží v dolní rozšířené části osmé buňky, nýbrž nahoře, ale to bychom mohli vysvětliti tím, že i zde je poměrně dosti místa, kdežto u *Dytisca* je již sedmá zraková buňka úplně vytlačena z kruhu ostatních šesti, takže neúčastní se ani na tvorbě rhabdomu (viz Günterův obr. 32.). To, že v našem případě je pigment uložen v basální části, není tak překvapující, neboť stává se často, že samotné buňky zrakové vytvořují si pigment. I u *Lepidopter* (Johnas 1911) nedosahuje

rhabdom až k basální membráně, nýbrž vzniká dole dutina, do které může vnikati pigment, uložený pod membránou. Tím reguluje se intensita podráždění, při prudkém osvětlení vniká totiž pigment do dutiny a pohlcuje paprsky, při slabém světle však sestupuje pod membránu, takže paprsky prostoupivší rhabdomem se odrážejí zpět a znovu dráždí percepční elementy. Snad byl by možný i v našem případě podobný výklad, tím spíše, že *Sapromyzy* zdržují se často na okraji lesa, kde intensita světelná se velmi náhle mění a proto pro ně byla by výhodnou takováto regulace. Poněvadž však jsem dosud nezjistil přítomnost pigmentu pod membránou, ani jsem nedělal přímých experimentů, nechávám prozatím otázku tu nerozřešenou.

Na konec promluvíme ještě o světelné isolaci jednotlivých ommatidií. *Sapromyzy* mají oči oposiční s dokonalou isolací po celé délce jednotlivých oček. Jak již dříve jsme se zmínili, jest pseudoconus obalen dvěmi pigmentovými buňkami prvého řádu. V rovině buněk krystalových přikládají se k nim pigmentové buňky druhého řádu (Nebenpigmentzellen). Co se jejich počtu týče, zdá se, že jsou zde poměry jako u *Syrphidů,* neboť napočetl jsem kolem jednoho ommatidia 12 jader (obr. 2., 16.), jichž příslušnost k jednotlivým ommatidiím není patrna. Na počtu jejich ovšem tak mnoho nezáleží, mají čistě za úkol isolovati a zároveň vyplňovati prostory mezi jednotlivými elementy. Isolace mezi jednotlivými očky v proximálnější části je poměrně slabá, není jí ani tak zapotřebí, za to je dobře vyvinut retinální pigment, který pohlcuje paprsky prostoupivší retinulou.



Obr. 2.

Zmíníme se ještě krátce o tracheální soustavě ve vlastním oku mezi jednotlivými ommatidiy. Pod basální membránou nalézáme normální větve tracheální se spirálním vláknem; jemné větvičky vstupují těsně až pod samotnou membránu (obr. 28.), nepodařilo se mi však nikdy zjistiti nezvratně jejich prostup do vlastního oka. Jsem však přesvědčen, že tracheální prostory i u *Sapromyz* se rozprostírají mezi ommatidia, ztrácejíce ovšem stužné vlákénko, neboť na příčných řezích jsem pozoroval mezi zrakovými buňkami sousedních ommatidií jakési štěrbiny bez patrné kontury (obr. 2., 16.); naprosto ale popírám, třebas jsem pracoval na jiném materiálu než D i e t r i c h, že by zde tracheální prostory byly rozloženy v takovém rozsahu, jak uvádí tento autor (srovnej na př. jeho obr.

5, 14, 16, 17, 18, 41, 46, 53). Vždyť již čistě z poměrů prostorových je to nemožno, neboť jeho trachee jsou skoro širší nežli samotná ommatidia (na př. řezech). Poněvadž ale šířka ommatidia rovná se přibližně asi rozměrům facetty (i na zmíněných obr. Dietrichových) a ta, jak víme, jest šestiúhelníková a těsně se řadí k facettám sousedním, — kde mohlo by se najíti dosti místa pro jeho trachee? Krátce mám dojem, že pracoval s materiálem nedobře fixovaným, takže struktury jsou zachovány nedokonale. Vede mne k tomu i to, že na vlastních praeparátech, když jsem zkoušel různé methody a praeparáty byly vadné, nalezl jsem úplně stejné poměry jako vidíme na některých obrázcích Dietrichových (na př. 18.). Pro srovnání zhotovil jsem dvě mikrofotografie jednak z praeparátu dobrého, jednak ze špatného, kdy řez je veden týmž asi místem a u téhož druhu (obr. 25., 27.).

Počet zrakových buněk: Srovnáváme-li počet smyslových buněk ommatidia v ruzných skupinách *Arthropodu,* překvapí nás to, že nejčastěji se vyskytuje číslo 8. Jenom namátkou z práce Hesse-ho vybírám některé příklady: Zcela pravidelně nalézáme číslo 8 u *Hymenopter* a r. *Cicada.* Podobně i u r. *Apus,* kdež některé buňky jsou částečně redukovány. Totéž nalézáme i u r. *Dytiscus, Phryganea, Ascalaphus.* I pravidelně čtyřhranný rhabdom *Decapodu* poukazuje na původní číslo 8. Toto pravidlo potvrzují i práce Kirchhofferovy na pentamerních broucích, podobný stav zjištěn dále i u *Dipter*, kde byla nalezena též osmá buňka, třebas silně degenerovaná. Jest zcela přirozeno, že pro tento stálý počet hledalo se nějaké vysvětlení více méně pravděpodobné. Tak již Weismann (1895) vykládal mnohobuněčnost retinuly jako příčinu veliké ostrosti zrakové. Dle něj jest tato bystrost tak veliká, že hmyzi dovedou rozpoznat známé okolí na dálku jednoho kilometru. Ovšem pro tento výklad nehodila se mu Müllerova theorie musivického vidění, dle níž rhabdom funguje jako celek a proto předpokládal, že v očku netvoří se jediný bod přímého obrazu, nýbrž bodů více podle počtu rhabdomerů, čímž se ostrost zraková zmnohonásobňuje (Vigier r. 1907 též tvrdí, že v oku se tvoří 7 obrázků). Ovšem pokusy ukázaly, že o takové bystrosti u hmyzu není ani památky, nýbrž že sféra vidění je velmi malá, průměrně asi 1·5 *m* od oka. I Hesse (1908) klade otázku, proč rhabdom skládá se z několika zrakových buněk, když vlastně k přijmutí jediného podráždění stačila by jediná. Vidí tu tři příčiny: předně historickou, neboť facettové oko vzniklo z ocellu, v němž je počet buněk větší, dále větším počtem buněk je podráždění sesilováno a konečně jest možno, že zrakové buňky nejsou stejnocenny, nýbrž zařízeny na různou délku světelných vln. — Názor Hesseho, hlavně jeho třetí bod, přejímá i Dietrich, který hlavně zdůrazňuje assymetrickou polohu rhabdo-

merů, takže každá buňka je zcela určitě orientována k sousedním a není tudíž nemyslitelna i různost fysiologická, dále každá buňka zraková má vlastní nerv, který až do zevního ganglia možno sledovati. Z toho vyvozuje, že »morphologisch erweist sich also jede Retinulazelle nach ihrer Orientierung, wie in bezug auf den ihr entsprechenden Nerv als ein Individuum«. Při tomto pojetí (dle Dietricha) dala by se pak dobře vysvětliti redukce smyslových buněk, neboť neznamenalo by to seslabení receptoru, nýbrž jen vypadnutí specificky působícího rhabdomeru. Při názoru o jednotě rhabdomu je prý nepochopitelno, proč vlastně dochází k redukci, když tím se stav vlastně zhoršuje, ač by se měl vývojem zdokonalovat. Poněvadž je dále dokázáno, že někteří hmyzi vidí skutečně barvu, uvažuje dále Dietrich, »so liegt wohl kaum ein anderer Schluss näher als der, dass jedes Rhabdomer für Aetherwellen von bestimmter Länge sich specialisiert hat«. Bylo by prý naivní domnívati se, ježto my vidíme 7 barev, že i hmyz rozeznává tolikery barvy a proto jeví se u něj snaha redukovati počet rhabdomerů na sedm, ale a priori nedá se to vylučovat, neboť hmyz žije za týchž podmínek jako my »und es ist schwer vorzustellen, dass gleiche äussere Bedingungen verschiedene Potenzen ausgelöst haben sollten«. Poněvadž také Loeb a Bechterew tvrdí, že nervy jsou jen drahami lepší vodivosti a že nemají kvalitativního vlivu na vedení podráždění, musí tedy také i zde již v samotných rhabdomerech nastati diferenciace pochodů fysiologických, neboť by jinak bylo nepochopitelno, proč dochází k redukci elementů retinuly.

Myslím, že vysvětlení, které podává Dietrich, je příliš spekulativní a pak ani s jeho logikou nemůžeme souhlasiti. Přec nemůžeme dělati nějaké závěry jen z toho, že hmyz i člověk žijí za týchž podmínek, tím přece nedokážeme, že musí stejně viděti nebo aspoň rozeznávati tytéž barvy. Nechci dělati drastických poznámek a raději uvedu některé věcné. Jsou-li rhabdomery specialisovány na barvy, proč na př. u *Dytiscus marginalis* splývají v jediný čtverhranný sloupek, u r. *Panorpa* v jediný útvar kruhovitého obrysu, proč u *Lepidopter* tvoří rhabdom rourku, proč u celé řady *Crustacei* je retinula složena z terčků nad sebou uložených, proč u hmyzu, žijícího v šeru (mravenci, královna včelí), spíše zakrňují celé oči, než aby se zredukovala retinula a vyvinul se jen rhabdomer specifikovaný na příslušné paprsky, když vlastně různobarevné paprsky do oka nevnikají, takže při předpokládané specialisaci rhabdomerů jsou některé zbytečny, proč i hmyz, u něhož je dokázáno, že nerozeznává barev, má více rhabdomerů, proč totéž nalézáme i u hlubomořských raků, kteří přec žijí v šeru? Tak bychom mohli položiti ještě celou řadu otázek, na něž by bylo asi těžko odpověděti ve smyslu výkladů Dietrichových.

Dle mého mínění má celá věc čistě mechanickou příčinu. Přijmeme výklad H e s s e-h o, že mnohobuněčnost retinuly je podmíněna historicky, tu následkem těsného postavení ommatidií muselo dojíti k určité redukci, k volbě takového čísla, které by daným poměrům nejlépe vyhovovalo. Víme z geometrie, že jen dvěma obrazci můžeme úplně zastaviti plochu, ať již rovnou, či křivou a to čtvercem a šestiúhelníkem (necháme-li stranou trojúhelník rovnostranný, který ostaně je již obsažen v 6úhelníku, nebo tvary nepravidelné). Proto tvar facett je šestiúhelníkový (nejčastěji), nebo čtverečný *(Musca domestica)*, vzácně pak nepravidelný *(Silpha litoralis)*; někdy nalezneme kombinace různých typů v jednom a témž oku. Do tohoto počtu 6 snadno zařadíme číslo *2* (pigmentové buňky prvého řádu), rovněž i 4 (krystalové buňky), obtížněji však již číslo 8, a proto vidíme zde tendenci k redukci zrakových buněk. Proto na př. osmá buňka u většiny *Dipter* je skoro úplně redukována a jádro sedmé b. vytlačeno z kruhu šesti ostatních a celá buňka vsunuta jaksi do středu rhabdomového kanálu, což jde někde tak daleko, že rhabdomer sedmý je úplně odříznut a nalézá se isolovaně uprostřed rhabdomu; podobně i u *Dytiscus marginalis* je osmá buňka vtlačena až na basi ommatidia, sedmá pak úplně vyřazena z kruhu ostatních buněk, takže netvoří ani rhabdomer. I z jiných skupin mohli bychom uvésti řadu příkladů. Jest sice pravda, že u *Hymenopter* nalézáme všech osm buněk, ale tím ještě se nevyvrací náš názor, rovněž ani ne tím, že u některých Arthropodů jest počet zrakových buněk zvětšen, neboť tento stav je druhotně způsobený nějakými vlivy, které zde blíže nebudeme analysovati, neboť zmnožení elementů zrakových je celkem výjimkou.

Není nepravděpodobno, že i zvláštní poloha sedmého rhabdomeru v oku *Dipter*, resp. rozdělení oka na dvě zrcadelné poloviny, mohlo by se vykládati čistě mechanicky. Je přirozeno, že je velmi výhodno, má-li nastati dokonalé směstnání ommatidií sedmibuněčných, aby sedmá buňka byla jaksi vtlačena mezi ostatní a docílen tak obrys šestiúhelníkový (obr. 17.) a aby zároveň byla to vždy buňka určitá, stejně u všech ommatidií položená vzhledem k ostatním buňkám; proto také nalézáme jednosměrné vysunutí sedmého rhabdomeru (máme-li na mysli jen horní, nebo dolní polovinu oka). Jest nyní ovšem otázka, jak se mohla vytvořiti uprostřed oka horizontální hranice, kde význačné rhabdomery jsou orientovány k sobě o 180° otočeny. Příčný řez okem je skoro pravidelný (srovnej s assymetrickým horizontálním řezem, obr. 23.), nejkrajnější ommatidia (horní a dolní) stojí k povrchu poněkud šikmo (schema 23.); představme si nyní jedno ommatidium, třebas z dorsálního kraje, ve formě trojúhelníku, tu následkem šikmého postavení roviny corneální vzhledem k ose ommatidia (obr. 22.) byl jaksi vykonáván tlak na stranu *a*, a proto

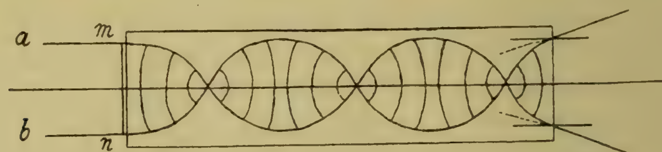
zde vsunula se sedmá buňka dovnitř. Na straně ventrální stihl tento proces stranu *b*; tedy na krajích (horním a dolním) byl dán popud, zde jaksi buňka byla vybrána a nyní ostatní srovnaly se dle nich, takže uprostřed oka utvořila se horizontální hranice obou sfér. Že se tak nestalo ve směru kolmém, spočívá asi v tom, že křivost oka ve směru horizontálním jest daleko menší, krajní ommatidia sice i zde jsou silně skloněna k povrchu facett, někdy více než ve směru vertikálním, ale obrys oka tvoří obrazec vertikálně protáhlý, který se již jaksi sám sebou podává rozdělení ve směru horizontálním. Jsem si přirozeně vědom nedostatečnosti tohoto výkladu, vím, že je možna celá řada námitek proti danému vysvětlení, ale snad myšlenka ta bude někomu popudem k najití pravděpodobnější, po případě jisté příčiny těchto zjevů.

Fysiologie facettových očí Dipter.

Na základě morfologických detailů v předcházejících kapitolách projednaných vykládám fysiologii oka *Dipter* poněkud odchylně od dnes běžných názorů, založených na epochálním výkladu Exnerově (1891), neztotožňuji se však ani s výkladem Vigierovým (1907), jehož práce, opravdu hodná zřetele, nedošla skoro povšimnutí; Dietrich ji vůbec nezná, Demoll i Plate jen třemi či čtyřmi řádky se o ní zmiňují. Není možno ovšem pojednati o těchto věcech, aniž bychom se nezmínili stručně o několika autorech, kteří svými názory se stali směrodatnými pro další badání na tomto poli. Je to především Joh. Müller (1826), jehož theorie »musivického vidění« složeného oka stala se základním kamenem výkladů o mechanismu vidění u členovců, které vyvrcholily klasickým dílem Exnerovým. Müller předpokládá, že zrakové pocity u všech zvířat jsou podobné jako u člověka, že tedy hlavní podstatou vidění je rozeznávání předmětů v prostoru. Dle něj v oku facettovém vzniká jediný, přímý obraz předmětu, konstruovaný všemi ommatidiy; každé omma zobrazí než část pozorovaného předmětu v podobě bodu, takže výslednicí je obraz složený z tolika bodů, kolik zúčastní se ommatidií (mosaikové vidění). Proti Müllerovi tvrdil Gottsche (1852) pravý opak, že totiž v každém ommatidiu tvoří se samostatný převrácený obrázek. Poněvadž pak proti jeho důkazu bylo obtížno co namítati, neboť ukazoval takový obrázek přímo pod mikroskopem, vzdal se i sám Müller svého názoru. Později se ovšem ukázalo, že závěry Gottsche-ovy jsou chybné, neboť při praeparaci nevědomky poškodil lomný kužel, takže vlastně pozoroval obrázky vytvořené pouze corneou. Byl zde tedy vyřazen vliv krystalového kužele, který právě převrací obrácený obrázek vržený corneou a působí, že oko facettové funguje nezávisle na vzdálenosti předmětu i na poloze obrazové roviny,

ač vlastně není schopno akkomodace v běžném slova smyslu. Poměry tyto vysvětlil E x n e r v důkladném pojednání z r. 1891 a můžeme s klidným svědomím říci, že od té doby naše vědomosti o složeném oku, resp. jeho funkci, mnoho nepostoupily a bylo-li něco napsáno, znamená to většinou potvrzení pozorování E x n e r o v ý c h. Zmíním se jedině o práci V i g i e r o v ě, ať již je správná či nikoli, neboť proráží jaksi sféru E x n e r o v ý c h výkladů, osvobozuje se od dosud platných názorů a vychází od morfologických detailů, pro něž hledá fysiologické vysvětlení a ne naopak, jak velmi často se děje, kdy na daný výklad hledí se aplikovati každý nový objev.

E x n e r staví na theorii M ü l l e r o v ě o musivistickém vidění. Hlavní úloha tu připadá krystalovému kuželi (Kristallkegel, conus), neboť činností



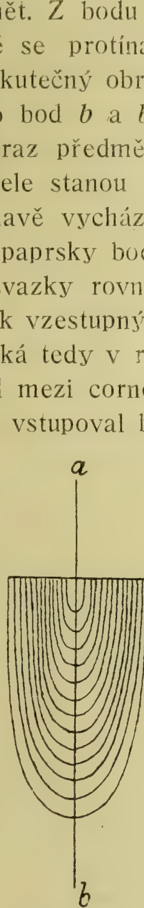
Obr. 3.

jeho vzniká přímý obraz. Conus není útvarem homogenním, nýbrž skládá se z vrstev anisotropních různé optické hustoty. K vůli jednoduchosti představme si válec ohraničený nahoře i dole plochami rovnými a složený z celé řady válců do sebe zasunutých (obr. 20.). Největší index lomu mají vrstvy kol optické osy, čím blíže k plášti, tím více se zmenšuje mohutnost optická. Prochází-li tedy světelný paprsek šikmo válcem, prostupuje vrstvami různé optické síly, různě se tedy láme, po případě totálně odráží, probíhá tedy určitou křivku, čímž právě je způsobeno vzpřímení (obrácení) obrázku. Pro lepší názor stůjž zde schema takového válce (obr. 20.). Z bodu *A* vycházejí paprsky *x* a *y* a poněvadž vnikají do prostředí hustšího, lámou se ke kolmici. Při svém průběhu válcem postupují však z prostředí hustšího do řidčího, lámou se tedy od kolmic až nastane v některé zoně totální reflex. Nyní postup paprsků je obrácený a proto lámou se ke kolmici. V našem případě volili jsme málo vrstev, proto křivka je hranatá, při větším počtu obdrželi bychom čáru kontinuitní. Vzájemný vztah vystupujících paprsků záleží ovšem na délce válce, je-li týž přiměřeně dlouhý, může jím postupovat paprsek úplně vlnitě (obr. 3.). Tím, že conus de facto nekončí plochami rovnými, nýbrž na jedné straně leží cornea, proximální konec jeho pak je zaokrouhlen nebo zašpičatěn, sesiluje se značně jeho optická mohutnost. Podobných výsledků jako vrstevnatostí conu o podélné ose docílíme též

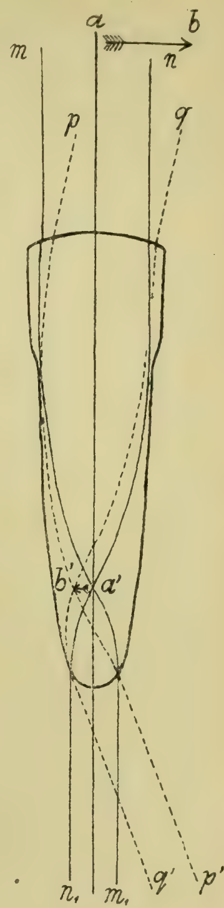
kombinováním tohoto způsobu s etageovými čočkami Mathiessenovými (obr. 4.).

Jak vlastně tvoří se obrázek v ommatidiu, ukazuje obr. 5. Cornea i conus jsou zde kresleny jako jediný útvar, neboť opticky funkce jejich se summuje.

Šipka *ab* značí vzdálený předmět. Z bodu *a* vychází rovnoběžné paprsky, které se protínají v conu v bodě *a′*, kde tedy vzniká skutečný obrácený obraz bodu *a*. Totéž platí pro bod *b* a *b′*; tedy *a′b′* je skutečný obrácený obraz předmětu *ab*. Vlivem další části lomného kužele stanou se paprsky, původně z bodu *a′* rozbíhavě vycházející, rovnoběžnými, totéž postihne i paprsky bodu *b′*, takže z kužele vycházejí dva svazky rovnoběžných paprsků, uložené vzhledem k vzestupným paprskům *ab* zcela symetricky. Vzniká tedy v retinule obrázek přímý. Kdyby nebyl mezi corneu a rhabdom vsunut krystalový kužel, vstupoval by do kanálu rhabdomového silně rozbíhavý kužel paprsků, čímž by se ztížilo vedení světla. Tím pak, že paprsky zobrazující bod jsou rovnoběžné, usnadňuje se jednak postup paprsků, jednak můžeme zachytiti obrázek kdekoli, nejsme tudíž vázáni na jedinou stabilní rovinu obrazovou (bližší v práci Exnerově, po případě Demollově 1917). Tento přímý obraz realisuje se v retinule dvojím způsobem: 1. Apposicí, kdy jednotlivé obrázky, vytvořené dioptrickými aparáty ommatidií a zachycené retinulami kladou se vedle sebe, tvoříce tak mosaikový obraz celkový, 2. superposicí, při níž jednotlivé obrázky částečně se kladou na sebe a skládají tak jediný obraz; proto obraz tímto druhým způsobem vytvořený je mnohem světlejší. Vidění takové přichází v úvahu za šera a vyžaduje zvláštní úpravy oka (viz Demoll, Hesse).



Obr. 4.



Obr. 5.

Z předchozího tedy vyplývá, že lomný kužel je aparátem sui generis, velmi komplikovaným a důležitým. Nerozřešeno však zůstává,

jakým způsobem vidí aconí oči, a k jakým modifikacím dochází u pseudoconích očí *Dipter*. Je nesporno, že pseudoconus nemůže míti tentýž význam jako krystalový kužel, že na základě své konstituce nemůže tak zasahovat do funkce facetty. Základní vlastností conu je vrstevnatost, nestejná optická hustota, která však nemůže najíti vyjádření v hmotě tekuté nebo polotekuté, jakou představuje pseudoconus. Není možno, aby se v něm trvale zachovaly vrstvy různé optické síly, které by vzpřimovaly obrácený obraz, vytvořený corneou. Pseudoconus můžeme jedině pokládati za hmotu s optickou mohutností větší než vzduch, s menším však lomem než cornea; snad je možno srovnávati jej se sklivcem oka obratlovčího. Poněvadž optická síla pseudoconu je větší než vzduchu, prodlužuje ohniskovou délku facetty. Má to význam ten, že kužel paprsků, který by jinak vstupoval do rhabdomu příliš divergentní, zužuje se vlivem pseudoconu. Aby byly lépe vystiženy dioptrické vlastnosti celého aparátu, bylo zhotoveno schema *21*. Kamerou byla vykreslena čočka i buňky krystalové, za základ pak vzat index lomu $n = 1{\cdot}55$, jak jej vypočítal Exner (puvodně udával číslo 1·8) a vyrýsován průběh paprsků, dopadajících rovnoběžně na facettu. Tak nalezeno bylo ohnisko F_1, bod, v němž by se protaly paprsky x, y, kdyby nebylo pseudoconu. Kužel paprsků, vycházejících z F_1, dopadl by na krystalové buňky značně rozbíhavě a jelikož iris, to je průhledné místo pod krystalovými buňkami, ohraničené pigmentovými elementy prvého řádu, je velmi úzká, ztrácela by se značná část intensity světelné, beztak malé. Abychom aspoň do jisté míry vystihli vliv pseudoconu, bylo stanoveno ohnisko F_2 následující úvahou (ovšem jen aproximativně): Je pravděpodobno, že rovnoběžné paprsky, dopadající na facettu, budou vlivem pseudoconu lámány tak, aby kužel, vycházející z ohniska F_2, zastihl buňky krystalové plochou odpovídající svou rozlohou šířce iris, aby, byvši zlomeny do směru rovnoběžného, nerušeně mohly vstoupit do rhabdomu. K tomu ovšem by stačila i cornea menší křivosti, ale tím by se příliš zmenšilo zorné pole facetty, beztak již nepatrné. F_1F_2 značí pak délku, o kterou byla pseudoconem prodloužena ohnisková vzdálenost corney. Netvrdím ovšem, že schema *21*. vystihuje přesně poměry, neboť je zcela možno, že ohnisko F_2 leží blíže buněk krystalových, nebo přímo na distální hranici jejich, takže zde by se tvořil obrázek předmětu, ležícího v nekonečnu (resp. předmětu ve větší vzdálenosti od oka), pro naše úvahy však zatím stačí.

Dříve ještě, než promluvíme o vidění, resp. o tvoření se obrázku v pseudoconích očích, zmíníme se stručně o názorech Vigierových. V morfologické části bylo pojednáno o jeho nálezech v souvislosti s naším názorem. Vigier tvrdí, že rhabdomery jsou samostatné, že každý fun-

guje sám pro sebe jako nezávislé individuum; k dokonalejší isolaci jsou od sebe odděleny zvláštní hmotou. Již Vigier zdůrazňuje, že »pseudocône est donc incapable de modifier sensiblement la petite image cornéulaire«. Obrázek v oku pseudoconím se tvoří následujícím způsobem: »Il se produit donc, dans une aire centrale de même dimension (myslí distální konec rhabdomerů), non pas impression diffuse d'une tache lumineuse, mais sélection de rayons qualitativement différents concentrés en sept poins voisins de l'image projetée. La présence des courtes bandelettes qui surmontent les interstices séparant l'extrémité des baguettes réfringentes, augmente sans doute la netteté de l'impression, en isolant les baguettes les unes des autres. Les rayons recuillis par chaque baguette sont déviés à l'intérieur de celle-ci, grâce à sa réfringence, et dirigés vers le rhabdomère correspondant qu'ils parcourent suivant sa longueur: Il en résulte sept excitations de qualité différente, qui suffisent, étant donné le peu d'étendue de l'aire centrale utilisée, à la réception d'une petite image.« — Důležitý úkol připadá pak gangliu optickému: v perioticum (I. nebo retinální ganglion) splývají souhlasná podráždění sousedních ommatidií, pak nastává redukce vodivých drah, vedení do mozku, kde tvoří se obrázek, dík dvěma chiasmatům vsunutým mezi oko a mozek.

I kdybych na svých praeparátech nalezl úplnou isolaci rhabdomerů, byla by na místě námitka, že se může jednati jen o isolaci morfologickou a ne fysiologickou. Kdyby vedení podráždění bylo v každém rhabdomeru tak samostatné, aby vznikalo sedm obrázků, k čemu by pak byla tak důkladná isolace jednotlivých ommatidií? Rhabdomery byly by vlastně jen drahami vodivými, tedy jakýmisi nervy, o nichž přec víme, že nejsou nijak opticky isolovány; když by totiž světlo prostupovalo rhabdomerem tak, že by naprosto nerušilo vedení v rhabdomeru sousedním, byla by tím spíše zbytečna isolace celých ommatidií. A konečně víme, že světelný paprsek prostupuje rhabdomem jako skleněnou trubicí, odráží se od jednotlivých rhabdomerů a přeskakuje jaksi z jednoho na druhý.

Mají-li pak chiasmata v oku *Dipter* takovou důležitost, k čemu jsou u ostatního hmyzu, kde přec se tvoří obrázek přímý? Potom nikdy jsem se nepřesvědčil o spojování nervů z různých zrakových buněk, nýbrž svazek vláken z ommatidia postupuje samostatně. Plně ovšem souhlasím s Vigierem, že zdůrazňuje vliv ganglií optických, na což ostatně upozorňoval již Rádl a bylo by třeba opravdu důkladné práce, která by řešila tyto otázky.

Uvážíme-li tedy všechno, co již dříve bylo řečeno o morfologii a fysiologii oka složeného, můžeme stanoviti tři názory o vidění, resp.

tvoření se obrázku v pseudoconím oku *Dipter*, z nichž první je jaksi modifikací názoru Exnerova, druhý pak Vigierova a třetí konečně spojuje jaksi oba:

1. Pseudoconí oko Dipter liší se od oka euconího tím, že pseudoconus nemá za úkol sbírati světelné paprsky a působiti rovnoběžnost paprsků původně do oka rovnoběžně přicházejících, ani vzpřímiti obrácený obraz vytvořený corneou, nýbrž prodlužuje ohniskovou vzdálenost facetty. Rovnoběžnost paprsků, vycházejících z dioptrického aparátu, je způsobena krystalovými buňkami, které působí jako čočka konkavkonvexní, sbírajíce opět kužel paprsků. Rovnoběžný svazek paprsků z nich vystupující je proti rovnoběžným paprskům, dopadajícím na corneu, značně koncentrovaný. Srovnáme-li schemata 5. a 21., poznáme, že není tu tak podstatného rozdílu, neboť i v našem případě může býti obrazová rovina libovolně umístěna (dík rovnoběžnosti paprsků). Jest zde ovšem bod *x* a *y* vzhledem k schematu Exnerově obrácený, ale není to věc tak zásadní důležitosti, neboť »jedem Omma entspricht nur ein Bildpunkt« (Exner) a pak de facto ani o obrázku nemůže býti řeči, neboť paprsky postupují rovnoběžně, jedná se tedy jen o jakousi světelnou skvrnu a tu nezáleží, je-li obrázek přímý či obrácený.

2. Výklad druhý vlastně se stotožňuje s názorem Vigierovým, jenže na místo zobrazování sedmi isolovaných bodů zavádí jediný obraz jediného bodu (z důvodů dříve řečených).

3. Skutečný obrácený obraz bodu tvoří se na distální hranici krystalových buněk, kam rhabdomery vysílají fibrilly stluštělé na konci v čípky. Distální konce rhabdomerů odchylné skladby (barvením vyjádřené) sesilují jaksi činnost krystalových buněk, pomáhajíce usměrňovat paprsky vstupující do rhabdomu, kdežto ostatní jejich části nezměněné mají funkci sesilovačů určitého, jediného podráždění (tedy jediného obrázku jediného bodu), neboť skládají se z čípků, uložených napříč délky rhabdomerů.

Pro svou osobu přijímám výklad třetí, bylo by ovšem třeba vystihnouti vztah obráceného obrázku k definitivnímu přímému obrazu, což není možno bez experimentů a důkladného studia nervové soustavy. Kdyby ovšem vztahy jednotlivých částí dioptrického systému byly takové, jak zakresleno na schematu 21., vytvořil by se de facto neostrý difusní obrázek a poměry byly by tytéž (co se týče přímosti nebo obrácenosti obrazu) jako v případě prvém.

Na konec dovoluji si poznamenati, že nesouhlasím ve všem s theoretickým výkladem Exnerovým, proti jehož názorům (na př. mnoho-

násobnému lomu v krystalovém kuželi) dalo by se lecos namítati; ale k odůvodnění jest třeba pečlivých studií i experimentálního řešení problému, k čemuž dosud se mi nedostává vhodného materiálu. Snad v některé pozdější práci vrátím se znovu k tomuto thematu.

V červenci 1924.

Zoologický ústav Karlovy university.
odd. prof. Dr. Jar. Weniga.

Résumé.

Nous pouvons diviser l'oeil composé des Insectes en trois zones, c'est à dire 1° en zone dioptrique, 2° perceptible, 3° catoptrique.

La zone dioptrique nous présente un appareil réfringent, qui en notre cas est composé d'une cornéule, d'un pseudocone et de quatre cellules cristallines (fig. 1., 13.). La cornéule qui a la forme d'une lentille convexe, est secretée des deux cellules de l'hypoderme cornéen; ces deux cellules prenent plus tard la fonction catoptrique comme les cellules pigmentaires principales. Le pseudocone est remplacé par une sécretion liquide des quatre cellules cristallines; c'est une masse demi-liquide qui est fermée des côtés par les cellules pigmentaires principales et au dessous par les cellules mères. Ces quatre cellules forment ensemble une lentille convexe concave (fig. 1., 13., 14.), dont le bord est enfoncé dans les cellules pigmentaires. Les noyaux des cellules cristallines se trouvent au bord pour qu'ils n'empêchent pas aux rayons lumineux d'entrer dans le canal de la rétinule.

La rétinule (zone perceptique) est formée de huit cellules visuelles. A chaque de ces cellules appartient une rhabdomère. Les huit noyaux des cellules sont groupés ainsi (fig. 13.): six de ceux-ci sont placés dans le tiers distale des cellules visuelles en même niveau; étroitement sous eux nous trouvons le septième. La huitième cellule possède son noyau dans le tiers proximale de la rétinule prolongée. Une coupe transversale nous montre seulement sept rhabdomères, dont six sont juxtaposées autour de la septième qui prend tellement une place extraordinnaire (fig 17., 18., 24., 25.). Cette cellule avec la rhabdomère particulière possède selon toutes les apparences deux noyaux, le septième et le huitième. Nous pouvons expliquer ce phénomène très facilement mais seulement dans la théorie, car il est presque impossible d'observer toutes les coupes transversales d'une seule ommatidie. Il y a ici seulement place pour six cellules visuelles (fig. 17.), la septième est pressée et pour cela son noyau descend sous les six autres. La cellule enfin échappe sans toucher la membrane

basilaire et la huitième cellule la remplace. Celle-ci est de nouveau pressée des autres et à cause de cela sa rhabdomère prend aussi une situation caractéristique.

Je ne peux pas décider si la situation de la huitième cellule fait une continuation directe de la septième, si alors la rhabdomère particulière, formée de deux cellules, s'étend des cellules cristallines jusqu' à la membrane basilaire, ou si le huitième élément prend la place parmi la 1-ière et 2-ième cellule, tellement que la septième et la huitième rhabdomère projetées sur la même plaine formeraient plus ou moins 90°. Selon les rapports que j'ai trouvé dans la partie proximale de la rétinule (fig. 26.) c'est la seconde explication qui me semble d'être plus juste.

La situation assymetrique des sept rhabdomères (de coupe transversale — d'après Dietrich) n'est pas très constante — je crois, que c'est un phénomène occasionnel, dont la cause je trouve dans la manière de la fixation. Je pense que l'assymetrie se montre d'une telle façon à cause de la situation constante de rhabdomère extraordinaire. Selon la situation de cette rhabdomère nous pouvons diviser l'oeil composé des Diptères en deux parties: ventrale et dorsale, dont les ommatidies sont situées réciproquement comme l'object vers son image mirée. Nous trouvons cette situation de septième rhabdomère aussi chez le genre Sapromyza, mais seulement dans la partie distale; dans la partie proximale les rhabdomères des deux ommatidies voisines forment l'angle des 90° sans conserver la division l'oeil en deux parties mirées (fig. 26.).

Nous pouvons peut-être expliquer la situation de septième rhabdomère dans l'oeil des Diptères, specialement la division des yeux en deux parties, comme le résultat des forces mécaniques. Si toutes les sept cellules visuelles doivent entrer dans le contour hexagone, il sera avantageux qu' une seule cellule serait pressée parmi les autres et que ce serait une cellule spéciale placée d'une même manière dans toutes les ommatidies. Nous pouvons demander comment se pourraient former au milieu des yeux les limites autour de quelles toutes les rhabdomères sont placées l'une à l'autre tournées de 180°. — La coupe transversale d'un oeil composé est presque régulière (fig. 23.), les ommatidies du côté sont un peu de travers à la surface; si nous supposons maintenant qu' une ommatidie du côté dorsal a la forme d'un triangle (fig. 22.), nous pouvons expliquer la situation de la septième cellule qui est intercalée en dedans, par une pression sur la partie *a* qui est le fait de la position oblique de la plaine cornéen (à l'égard de l'axe d'une ommatidie). Au côté ventral c'est la part *b* qui a reçu par la même cause une place particulière. Alors c'était au côté ventral et dorsal d'où sont venu les impulsions pour choisir des éléments extraordinaires et pour les ranger d'une façon qu'au milieu

d'oeil s'étaient formées les limites des deux sfères. La courbure de l'oeil dans la direction horizontale est plus petite, son contour forme une figure allongée dans la direction verticale qui même donne la tendence de la division horizontale.

La cause de la situation de la septième rhabdomère est tout à fait mécanique, et non la differenciation physiologique.

Les bords distales des rhabdomêres sont un peu renflés et si rapprochés, qu'ils semblent être joints (fig. 1., 14.). Cela temoigne aussi la coupe transversale: elle est quadrangulaire avec les angles arrondis (fig. 1., 2., 24., 25.). Les bords distales des rhabdomères sont mis dans les cellules cristallines. La suite des bords fusionnés est un cône des fils qui finissent par les petits grains sous la surface concave des cellules cristallines. Ces sont peut être les fibrilles élémentaires qui sont gonflées en languettes. Les bords proximales des rhabdomères sont attachés sur la base du triangle (resp. du cône) qui est rempli du pigment et dont le sommet vise à la membrane basilaire (fig. 13., 28.). De ce sommet sort un faisceau des nerfs qui perce la membrane et traverse encore les ganglions optiques. D'après les traveaux de Kirchhoffer, Günther et Johnas nous pouvons juger que chez le genre Sapromyza le bord inférieur de la huitième cellule s'élargit aussi en forme d'un cône, qui rempli du pigment absorbe les rayons entrant par le canal de la rétinule. Nous ne pouvons par encore prouvé si ce phénomène est un arrangement pour accomodation à l'intensité lumineuse.

L'oeil pseudocone des Diptères et l'oeil eucone des autres Arthropodes different l'un de l' autre très considérablement: le pseudocone (au contraire du cône) ne collectionne pas les rayons et ne les fait pas parallèles; il ne tourne non plus l'image renversée formée de cornéule — il allonge seulement la distance focale de la facette (fig. 21.). Le parallelisme des rayons qui sortent d'un appareil réfringent est fait par les cellules cristallines qui jouissent la rôle d'une lentille concave-convexe. Les cellules cristallines sont alors une partie très importante de l'appareil réfringent.

Le faisceau parallèle des rayons qui sort de cet apareil est fort concentré en comparaison avec les rayons qui tombent sur la cornea. Le schéma 5. et 21. nous montre, qu'il n'y a pas ici une grande difference dans l'effet final, car aussi dans notre cas la surface d'image peut être placée arbitrairement. Nous avons ici sans doute les points *y*, *x* qui sont renversés à l'égard du schéma d'Exner, mais la chose est peu importante car »jedem Omma entspricht nur ein Bildpunkt« (Exner) et en effet on ne peut pas parler ici d'une image, car les rayons sont paralleles et il

s'agit seulement d'une plage lumineuse et c'est égal si elle est droite ou renversée.

L'image reéle d'un point (en forme d'une tache lumineuse) est renversée et elle se produit aux limites distales des cellules cristallines ou nous trouvons les renflements à l'extrémité des fibrilles en forme des petits grains. Les bords renflés des rhabdomères d'une composition différente (exprimée par la coloration) renforcent la fonction des cellules cristallines en formant la direction des rayons qui entrent dans le canal de la rétinule, tandis que l'autre part des rhabdomères renforce une seule irritation lumineuse (alors une image d'un seul point).

Si les rapports des divers parties du système réfringent ne serront pas tels que en schéma 21., il faudrait trouver la rélation des images partielles (renversées) à l'image totale (droite), et cela n'est pas possible sans expérimenter et sans étudier profondément le système nerveux.

Dans le texte tcheque je fais encore mention des autres explications du mode de fonctionnement des yeux des Diptères, dans lesquelles je modifie les hypothèses d'Exner et de Vigier à l'égard des mes recherches morphologiques.

Výklad vyobrazení. — Explication des figures.

bb = basální buňka — cellule basale.
bp = basální pigment — pigment basale.
co = cornea — cornéule.
f = hranice facetty — limites de la facette.
h = hypodermis — hypoderme.
jh = jádro b. hypodermální — noyau de la cellule hypodermique.
jk = jádro b. krystalové — noyau de la cellule cristalline.
jpd = jádro pigmentové b. II. řádu — noyau de la c. pigmentaire de deuxième ordre.
jz = jádro b. zrakové — n. de la c. visuelle.
k = krystalová buňka — cellule cristalline.
mb = membrana basilaris (fenestrata) — membrane basilaire.
nv = nervové vlákno — nerf.
pd = pigm. b. II. řádu — cellule pigmentaire de deuxième ordre.
pp = pigm. b. I. řádu — c. p. principales.
ps = pseudoconus — pseudocone.
rh = rhabdomer — rhabdomère.
srh = splynutí rhabdomerů — fusionnement des rhabdomères.
tra = trachea — trachée.
trp = tracheální prostor — espace trachéen.
z = zraková buňka — cellule visuelle.

Textové obrázky. — Figures.

1. *Sapromyza praeusta:* sagitální řez dioptrickým aparátem — coupe sagitale d'un appareil réfringent. Cornea jest trojvrstevná. Krystalové buňky mají se strany tvar srdčitý, při hlubším zastavení jsou miskovité. Do téhož obrázku jsou zakresleny obě optické roviny (ok. komp. 12., hom. im. $^1/_{12}$. Mallory). Poněkud schematisováno.
2. *Sapromyza praeusta:* Příčný řez okem těsně pod jádry krystalových buněk — coupe transversale d'un oeil étroitement sous les noyaux des cellules cristallines (comp. ok. 12., hom. im. $^1/_{10}$. — Mallory). Poněkud schematisováno.

3., 4., 5. dle Exnera — d'après Exner.

Tabulka I. — Planche I.

13. *Sapromyza praeusta:* Podélný řez třemi ommaty — coupe longitudinale des trois ommatidies. Obě krajní ommatidia jsou říznuta mediálně, prostřední sagitálně; pseudoconus nezakreslen (komp. ok. 12., obj. 5. — Mallory).
14. *S. praeusta:* mediální řez dioptrickým aparátem — coupe mediale d'un appareil réfringent. Levá buňka p. I. řádu je vakovitě rozšířena; z distálního konce rhabdomerů vycházejí fibrilly na konci stluštělé v cípky. Řez je poněkud šikmý, proto krystalové b. (*k*) nemají charakteristického tvaru (komp. ok. 12., hom. im. $^1/_{10}$ — Mallory). Poněkud schematisováno.
15. *S. praeusta:* příčný řez složeným okem ve výši jader pigmentových b. I. řádu — coupe transversale d'un oeil à facettes dans le niveau des noyaux des cellules pigmentaires principales (komp. ok. 12., hom. im. $^1/_{10}$ — Mallory).
16. *S. praeusta:* příčný řez okem ve výši jader krystalových buněk — coupe transversale d'un oeil composé dans le niveau des noyaux des cellules cristallines. Uprostřed pigmentového prstenu (pigmentové b. I. řádu) leží splynulé rhabdomery; stěny krystalových buněk jsou zřetelné. Mezi ommaty leží jádra pigmentových buněk II. řádu, jichž hranice jsou nezřetelné. Mezi nimi leží tracheální prostory. Ommatidium dole je říznuto poněkud výše, takže krystalové b. jsou tu v podobě mezikruží, podél jehož vnitřního kruhu jsou patrny cípky (komp. ok. 12., hom. im. $^1/_{10}$ — Mallory).
17. *S. praeusta:* příčný řez okem v rovině šesti jader buněk zrakových — coupe transversale d'un oeil à facettes dans la plaine des six noyaux des cellules visuelles. Zraková buňka, jejíž rhabdomer je vysunut do rhabdomového kanálu, postrádá na tomto řezu jádra. Mezi ommaty jsou tracheální prostory (komp. ok. 12., kom. im. $^1/_{10}$ — Heidenhain).
18. *S. praeusta:* příčný řez okem v rovině *d* — coupe transversale dans la plaine *d*. Zastihnuta jest osmá zraková buňka se svým jádrem; rhabdomer její zaujímá význačnou polohu jako na obr. 24. a 25. u buňky sedmé. Rhabdomový kanál se zužuje (komp. ok. 12., hom. im. $^1/_{10}$ — Heidenhain).

Tabulka II. — Planche II.

19. Schema jednotlivých elementů složeného oka, jak by se jevily při pohledu shora ve svém vzájemném vztahu. — Schéma des éléments d'un oeil composé dans la projection verticale.

Jádra pigmentových b. I. řádu leží v sekundární ose šestiúhelníkové fa-

cetty. Stěny krystalových buněk jsou orientovány tak, že jedno rameno kříže jest v primerní ose facetty, druhé pak k němu kolmo, tedy v ose sekunderní (primerní osa směřuje ze středu šestiúhelníku do prostřed jeho strany, sekunderní pak do úhlu dvou stran).

20. Schema krystalového kužele, resp. válce s vrstvami různé optické hustoty (modifikováno dle Exnera) — schéma d'un cône crystallin (modifié d'après Exner). Optická mohutnost se zmenšuje směrem k plášti, jak naznačují šipky. *T* jest místo, kde nastává totální reflex; v horní polovině, označené —, láme se paprsek od kolmice, v dolní + ke kolmici.

21. Schema fysikálních pochodů v oku Dipter — schéma d'une brèche des rayons dans l'oeil des Diptères. Cornea i krystalové buňky jsou nakresleny kamerou přesně ve svém tvaru i vztahu, podobně i průběh paprsků je přesně vyrýsován pro *n* corney = 1·55. Bližší v textu.

22. Schema ommatidia z ventrálního kraje — schéma de l'ommatidie du bord ventral. *a, b* jsou příslušné strany, dorsální a ventrální, *c* rovina corneální. Bližší v textu.

23. Frontální řez složeným okem — coupe frontale d'un oeil composé. Na dorsálním a ventrálním kraji stojí ommatidia šikmo k povrchu corneálnímu.

Tabulka III. — Planche III.

24. *S. rorida:* příčný řez střední částí složeného oka — coupe transversale d'une partie mediale d'un oeil composé. Mikrophotographie. Poněvadž oko je silně zakřiveno a divergence ommatidií poměrně malá, jsou ommatidia říznuta v různé výši. V prvních řadách jsou profaty pigmentové buňky I. řádu, pak následuje řada ommatidií říznutých ve výši krystalových buněk (splynulé rhabdomery zřetelně vystupují), pak jest řada ommatidií profatých v rovině šesti jader (to odpovídá řezu *c*, obr. 17.); těsně pod nimi je jádro sedmé zrakové buňky.

25. *S. rorida:* tentýž řez zvětšený — la même. Mezi jednotlivými ommatidiy nejsou trachee v takovém rozsahu, jako tvrdí Dietrich. V horních řadách sice zdánlivě existují širší mezery, ale to jsou jen nevykreslené, modravě zbarvené struktury.

26. *S. rorida:* příčný řez ve výši osmého jádra (rovina *d*, obr. 18.) — coupe transversale d'un oeil composé dans la plaine *d*. Jádro toto přísluší osmé buňce zrakové, jejíž rhabdomer je opět význačný. Ommatidia uprostřed obrázku jsou říznuta přesně kolmo. Zde vidíme bezpodstatnost Dietrichova tvrzení o asymetrickém rozestavení rhabdomerů. Zároveň pozorujeme, že význačné rhabdomery neleží v souhlasném směru nebo otočeny o 180°, nýbrž že svírají úhel 90°, buď mířice k sobě, nebo jsouce od sebe odvráceny. Bližší v textu.

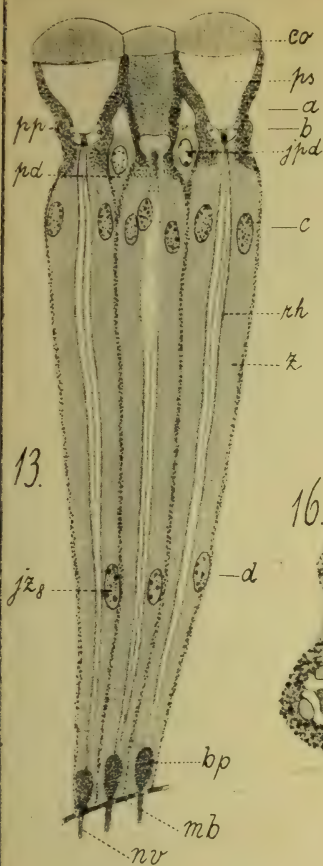
27. *S. rorida:* mikrofotografie špatného praeparátu — microphotographie d'une coupe défectueuse. Mezi ommaty jsou veliké prostory, ohraničené jen úzkými proužky pigmentovanými, nejsou to však trachee, nýbrž zde by měla býti výplň interomární, která však je špatně fixována. Bližší v textu.

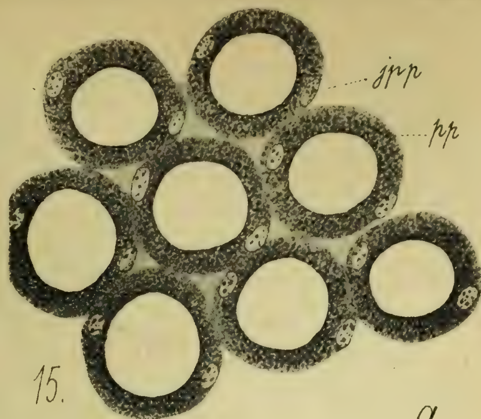
28. *S. praeusta:* podélný řez proximální částí složeného oka — coupe longitudinale d'un oeil composé. Dans la proximale partie de la rétinule manque le pigment. Oko je silně pigmentováno, dolní pigment chybí úplně (komp. ok. 12., hom. im. $^1/_{10}$ — Mallory). Bližší v textu.

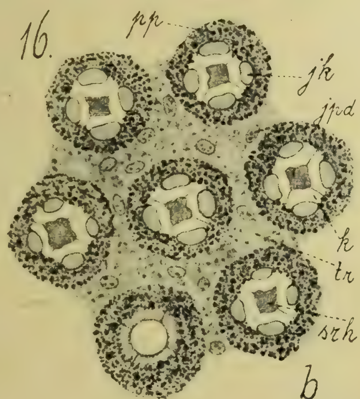
Literatura.

1. Alwerds F.: Beobachtungen an Ephemeriden- und Libellenlarven. Biol. Zentrbd. Bd. 43, 1924.
2. Bedau Kurt: Das Facettenauge der Wasserwanzen. Z. f. w. Z. Bd. 97. 1911.
3. Becker Th.: Dipterologische Studien. Berl. Ent. Zeit. Bd. 39. 1894.
4. Berlese: Gli Insetti, Milano 1909.
5. Carrière: Die Sehorgane der Tiere. München 1885.
6. Carrière: Kurze Mitteilungen aus fortgesetzten Untersuchungen über die Sehorgane. Zool. Anz. Bd. 9. 1886.
7. Ciaccio G. V.: Sur la forme de la structure des facettes de la cornée et sur les milieux réfringentes des yeux composés des Muscides. Journ. Microsc. Paris 13. année.
8. Demoll R.: Ueber die Wanderung des Irispigments im Facettenauge. Zool. Jahrb. Phys. Bd. 30.
9. Demoll R.: Sinnesorgane der Arthopoden, ihr Bau und ihre Funktion. Braunschweig 1917.
10. Dietrich W.: Die Facettenauge der Dipteren. Z. f. w. Z. Bd. 92. 1909.
11. Dietrich W.: Ueber Doppelaugen bei Dipteren. Zool. Anz. Bd. 32. 1908.
12. Exner S.: Die Physiologie der facettierten Augen von Krebsen und Insekten. Leipzig u. Wien, 1891.
13. Friesch K.: Pigmentverschiebung im Facettenauge. Biol. Zentralbl. Bd. 28. 1908.
14. Friesch K.: Ueber den Einfluss der Lichtfarben. Biol. Zentralbl. Bd. 33. 1913.
15. Grenacher: Sehorganen der Arthropoden. Göttingen 1878.
16. Gottsche: Beitrag zur Anatomie und Physiologie des Auges der Krebse und Fliegen. Müllers Arch. f. Anat. u. Physiol. 1852.
17. Günther K.: Die Sehorgane der Larve und Imago von Dytiscus marginalis. Z. f. w. Z. Bd. 100. 1912.
18. Hess C.: Ueber die Lichtreaktion bei Raupen und die Lehre von den tierischen Tropismen. Pflügers Arch. f. Physiol. Bd. 177. 1919.
19. Hesse R.: Untersuchungen über die Organe Lichtempfindung bei niederen Tieren. VII. Z. f. w. Z. Bd. 70. 1901.
20. Hesse R.: Das Sehen der niederen Tieren. Jena 1908.
21. Hesse R.: Sinnesorgane. Handwörterbuch 1913.
22. Hesse R. u. F. Doflein: Tierbau nd Tierleben. Leipzig u. Berlin. 1914.
23. Johansen: Entwicklung des Imagoauges von Vanessa urticae. Zool. Jahrb. Morph. Bd. 6.
24. Johnas W.: Das Facettenauge der Lepidopteren. Z. f. w. Z. Bd. 97. 1911.
25. Kirchhoffer O.: Untersuchungen über die Augen pentameren Käfer. Arch. f. Biontologie. Bd. 2. 1908.
26. Lang A.: Handbuch der Morphologie. Jena 1913.
27. Müller J.: Zur vergl. Physiol. des Gesichtssinnes des Menschen und Tiere. Leipzig 1826.
28. Plate L.: Allgemeine Zoologie und Abstammungslehre. II. Jena 1924.
29. Rádl E.: Ueber den Bau und die Bedeutung der Nervenkreuzungen in Tractus opticus der Arthropoden. Král. Sp. Nauk, Praha 1899.
30. Rádl E.: Ueber die Krümmung der zusammengesetzten Arthropodenaugen. Zool. Anz. Bd. 23. 1900.

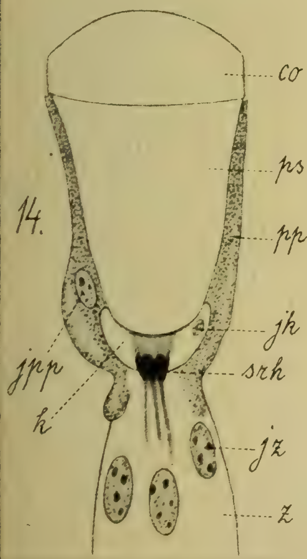
31. Rádl E.: O morfologickém významu dvojitých očí členovců. Král. Sp. Nauk, Jub. spis XIII. 1901.
32. Rádl E.: Etude sur les yeux doubles des Arthropodes. Čas. Čes. Sp. Ent. III. 1906.
33. Rádl E.: Nová nauka o ústředním nervstvu. Čas. lékařů čes. 1911.
34. Schröder: Handbuch der Entomologie. Jena 1913.
35. Tiebe: Plateau's Versuche über die Fähigkeit der Insekten Bewegung wahrzunehmen. Biol. Zentralbl. Bd. 9. 1890.
36. Weismann M.: Entwicklung des Fliegenauges. Z. f. w. Z. Bd. 14. 1864.
37. Vigier Pierre: Sur les terminaisons photoréceptrices dans les yeux composés des Muscides. C. R. Ac. Sc. Paris, I. 145. 1907.
38. Vigier Pierre: Sur la réception de l'excitant lumineux dans les yeux composés des Insectes, en particulier chez les Muscides. Ibid.
39. Wimmer Ant.: Seznam čes. hmyzu dvojkřídlého. Ent. příručky čes. Sp. Ent., Praha 1913.
40. Zavřel J.: Untersuchungen über die Entwicklung der Stirnaugen von Vespa. Praha 1902.
41. Zavřel J.: Die Augen einiger Dipterenlarven und -Puppen. Zool. Anz. Bd. 31. 1907.
42. Zavřel J.: Oči Tendipedid. Lékařské rozhledy. 1916.
43. Zimmer C.: Die Facettenaugen der Ephemeriden. Z. f. w. Z. Bd. 63. 1897.

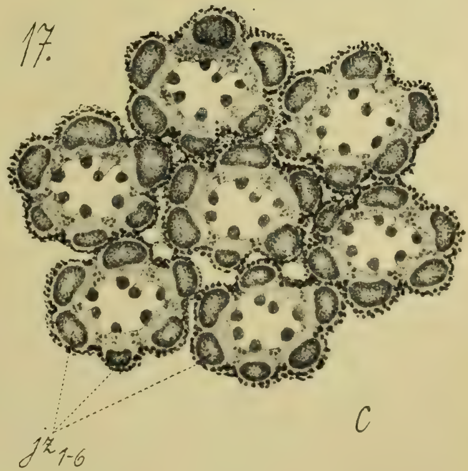

co
ps
a
b
pp
jpd
pd
c
rh
z
13.
jz8
d
bp
mb
nv

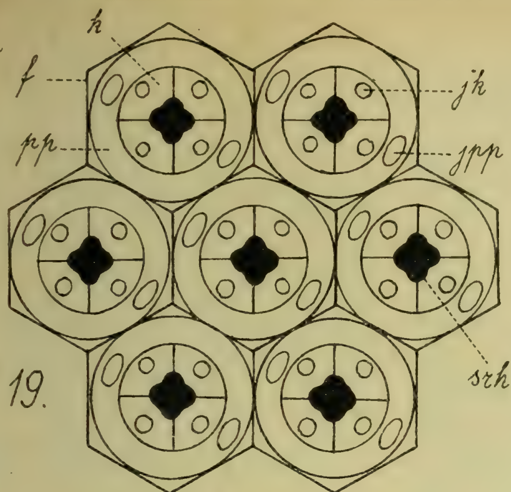

jpp
pp
15.
a

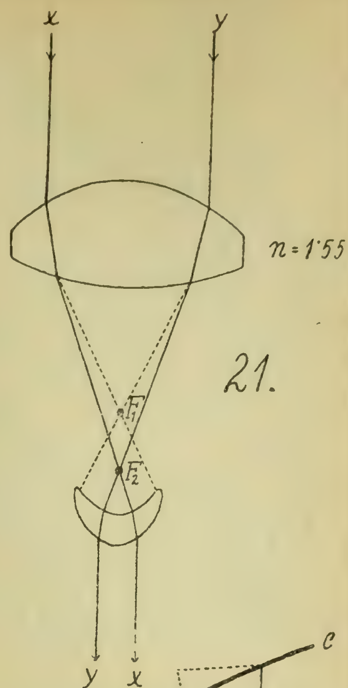

16.
pp
jk
jpd
k
tr
srh
b

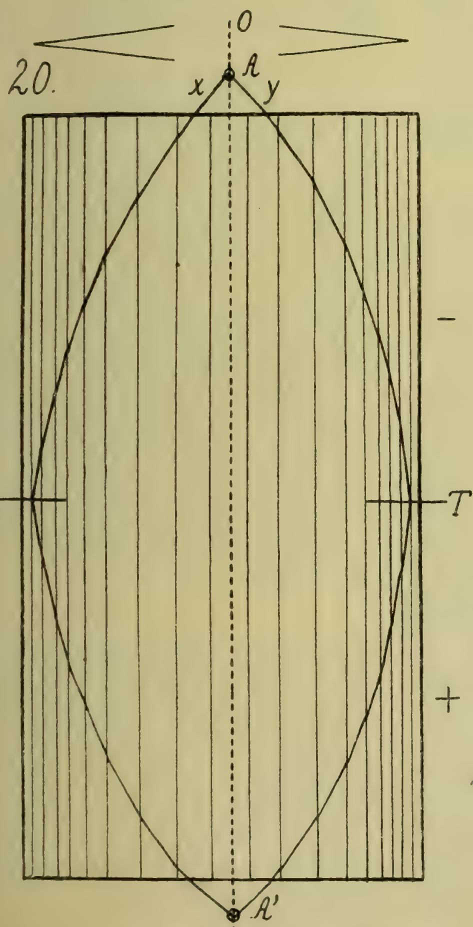

jz8
18.
d

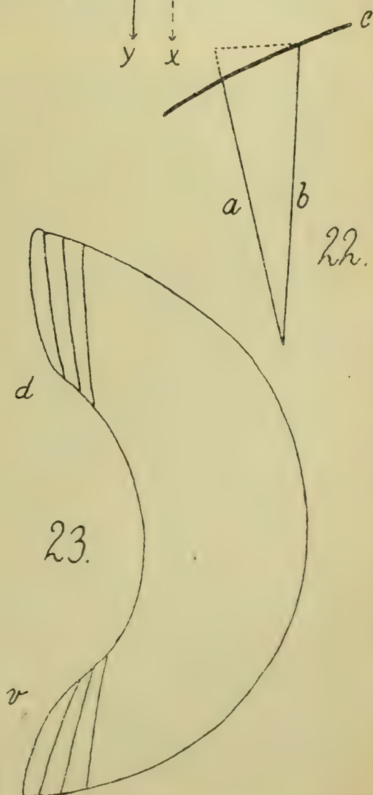

co
ps
14.
pp
jk
jpp
srh
k
jz
z

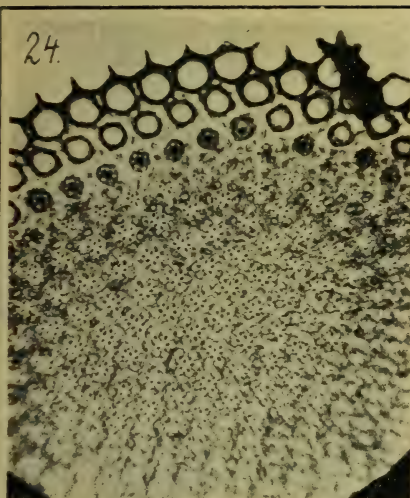

17.
jz1-6
c

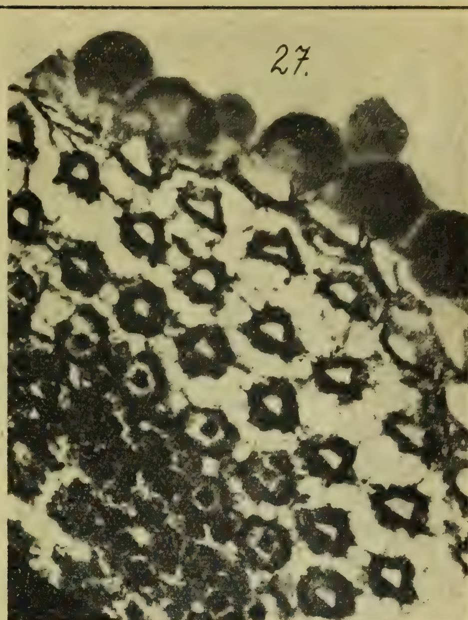

h
f
jk
pp
jpp
srh
19.

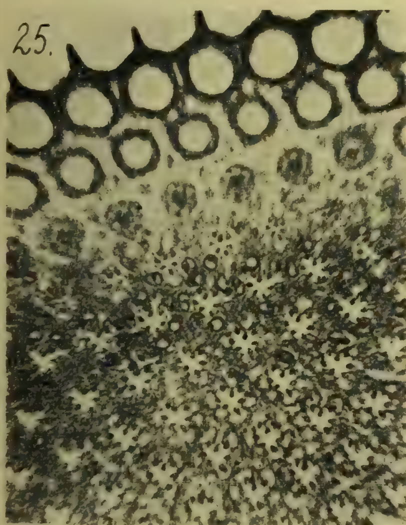

x
y
n = 1·55
21.
F1
F2
y
x

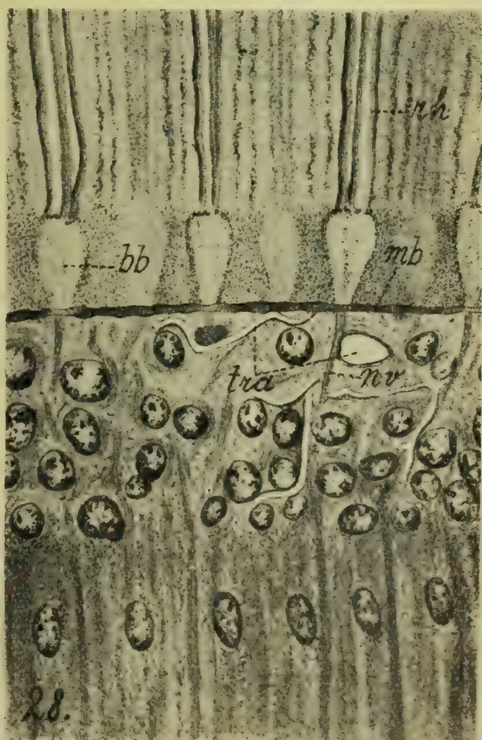

o
20.
h
x
y
−
T
+
h'

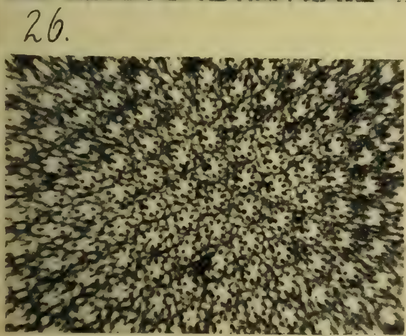

c
a
b
22.
d
23.
v


24.


27.


25.


rh
bb
mb
trä
nv
28.


26.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 23.

Dr. FR. BALAŠ:

Příspěvek k poznání konstituce kyseliny dextro-pimarové.

(Contribution à l'étude de la constitution de l'acide dextro-pimarique.)



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 23.

Dr. FR. BALAŠ:

Příspěvek k poznání konstituce kyseliny dextro-pimarové.

(Contribution à l'étude de la constitution de l'acide dextro-pimarique.)



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘIKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dr. *Fr. Balaš*:

Příspěvek k poznání konstituce kyseliny dextro-pimarové.

(Contribution à l'étude de la constitution de l'acide dextro-pimarique.)

Jako hlavní součást přírodních pryskyřic z některých konifer (abietinei) a různých druhů kalafuny byly vedle látek amorfních isolovány také četné kyseliny krystalické, jimž podle novějších poznatků přísluší sumární složení $C_{20}H_{30}O_2$.

Podrobnějšímu prozkoumání těchto isomerních kyselin pryskyřičných, o nichž zmiňuje se v literatuře obsáhleji již *Baup* v r. 1824, byla v posledních desetiletích věnována zvýšená pozornost, odůvodněná nejen průmyslovým významem těchto látek ale i jejich důležitostí s hlediska biologického a chemického. Objasnění chemické konstituce pryskyřičných kyselin a jejich řádná klasifikace byly však neobyčejně stěžovány nesnadnou přípravou dobře charakterisovaných isomerů a poměrnou složitostí jejich molekuly.

Z pryskyřičných kyselin byla přečetnými pracemi poměrně nejlépe prozkoumána t. zv. kyselina abietová $C_{20}H_{30}O_2$, jež tvoří hlavní krystalickou součást některých druhů kalafuny (hlavně americké). O kyselině abietové bylo seznáno, že jest kyselinou methyl-dekahydro-reten-karbonovou, obsahující dvě[1]) dvojné vazby v molekule. Kyseliny abietové isolované různými methodami z kalafuny, liší se mnohdy bodem tání i rotací, mají však týž charakteristický tvar krystalický a podle *A. Duffoura*[2]) sestávají ze směsi isomorfních kyselin, jež jsou si i konstitucí velmi blízké (a liší se pravděpodobně isomerií prostorovou neb umístěním dvojných vazeb). Pokud z dosavadních výsledků můžeme souditi, nejsou

[1]) L. Růžička a Jules Meyer, Helv. chim. Acta *5*, 322 (1922).

[2]) Compt. rend. *175*, 109 (1922).

kyseliny abietové součástí přírodních pryskyřic, nýbrž vznikají z původních kyselin pryskyřičných o stejné základní kostře uhlíkové teprve isomerisací kyselinami neb zvýšenou teplotou.

K objasnění vzájemného chemického vztahu mezi pryskyřičnými kyselinami přírodními a jejich produkty isomerisačními bylo především důležito prozkoumati vlastnosti a některé reakce význačných kyselin přírodních. Z těchto kyselin jsou nejlépe charakterisovány dvě krystalické kyseliny pimarové $C_{20}H_{30}O_2$, jež byly označeny tímto jménem podle jejich společného botanického původu z francouzské pryskyřice z Pinus maritima (galipotu), jíž se používá k přípravě kalafuny.

Téměř čistá kyselina byla z galipotu po prvé isolována *Cailliot-em*;[3]) tato kyselina měla b. t. 200° a $[\alpha]_D = +56°$ a byla pojmenována kyselinou dextro-pimarovou. *A. Vesterberg*[4]) popsal přesnou methodu pro přípravu této kyseliny a jeho poznatky o vlastnostech čisté kyseliny dextro-pimarové byly všemi pozdějšími autory potvrzeny (b. t. 210—211° a $[\alpha]_D = +72,5°$). Kyselina ta byla často považována za jedinou skutečně homogenní kyselinu pryskyřičnou. Oproti isomerisačnímu účinku jak kyselin tak i zvýšené teploty jest kyselina dextro-pimarová rozhodně daleko stálejší[5]) než ostatní přírodní kyseliny pryskyřičné, jež nepatrnou změnou přípravních podmínek snadno se mění v isomery, mající mnohdy podstatně odlišný bod tání i rotaci. Pro tyto své význačné vlastnosti zaujímá kyselina dextro-pimarová zvláštní místo mezi zmíněnými již přírodními kyselinami pryskyřičnými. Katalytickou redukcí kyseliny dextro-pimarové získali *L. Tschugaeff* a *P. Teearu*[6]) kyselinu dihydro-dextro-pimarovou, z čehož usuzovali, že kyselina dextro-pimarová jest sloučeninou tetracyklickou o jedné dvojné vazbě, za předpokladu, že kyselina ta neobsahuje žádné zvlášť těžce redukovatelné dvojné vazby.

Již *Cailliot*[3]) pozoroval vedle kyseliny dextro-pimarové v galipotu jinou kyselinu, levotočivou, kterou ve stavu téměř čistém isoloval po prvé *Vesterberg*[7]) v malém množství a již označil jako kyselinu laevo-pimarovou. V nejnovější době byla pak pro tuto kyselinu *G. Dupontem*[8]) popsána spolehlivá přípravní methoda. Kyselina laevo-pimarová má

---

[3]) Bul. soc. chim. [2] *21*, 387 (1874).

[4]) Ber. *18*, 3331 (1885); *19*, 2167 (1886); *40*, 120 (1907).

[5]) Kyselinu dextro-pimarovou je na př. možno beze změny překrystalovati z ledové kyseliny octové.

[6]) Ber. *46*, 1769 (1913).

[7]) Ber. *20*, 3248 (1887).

[8]) Bul. soc. chim. [4] *29*, 718 (1921).

b. t. 150—152°, $[\alpha]_D = -282{,}4^0$ a jest i svými ostatními vlastnostmi antipodem kyseliny dextro-pimarové, měníc se již nepatrně zvýšenou teplotou (asi 80°), jakož i účinkem ledové kyseliny octové za chladu. Isomerisací kyseliny laevo-pimarové byl naznačen vztah této kyseliny ke kyselinám abietovým.[9])

Kyselina dextro-pimarová nalézá se nejen v galipotu, ale podle *Vesterberga*[10]) i ve světlých druzích kalafuny francouzské a v pryskyřici z borovice (Pinus silvestris); *Rimbach*[11]) isoloval tuto kyselinu v nepatrném množství také z americké kalafuny.[12])

Podrobnějším studiem kyselin pimarových, podniknutým *L. Růžičkou* a *Fr. Balašem*,[13]) aby zjistili, je-li odůvodněno také se stanoviska chemického botanické skupinové označení kyselin „pimarových" na rozdíl od kyselin abietových, bylo seznáno, že kyselina laevo-pimarová svou chemickou konstitucí náleží ke skupině kyselin abietových, jež při dehydrogenisaci sírou poskytují reten $C_{18}H_{18}$ (1 — methyl — 7 — isopropyl-fenanthren). Tento vztah byl dokázán nejen dehydrogenisací kyseliny laevo-pimarové, ale i krystalografickým vyměřením isomerní kyseliny, získané účinkem ledové kyseliny octové na kyselinu laevo-pimarovou a srovnáním se známými kyselinami abietovými. Kyselina laevo-pimarová se shoduje s kyselinou abietovou jak stejnou kostrou uhlíkovou tak i tím, že v molekule obsahuje dvě dvojné vazby, o nichž svědčí příprava tetrahydroderivátu kyseliny laevo-pimarové redukcí vodíkem (za podmínek, vylučujících isomerisaci) a na něž ukazuje i molekulární refrakce estherů. Prozatím nemohlo býti s určitostí rozhodnuto v čem spočívá rozdíl kyseliny laevo-pimarové od kyselin abietových, uvedená studie vedla však k domněnce, že se kyseliny tyto liší pouze isomerií prostorovou,[14]) event. různým umístěním dvojných vazeb v téže kostře uhlíkové; tomu nasvědčuje nejen snadná isomerisace kyseliny laevo-pimarové již poměrně mírnými činidly (na př. ledovou kyselinou octovou), ale i okolnost, že zde jak výchozí tak i konečný produkt jsou sloučeninami tricyklickými.

---

[9]) G. Dupont, Bul. soc. chim. [4] *29*, 727 (1921).

[10]) Ber. *38*, 4125 (1905).

[11]) Ber. pharm. Ges. *6*, 61 (1896).

[12]) Nejposledněji zjistil jsem, že kyselinu dextro-pimarovou možno v dobrém výtěžku isolovati z přírodní pryskyřice americké, sloužící k výrobě kalafuny.

[13]) Helv. chim. Acta *6*, 677 (1923); L. Růžička, Fr. Balaš a Fr. Vilím, Helv. chim. Acta *7*, 458 (1924).

[14]) L. Růžička, Fr. Balaš a H. Schinz, Helv. chim. Acta *6*, 694 (1923).

Molekulární refrakce estherů kyseliny dextro-pimarové ukazuje na přítomnost 2 dvojných vazeb,[15]) čemuž nasvědčuje i pozorovaný vznik triozonidu. Jest tudíž kyselina dextro-pimarová stejně jako kyseliny abietové sloučeninou tricyklickou, avšak neposkytuje dehydrogenisací sírou reten (dehydrogenisační produkt kyselin abietových), nýbrž nový fenanthrenový uhlovodík $C_{16}H_{14}$ (dimethyl-fenanthren), při čemž mimo skupinu karboxylovou jsou odštěpovány ještě 3 další atomy uhlíkové. Uvážíme-li, že dehydrogenisací sírou jest mimo skupinu karboxylovou odštěpována u kyselin abietových ještě jedna skupina methylová, kdežto u kyseliny dextro-pimarové jsou eliminovány 3 zmíněné atomy uhlíku, můžeme souditi, že tyto 3 atomy uhlíkové pocházejí pravděpodobně ze skupiny isopropylové, jejíž existenci ovšem bude nutno ještě přímo experimentálně potvrditi. Z těchto výsledků a na základě zkušeností, získaných při četných jiných dehydrogenisacích alicyklických sloučenin sírou, lze tudíž usuzovati, že kyselina dextro-pimarová obsahuje stejně jako kyseliny abietové kostru fenanthrenovou a jest pravděpodobně kyselinou dimethyl-isopropyl-dekahydro-fenanthren-karbonovou, v níž skupině isopropylové přísluší poloha, umožňující snadnou odštěpitelnost této skupiny při dehydrogenisaci sírou.

I vyplývá z těchto prací, že kyselina dextro-pimarová a laevo-pimarová nejsou isomery prostorové, jak by bylo možno souditi z nomenklatury obou kyselin (nyní ne právě vhodné), nýbrž že jsou sloučeninami strukturně isomerními, jež se společně odvozují od hydrovaného jádra fenanthrenového a liší se polohou postranních řetězců a eventuelně i umístěním dvojné vazby.

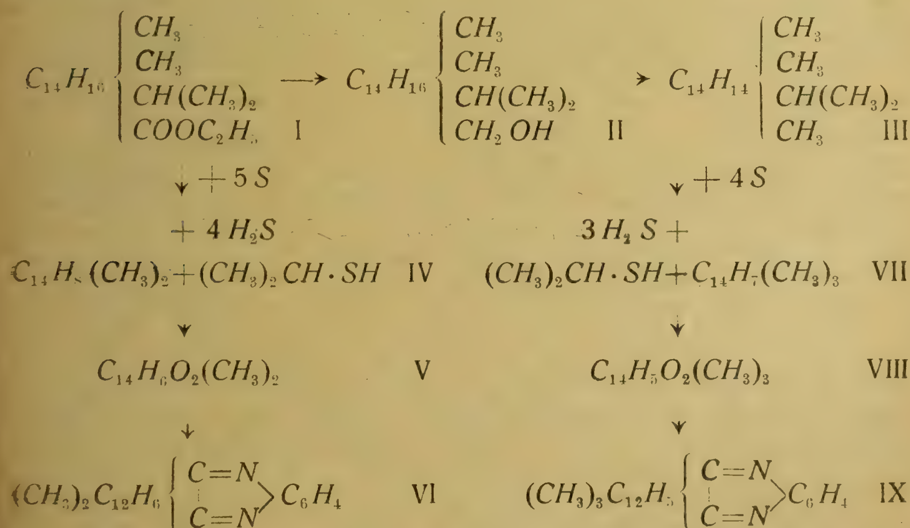
Zároveň bylo upozorněno, že na základě dehydrogenisace je nyní možno po prvé s určitostí rozeznávati dva chemicky definované typy pryskyřičných kyselin $C_{20}H_{30}O_2$: 1. *skupinu kyselin abietových* (v širším smyslu), k níž mimo některé přírodní kyseliny pryskyřičné (na př. kyselinu laevo-pimarovou) — poskytující při dehydrogenisaci reten — patří i vlastní kyseliny abietové (v užším smyslu) a 2. *skupinu novou*, jež representována jest prozatím toliko tuto popisovanou *kyselinou dextro-pimarovou.*

Dosavadní práce o kyselině dextro-pimarové směřovaly tedy, především k určení základní uhlíkové kostry této kyseliny. Postupuje

[15]) Katalytickou redukcí vodíkem byla ve shodě s prací L. Tschugaeff-a a P. Teearu (l. c.) připravena prozatím pouze kyselina dihydro-dextro-pimarová, což svědčí o tom, že jedna dvojná vazba v molekule kyseliny dextro-pimarové se vyznačuje (stejně jako u kyseliny laevo-pimarové a abietové) zmenšenou reaktivností.

dále ve zkoumání kyseliny dextro-pimarové pokusil jsem se touto zde předkládanou prací získati určitějších poznatků o stavbě molekuly kyseliny dextro-pimarové, při čemž užil jsem především také některých method, které se osvědčily při výzkumu kyselin abietových.

Způsobem, zavedeným L. Růžičkou a Jules Meyer-em[16]) určil jsem nejprve poněkud blíže polohu skupiny karboxylové v kyselině dextro-pimarové. Zmínění autoři seznali, že při dehydrogenisaci sírou odštěpuje se nejen volná skupina karboxylová z kyseliny abietové, ale i skupina estherová z estheru této kyseliny. Stejný zjev pozoroval jsem i při kyselině dextro-pimarové: ethylesther (I) této kyseliny poskytl týž fenanthrenový uhlovodík $C_{16}H_{14}$ (IV), který již dříve z kyseliny té byl získán. Aby bylo možno zjistiti, zda kyslíkatý substituent při přeměně kyseliny dextro-pimarové ve sloučeninu aromatickou jest eliminován pro svou zvláštní polohu v molekule, či odštěpován při dehydrogenisaci sírou pouze proto, že obsahuje kyslík (jak tomu jest u kyseliny abietové), bylo záhodno prostudovati dehydrogenisaci takové bezkyslíkaté sloučeniny kyseliny dextro-pimarové, v níž by byl ještě zastoupen uhlíkový atom skupiny karboxylové. Sloučeninu tuto získal jsem methodou[16]) použitou již dříve u kyseliny abietové. Redukcí estheru podle Bouveault-a připravil jsem nejprve alkohol dextro-pimarol $C_{20}H_{32}O$ (II),

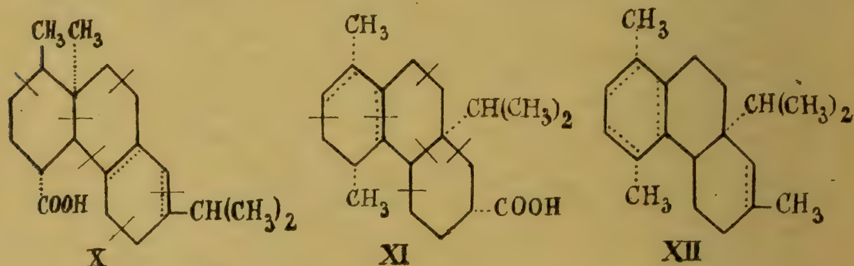


[16]) Helv. chim. Acta *5*, 581 (1922).

tento pak odštěpením vody jsem převedl v uhlovodík methyl-dextro-pimarin $C_{20}H_{30}$ (III). Ze stanovení molekulární refrakce vyplývá, že dextro-pimarol obsahuje dvě a z něho připravený uhlovodík — jak lze očekávati — tři dvojné vazby. Dehydrogenisací tohoto uhlovodíku se 4 atomy síry vznikl pak nový fenanthrenový uhlovodík $C_{17}H_{16}$ (VII), jenž jest tudíž nejblíže vyšším homologem zmíněného již uhlovodíku $C_{16}H_{14}$, a v jedné z methylových skupin obsahuje ještě uhlíkový atom z karboxylové skupiny kyseliny dextro-pimarové. Vyplývá z toho zároveň, že skupina karboxylová nemůže býti zde vázána terciárně,[17]) nýbrž, že zaujímá na některém uhlíkovém atomu v jádře pravděpodobně polohu sekundární, zejména proto, že se kyselina dextro-pimarová nesnadno estherifikuje.

Z oxydace uhlovodíku $C_{16}H_{14}$ v chinon (V) a chinoxalin (VI) o stejném počtu uhlíků nutno pak usuzovati, že na obou můstkových atomech uhlíkových 9 a 10 ve fenanthrenové kostře kyseliny dextro-pimarové není vázána žádná skupina alkylová. Ježto pak také v chinonu $C_{17}H_{14}O_2$ (VIII) a chinoxalinu $C_{23}H_{18}N_2$ (IX) jsou obsaženy beze změny ještě uhlíkové atomy výchozího uhlovodíku $C_{17}H_{16}$, nemůže býti ani skupina karboxylová vázána na můstkových atomech uhlíkových.

Substituční skupiny v molekule kyseliny dextro-pimarové musí býti proto stejně jako u kyseliny abietové (viz hypothetický vzorec X.)[18]) umístěny na vnějších dvou kruzích kostry fenanthrenové. Uvážíme-li, že skupina isopropylová, v kyselině dextro-pimarové pravděpodobně pří-



tomná, musí býti vázána terciárně,[17]) a předpokládáme-li, že kyselina dextro-pimarová náleží ke sloučeninám terpenovým, v nichž uhlíková kostra složena jest ze zbytků molekul isoprenových, můžeme pro tuto

[17]) Z dosavadních výsledků, získaných při dehydrogenisaci alicyklických sloučenin zahřátím se sírou, vyplývá, že jsou eliminovány pouze terciárně vázané skupiny alkylové.

[18]) L. Růžička, H. Schinz a Jules Meyer, Helv. chim. Acta *6*, 1082 (1923).

kyselinu navrhnouti vzorec XI. Vazby, které dosud jen neúplně jsou zajištěny, jsou v tomto schematu (stejně jako ve schematu X. kyseliny abietové) naznačeny tečkovaně. Z uvedeného zřejmě pak vyplývá, jak dalece jsou naznačené polohy jednotlivých substituentů také experimentálně odůvodněny; úkolem navrženého vzorce jest umožniti přibližnou orientaci. Budiž zde ještě vyložen důvod, proč skupina karboxylová a obě dvojné vazby byly ve vzorci umístěny v různých kruzích. Kdyby skupina karboxylová a obě dvojné vazby v kyselině dextropimarové byly umístěny v témže kruhu, musil by methyl-dextro-pimarin obsahovati jedno jádro benzolové (třetí dvojná vazba se utvoří na místě, kde byla vázána skupina karboxylová) a musil by býti tudíž i sloučeninou nasycenou. Bylo však zjištěno, že získaný methyl-dextro-pimarin jest oproti bromu a kaliumpermanganátu silně nenasycen, čímž se odůvodňuje i hořejší úsudek. Existuje tedy určitá analogie mezi kyselinou dextropimarovou a kyselinou abietovou[19]) v tom ohledu, že v obou kyselinách umístěny jsou dvojné vazby a skupina karboxylová v různých kruzích.

Umístění obou dvojných vazeb kyseliny dextro-pimarové v témže kruhu lze prozatím odůvodniti výsledkem, získaným při katalytické dehydrogenisaci methyl-dextro-pimarinu. Při pokusu o dehydrogenisaci tohoto uhlovodíku palladiem a niklem podařilo se totiž zavésti pouze jednu dvojnou vazbu, při čemž vznikl uhlovodík $C_{20}H_{28}$. Zjev tento snadno lze vysvětliti ze vzorce XI. kyseliny dextro-pimarové. Zavedením nové dvojné vazby utvoří se totiž v methyl-dextro-pimarinu jádro benzolové (srovn. hypoth. vzorec XII.), a dehydrogenisace ostatních kruhů jest znemožněna pro polohu skupiny isopropylové. N. Zelinski[20]) nedávno totiž upozornil, že nasycený derivát cyklohexanový, obsahující terciárně vázanou skupinu methylovou, vzdoruje katalytické dehydrogenisaci platinou. Kdežto tedy podle dosavadních zkušeností jsou alkylové skupiny, které by při dehydrogenisaci sírou bránily přeměně látky ve sloučeninu aromatickou, odštěpovány stejně jako atomy vodíkové, tvoří takovéto skupiny alkylové pro katalytickou methodu dehydrogenisační těžko překonatelnou překážku. Jest tudíž pochopitelno, že skupina isopropylová, terciárně vázaná v kondensačním spojení dvou kruhů podle vzorce XI. může znemožniti aneb alespoň ztížiti katalytickou dehydrogenisaci obou sousedních kruhů. Ježto však A. Madinaveitia[21]) katalytickou dehydrogenisací abietenu mědí získal reten, nutno ještě blíže

[19]) L. Růžička, H. Schinz a Jules Meyer, Helv. chim. Acta *6*, 1081 (1923).

[20]) B. Ber. *56*, 1716 (1923).

[21]) Anal. de la Soc. españ. de fis. y quim. *20*, 185 (1922).

prozkoumati, zda jest kostra kyseliny abietové, při níž se také předpokládá skupina alkylová, umístěná v kondensačním spojení dvou kruhů (srovn. vzorec X.), konfigurací snáze katalytické dehydrogenisaci přístupnou, či jsou-li jiné okolnosti (na př. vyšší teplota nebo specifický účinek mědi) pro tento průběh reakce směrodatnými.

Názor, že v kyselině dextro-pimarové dvojná vazba není přímo sblížena se skupinou karboxylovou, získává na pravděpodobnosti také pozorováním, že dextro-pimarol, vzniklý při redukci estheru kyseliny dextro-pimarové methodou Bouveault-ovou, obsahuje původní dvě dvojné vazby, kdežto jinak při Bouveault-ově redukci jednodušších estherů kyselin jest dvojná vazba, umístěná mezi uhlíky α, β vodíkem zredukována a získávají se tak alkoholy nasycené.[22]) Stejně bylo seznáno, že kyselina dextro-pimarová, vzniklá zmýdelněním té části estheru, která nebyla při redukci Bouveault-ově v alkohol převedena, zůstala nedotčena přítomným vodíkem; v jednodušších případech[23]) bylo však i zde zjištěno, že analogickou reakcí podléhá dvojná vazba sblížená se skupinou karboxylovou redukci vodíkem.

Z kyseliny dextro-pimarové byly potom ještě připraveny nejblíže nižší homology uhlovodíků $C_{20}H_{30}$ a $C_{20}H_{28}$, aby bylo umožněno jejich vzájemné srovnání. K tomu účelu bylo použito reakce, jíž podle P. Levy-ho[24]) vzniká z kyseliny abietové uhlovodík abietin $C_{19}H_{28}$ a získán tak destilací chloridu kyseliny dextro-pimarové ve vakuu uhlovodík s abietinem isomerní, jejž možno označiti jakožto dextro-pimarin:



$$C_{19}H_{29} \, . \, COCl \longrightarrow C_{19}H_{28} + CO + HCl.$$

Také tento uhlovodík jest silně nenasyceným, což ukazuje, že jeho tři dvojné vazby, jichž přítomnost byla potvrzena stanovením molekulární refrakce, nemohou býti v témže kruhu. Tím znovu se potvrzuje také názor již nahoře naznačený, že totiž dvojné vazby a skupina karboxylová v kyselině dextro-pimarové nemohou býti v témže kruhu.

Částečnou dehydrogenisaci dextro-pimarinu v dehydro-dextro-pimarin $C_{19}H_{26}$ provedl jsem prozatím kyselinou sírovou v alkoholickém prostředí. Také tato reakce ukazuje, že získaný uhlovodík obsahuje (analogicky podle vzorce XII.) jedno jádro benzolové a jednu osamocenou dvojnou vazbu (na místě skupiny karboxylové).

---

[22]) Srovn. Helv. chim. Acta *5*, 584 (1923); *6*, 493 (1923).

[23]) H. Rupe a J. Brin, Helv. chim. Acta *7*, 546 (1924).

[24]) B. Ber. *39*, 3043 (1906).

Fysikální konstanty obou těchto dvojic homologických uhlovodíků jsou sestaveny přehledně (redukovány na tutéž teplotu) v přiložené tabulce. Z podobnosti konstant možno pak souditi i na analogickou stavbu molekul těchto uhlovodíků:

3	d_4^{20}	n_D^{20}	4	d_4^{20}	n_D^{20}
$C_{19}H_{28}$	0,968	1,533	$C_{19}H_{26}$	0,982	1,548
$C_{20}H_{30}$	0,960	1,531	$C_{20}H_{28}$	0,981	1,550

Konečně budiž zde ještě krátce zmíněno, že se kyselina dextro-pimarová zahřátím na teplotu o něco vyšší než 300° rozkládá (ovšem pomaleji než kyselina abietová), jak vyplývá částečně již z dřívějšího[25]) pozorování. Uhlovodík takto vzniklý z kyseliny dextro-pimarové má podle analysy složení $C_{19}H_{28}$ a sestává tudíž hlavně z jednoho neb několika isomerních dextro-pimarinů, které se mohou lišiti od uhlovodíku, získaného z chloridu kyseliny, různou polohou jedné neb několika dvojných vazeb. V menším množství může býti těmto dextro-pimarinům přimíšen také dextro-pimaren $C_{19}H_{30}$ (vzniklý z kyseliny dextro-pimarové odštěpením kysličníku uhličitého), jehož isomer (abieten) se tvoří při rozkladu kyseliny abietové jakožto hlavní produkt.

Část experimentální.

Rozklad kyseliny dextro-pimarové zahřátím na 310°.

Kyselina dextro-pimarová (11 *g*) byla zahřívána 3 dny v kovové lázni na 310°,[26]) při čemž zaváděn nad hladinu taveniny kysličník uhličitý. V jímadle skondensovalo se malé množství vody při reakci odštěpené. Reakční produkt, slabě žlutě zabarvený, byl rozpuštěn v éteru a protřepán se zředěným louhem sodným a vodou. Při okyselení vodných a alkalických výluhů vyloučila se amorfní kyselina (5,3 *g*), svými vlastnostmi kalafuně podobná, kterou nebylo možno získati v krystalické formě.

Neutrální reakční produkt, destilován pod sníženým tlakem, poskytl 4 *g* slabě žlutě zabarveného oleje, který po zahřátí s natriem předestiloval

[25]) Helv. chim. Acta *6*, 845 (1923).
[26]) Teplota měřena v tavenině.

při 184—186° (12 *mm*). Získaný bezbarvý hustý olej jest látkou silně nenasycenou, ježto dychtivě odbarvuje roztok bromu v sirouhlíku i roztok kaliumpermanganátu v acetonu; vykazuje tyto vlastnosti:

$[\alpha]_D = +30{,}1^\circ$ (ve 4%ním roztoku chloroformovém)

$d_4^{23} = 0{,}9717$ $n_D^{23} = 1{,}5406$

M_D pro $C_{19}H_{28}$ $|\overline{3}$: vypočtena 81,94 nalezena 82,73

M_D pro $C_{19}H_{30}$ $|\overline{2}$: vypočtena 82,40 nalezena 83,38

0,2000 *g* látky dalo 0,6499 *g* CO_2 a 0,2011 *g* H_2O

0,1637 *g* látky dalo 0,5329 *g* CO_2 a 0,1654 *g* H_2O

$C_{19}H_{28}$: Vypočteno C 89,00% H 11,00%

$C_{19}H_{30}$: „ C 88,31% H 11,69%

Nalezeno C 88,66; 88,82% H 11,25; 11,30%.

Výsledek analysy poukazuje k tomu, že uhlovodík sestává hlavně z dextro-pimarinu $C_{19}H_{28}$.

Příprava dextro-pimarinu rozkladem chloridu kyseliny dextro-pimarové.

Ke 30 *g* kyseliny dextro-pimarové, na jemný prach utřené a převrstvené nízkovroucím petroléterem, byly přidány 24 *g* thionylchloridu (= 2 moly). Po několikahodinném stání hlavní část kyseliny se rozpustila. K dokončení reakce zahřívána směs ještě ¼ hodiny při mírném varu na vodní lázni. Po odssátí petroléteru a nadbytečného thionylchloridu ve vakuu při pokud možno nízké teplotě byl zahřát zbytek v olejové lázni asi na 225—235°, při čemž surový dextro-pimarin předestiloval za klidného uvolňování se plynu. Destilát čištěn dále tím způsobem, že nejprve předestilován znova při 12 *mm* tlaku bez přidání natria a pak destilován dvakráte s natriem. Tím získáno celkem 19 *g* (= ca 75% výtěžek) bezbarvého, hustého oleje, vroucího při 182—184° (12 *mm*) a vykazujícího tyto konstanty a složení:

$\alpha_D = +109^\circ$ $d_4^{15} = 0{,}9693$ $n_D^{15} = 1{,}5349$

M_D pro $C_{19}H_{28}$ $|\overline{3}$: vypočtena 81,93 nalezena 82,28

0,1089 *g* látky dalo 0,3553 *g* CO_2 a 0,1064 *g* H_2O

$C_{19}H_{28}$: Vypočteno C 89,00% H 11,00%

Nalezeno C 89,02% H 10,93%.

Uhlovodík tento dychtivě adduje brom v roztoku sirouhlíkovém a odbarvuje roztok kaliumpermanganátu v acetonu a jest tudíž sloučeninou silně nenasycenou.

Částečná dehydrogenisace dextro-pimarinu kyselinou sírovou.

Směs 20 *g* dextro-pimarinu, získaného z chloridu kyseliny, 60 cm^3 92%ního alkoholu a 30 cm^3 konc. kyseliny sírové byla udržována v baňce se zpětným chladičem 6 hod. ve varu (teplota olejové lázně 180—200°). Při reakci byl zaváděn nad tekutinu kysličník uhličitý. Obsah baňky vlit poté do vody a vytřepán éterem. Éterický roztok, zeleně fluoreskující, byl protřepán se zředěným louhem sodným a vodou a z roztoku, vody zbaveného, odehnán éter. Zbylý uhlovodík destilován byl při 12 *mm* tlaku. Získáno tak 14 *g* zeleno-žlutě zabarveného, hustého oleje, který vřel nepřesně mezi 180 a 215°. Uhlovodík ten byl pak promícháván několik dní na třepacím přístroji s roztokem 18 *g* kaliumpermanganátu (= 3 atomy kyslíku) ve 200 cm^3 vody, až do zmizení fialového zabarvení, za tím účelem, aby se odstranilo hlavní množství níže vroucích podílů, které nebyly dehydrogenisovány. Burel, v tekutině vyloučený, byl rozpuštěn přidáním kyselého siřičitanu sodného a kyseliny sírové, načež uhlovodík vyjmut éterem a éterický roztok vytřepán zředěným louhem sodným a vodou. Regenerovaný uhlovodík byl pak dvakráte destilován s natriem. Při tlaku 12 *mm* byly zachyceny tyto konečné frakce:

1. b. v. 192—196° 2,8 *g* hustý, bezbarvý olej,
2. „ 196—203° 3,2 „ velmi hustý, bezbarvý olej,
3. „ 203—212° 3,8 „ „ „ „ „

U frakce 2. a 3. byla určena molekulární refrakce:

2. $d_4^{15} = 0{,}9806 \quad n_D^{15} = 1{,}5432$

M_D pro $C_{19}H_{26}$ $|4$: vypočtena 81,47 nalezena 81,74

3. $d_4^{15} = 0{,}9863 \quad n_D^{15} = 1{,}5505$

M_D pro $C_{19}H_{26}$ $|4$: vypočtena 81,47 nalezena 82,18

Analysa frakce 3.:

0,1187 *g* látky dalo 0,3902 *g* CO_2 a 0,1106 *g* H_2O

0,1382 *g* látky dalo 0,4549 *g* CO_2 a 0,1283 *g* H_2O

$C_{19}H_{26}$: Vypočteno C 89,71% H 10,30%

Nalezeno C 89,69; 89,81% H 10,42; 10,38%.

Nenasycenost tohoto uhlovodíku oproti bromu a kaliumpermanganátu jest — při jinak stejných podmínkách — podstatně menší než u dextro-pimarinu.

Dehydrogenisace ethylestheru kyseliny dextro-pimarové sírou.

5,8 *g* estheru bylo zahříváno se 2,8 *g* síry asi 16 hod. na 180—260°, až ustalo vyvíjení se plynu, načež reakční produkt dvakráte předestilován ve vysokém vakuu. K alkoholickému roztoku 0,5 *g* takto získaného hustého destilátu o b. v. 170—190° byl přidán roztok 0,5 *g* kyseliny pikrové v témže rozpustidle. Vyloučený pikrát byl odssát a zahřátím s ammoniakem z něho regenerován uhlovodík, který po odfiltrování a dvojnásobném překrystalování z alkoholu tvořil lesklé šupinky, tající při 85°. Bod tání tohoto uhlovodíku zůstává nezměněný (85°) i tenkráte, když k látce před tím přimíšeno uhlovodíku $C_{16}H_{14}$, dříve[27]) z kyseliny dextro-pimarové připraveného. Obě tyto látky jsou tudíž totožné. Stejně jest pikrát, připravený z hořejšího uhlovodíku, identický svým bodem tání i dle směsné zkoušky s pikrátem[27]) b. t. 131°, získaným z kyseliny dextro-pimarové.

Příprava dextro-pimarolu.

Ke 100 *g* natria po částech byl připouštěn roztok 65 *g* ethylestheru kyseliny dextro-pimarové ve 200 cm^3 absolutního alkoholu. Nato směs reakční vyhřáta v olejové lázni na 100—110° a pozvolna připuštěno ještě 800 cm^3 absolutního alkoholu, čímž veškero natrium převedeno do roztoku. Aby se zmýdelnila část estheru kyseliny dextro-pimarové, která nevešla v reakci, bylo přidáno k roztoku 200 cm^3 vody a tento ještě 1 hodinu zahříván do varu. Po odehnání alkoholu vodní parou a vychladnutí roztoku, vyloučila se slabě olejovitá, téměř pevná hmota, sestávající z dextro-pimarolu, smíšeného se sodnou solí kyseliny dextro-pimarové. Hmota tato byla odfiltrována přes skelnou vatu a dále zpracována tím způsobem, že byla pokud možno jemně rozdrcena a v lahvi opětovaně protřepávána s éterem. Extrahovaná sodná sůl kyseliny dextro-pimarové byla pak odssáta a promyta éterem. Spojené éterické roztoky dextro-pimarolu byly protřepávány s vodou a zředěným louhem sodným tak dlouho, pokud v promývací tekutině po okyselení povstával značnější zákal. Po odehnání éteru zbylý dextro-pimarol byl destilován ve vysokém vakuu a získáno tak 30 *g* velmi husté, pouze slabě zabarvené látky b. v. 166—168° (0,1 *mm*), která záhy krystalicky ztuhne. Takto isolovaný dextro-pimarol taje při 83—85° a jest v obvyklých organických rozpustidlech snadno rozpustný.

---

[27]) Helv. chim. Acta 6. 689 (1923).

Konstanty a analysa:

$d_4^{15} = 1{,}0114$ $n_D^{15} = 1{,}5357$

M_D pro $C_{20}H_{32}O$ $|\overline{2}$: vypočtena 88,55 nalezena 88,84

0,1165 *g* látky dalo 0,3556 *g* CO_2 a 0,1144 *g* H_2O

0,1173 *g* látky dalo 0,3580 *g* CO_2 a 0,1185 *g* H_2O

$C_{20}H_{32}O$: Vypočteno *C* 83,26% *H* 11,19%

Nalezeno *C* 83,26; 83,28% *H* 10,98; 11,31%.

Regenerovaná kyselina dextro-pimarová. Sodná sůl, získaná jakožto vedlejší produkt při redukci estheru, byla překrystalována asi ze 100násobného množství horké vody, vyloučivší se perleťově lesklé šupiny byly odssáty a znovu rozpuštěny v horké vodě. Z roztoku byla sražena kyselinou octovou volná kyselina v bezbarvých vločkách, tyto odfiltrovány, dobře promyty vodou a překrystalovány z acetonu. Bod tání získaných krystalů 213—214° a $[\alpha]_D = +80{,}3°$ (ve 3,1%ním roztoku chloroformovém).

0,1975 *g* látky dalo 0,5730 *g* CO_2 a 0,1746 *g* H_2O

$C_{20}H_{30}O_2$: Vypočteno *C* 79,41% *H* 10,01%

Nalezeno *C* 79,15% *H* 9,89%.

Příprava methyl-dextro-pimarinu.

Roztok 60 *g* dextro-pimarolu v 500 *cm*³ nízkovroucího petroléteru byl ochlazen zevně ledem a přidáno k němu za častého promíchávání po částech celkem 60 *g* chloridu fosforečného. Když reakce, s počátku s prudkým vývojem plynu spojená, se zmírnila, nechána reakční směs několik hodin státi za chlazení vodou, na konec pak vařena 2 hodiny na vodní lázni. Chladný, slabě žlutě zabarvený roztok byl odlit od přebytečného chloridu fosforečného na roztlučený led v dělící nálevce a dobře protřepán se studenou (0°) vodou a zředěným louhem sodným. Neutrální produkt byl pak destilován ve vysokém vakuu, při čemž s počátku nastával rozklad a unikal plyn. Destilát vřel při 140—180° (1,5 *mm*), a ježto obsahoval chlor, byl zahřát 1 hodinu na 260° s $1\frac{1}{2}$násobným množstvím chinolinu, načež ze směsi byl vyjmut éterem a protřepán se zředěnou kyselinou solnou a louhem sodným. Z éterického roztoku, promytého na konec vodou a vysušeného bezvodým síranem sodným, éter byl oddestilován a neutrální reakční produkt byl předestilován ve vysokém vakuu. Tímto způsobem získáno 35 *g* oleje b. v.

155—170° (1,5 *mm*), který byl pouze slabě zabarven a téměř chloru prostý. Po další dvojnásobné destilaci s natriem bylo získáno konečně 32 *g* hustého oleje, vroucího při 140—145° (0,3 *mm*), který byl bezbarvý a chloru úplně prostý.

$d_4^{22} = 0{,}9587$ $n_D^{22} = 1{,}5301$

M_D pro $C_{20}H_{30}$ $|\overline{3}$: vypočtena 86,55 nalezena 87,09

0,1560 *g* látky dalo 0,5090 *g* CO_2 a 0,1553 *g* H_2O

$C_{20}H_{30}$: Vypočteno C 88,82% H 11,18%

Nalezeno C 89,02% H 11,14%.

Uhlovodík tento dychtivě adduje brom v roztoku sirouhlíkovém a odbarvuje roztok kaliumpermanganátu v acetonu a jest proto sloučeninou silně nenasycenou.

Katalytická dehydrogenisace methyl-dextro-pimarinu.

Uhlovodík pro tuto práci byl podroben ještě dalšímu čištění tím, že byl předestilován dvakráte za přidání kalia. Dehydrogenisace byla prováděna v přístroji[28]) L. Růžičkou navrženém, kterým jest možno bez použití korkových a gumových uzávěrek opětovaně ve vakuu převáděti látku přes týž katalysátor, aniž by bylo zapotřebí ji přeplňovati. Jakožto katalysátoru bylo použito 2,5 *g* palladia, které bylo sraženo formaldehydem a louhem sodným na 2,5 *g* čištěného (v lučavce vyvařeného a vyžíhaného) asbestu dle methody Willstätter-ovy a Waldschmidt-Leitz-ovy[29]). 9,7 *g* uhlovodíku bylo nejdříve pětkrát při 300° a 0,5 *mm* tlaku zvolna převedeno přes katalysátor, načež po vychladnutí a naplnění přístroje suchým kysličníkem uhličitým byl vyjmut malý vzorek látky. Tento s kyselinou pikrovou v zahřátém alkoholickém roztoku ani po samovolném odpaření alkoholu neposkytl pikrátu. Převádění uhlovodíku přes katalysátor bylo proto při 420° ještě 7-krát opakováno. Ani tentokrát však nepodařilo se z reakčního produktu získati pikrát. Byl proto veškeren produkt pečlivě vyloužen éterem a podroben destilaci ve vysokém vakuu, při čemž byl získán silně fialově fluoreskující olej, vroucí při 140—160°. Se stoupajícím bodem varu destiloval olej hustší; vyšší frakce měla spec. hmotu $d_4^{15} = 0{,}9772$, tudíž o 0,0185 vyšší, než uhlovodík výchozí.

Veškeren uhlovodík byl převeden potom ještě 4-krát ve vysokém vakuu při 300° přes katalysátor niklový[30]), rozptýlený jemně na střepi-

[28]) Helv. chim. Acta 7, 90 (1924).

[29]) B. Ber. *54*, 121 (1921).

[30]) Připraven podle Sabatier-a.

nách z nepolévaného talíře hliněného; ježto však nastával nepatrný rozklad látky, byla práce přerušena. Uhlovodík byl pak destilován s natriem při 12 *mm* tlaku a zachyceny tyto frakce, vesměs bezbarvé:

1. 180—185° řídký olej
2. 185—195° dosti hustý olej
3. 195—205° hustý olej

Frakce 2.:

$d_4^{14} = 0{,}9771$ $n_D^{14} = 1{,}5404$

M_D pro $C_{20}H_{28}|\overline{4}$: vypočtena 86,09 nalezena 86,18

Frakce 3.:

$d_4^{14} = 0{,}9861$ $n_D^{14} = 1{,}5530$

M_D pro $C_{20}H_{28}|4$: vypočtena 86,09 nalezena 87,04

0,1526 *g* látky dalo 0,5018 *g* CO_2 a 0,1435 *g* H_2O.

$C_{20}H_{28}$: Vypočteno C 89,50% H 10,52%
Nalezeno C 89,72% H 10,52%.

Uhlovodík tento, jak možno souditi, sestává z největší části z dehydro-methyl-dextropimarinu a chová se k bromu a kaliumpermanganátu značně méně nenasyceně než výchozí materiál nedehydrogenisovaný.

Dehydrogenisace methyl-dextro-pimarinu sírou.

27,1 *g* methyl-dextro-pimarinu bylo zahříváno se 13 *g* síry několik hodin v olejové lázni na 180—200°, načež teplota pozvolna zvyšována až na 250°. Když již z reakční směsi žádný plyn neunikal, byl reakční produkt předestilován ve vysokém vakuu a další destilací při 0,2 *mm* tlaku destilát rozdělen na tyto frakce:

1. b. v. 165—170° 1,7 *g* světležlutý, hustý olej
2. „ 170—175° 1,3 „ „ „ „
3. „ 175—185° 2,8 „ žlutočerv., po vychladnutí téměř sklovitá hmota
4. „ 185—195° 0,9 „ „ „ „ „ „

Jednotlivé frakce pak spolu se stejnou vahou kyseliny pikrové byly rozpuštěny v alkoholu, roztoky v miskách ponechány v klidu až do samovolného odpaření alkoholu a vyloučené krystaly vysušeny na hliněném talíři. Z roztoků, obsahujících frakce 1. a 2., se vyloučily žlutě-oranžové jehlice, které dle stejného bodu tání 115° i dle směsné zkoušky (115°) s nimi provedené, byly totožné, a byly tudíž společně překrysta-

lovány z alkoholu. Bod tání těchto žlutých jehlic se nezměnil ani po dvojnásobném dalším překrystalování.

Z frakce 4. se vyloučily pouze amorfní, mazlavé reakční produkty s kyselinou pikrovou. Frakce 3. však poskytla červené jehličky o bodu tání 118°, jejž dvojnásobným překrystalováním bylo možno zvýšiti na 126°. O tomto produktu bude později podrobněji referováno.

Ze žlutého pikrátu b. t. 115° po zahřátí s louhem sodným na vodní lázni a po vychladnutí roztoku vyloučila se bezbarvá, krystalická látka, jež za účelem dalšího čištění byla vyjmuta éterem, jednou přesublimována ve vysokém vakuu a několikrát překrystalována z alkoholu. Získány tak bezbarvé, lesklé šupinky konstantního b. t. 81°. Elementární analysou bylo zjištěno, že látka sestává z fenanthrenového uhlovodíku $C_{17}H_{16}$ a výsledek tento potvrzen i rozborem příslušného pikrátu.

Analysa uhlovodíku:

3,170 *mg* látky dalo 10,760 *mg* CO_2 a 2,14 *mg* H_2O

$C_{17}H_{16}$: Vypočteno C 92,58% H 7,31%

Nalezeno C 92,62% H 7,55%.

Analysa žlutého pikrátu b. t. 115°:

4,873 *mg* látky dalo 10,950 *mg* CO_2 a 1,761 *mg* H_2O

1,553 *mg* látky dalo 0,132 cm^3 N_2 (20°, 727 *mm*)

1,886 *mg* látky dalo 0,157 cm^3 N_2 (20°, 727 *mm*)

$C_{23}H_{19}O_7N_3$: Vypočteno C 61,45% H 4,27% N 9,35%

Nalezeno C 61,32% H 4,04% N 9,48; 9,28%.

Chinon uhlovodíku $C_{17}H_{16}$. Roztok 0,1 *g* uhlovodíku ve 0,3 cm^3 ledové kyseliny octové byl zahříván s roztokem 0,2 *g* kysličníku chromového v 1 cm^3 téhož rozpustidla a 0,2 cm^3 vody 8 hodin na vodní lázni. Po 12-hodinném stání vyloučené lístky byly odssáty a promyty trochou schlazeného (0°) alkoholu. Bod tání oranžově zabarvených, lesklých lístků (0,04 *g*) byl 150° a po dvojnásobném překrystalování z methylalkoholu zůstal konstantně při 154°, aniž vzhled látky se změnil.

3,795 *mg* látky dalo 11,295 *mg* CO_2 a 1.96 *mg* H_2O

$C_{17}H_{14}O_2$: Vypočteno C 81,56% H 5,64%

Nalezeno C 81,23% H 5,78%.

Chinoxalin z uhlovodíku $C_{17}H_{16}$. K 20 *mg* hořejšího chinonu, rozpuštěného v malém množství ledové kyseliny octové, byl přidán alkoholický roztok 10 *mg* o-fenylendiaminu a směs zahřívána několik hodin

na vodní lázni. Po vychladnutí byly vyloučené jehličky odfiltrovány a promyty alkoholem. Krystalky tyto tály při 150° a dvojnásobným překrystalováním ze směsi chloroformu a alkoholu stoupl b. t. na 154° a zůstal konstantní i při dalším překrystalování. Takto získané jehličky chinoxalinu jsou jen zcela slabě zabarveny.

3,352 *mg* látky dalo 10,475 *mg* CO_2 a 1,81 *mg* H_2O

$C_{23}H_{18}N_2$: Vypočteno C 85,69% H 5,62%

Nalezeno C 85,25% H 6,04%.

Autor vzdává povinný dík ministerstvu školství a národní osvěty, jehož stipendia v cizině používal, jakož i Dru L. Růžičkovi, profesoru vysoké školy technické v Curychu, za jeho zájem a laskavé přispění při provádění této práce v jeho laboratoři.

Résumé.

Dans le travail précedent nous avons décrit la préparation et les propriétés d'autres nouveaux dérivés de l'acide dextro-pimarique (vide: L. Růžička et Fr. Balaš, Helv. chim. Acta 6, 677—91 (1923)).

Nous sommes parvenus à isoler par de méthodes, décrites dans ces mémoires les dérivés suivants: le dextro-pimarol $C_{20}H_{32}O$, le dextro-pimarin $C_{19}H_{28}$, le methyl-dextro-pimarin $C_{20}H_{30}$, le dehydro-dextro-pimarin $C_{19}H_{26}$, le dehydro-methyl-dextropimarin $C_{20}H_{28}$; le carbure phénanthrènique $C_{17}H_{16}$, les: picrate, quinon et quinoxalin de carbure $C_{17}H_{16}$. Comme il est impossible d'indiquer les procédés de la préparation et les propriétés de ces combinaisons ainsi que leur rapport réciproque dans ce résumé, le travail précédent sera publié in extenso dans Helvetica chimica Acta en quelque peu de temps, étant déjà sous presse.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 24.

ALBERT PILÁT:

PŘÍSPĚVEK KU POZNÁNÍ UREDINEÍ VYSOKÝCH TATER.

Contribution to the knowledge of the High Tatras Uredineae.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 24.

ALBERT PILÁT:

PŘÍSPĚVEK KU POZNÁNÍ UREDINEÍ VYSOKÝCH TATER.

Contribution to the knowledge of the High Tatras Uredineae.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Albert Pilát:

Příspěvek ku poznání Uredineí Vysokých Tater.

V následujícím příspěvku podávám seznam druhů Uredineí, které sbíral jsem letošního roku ve Vysokých Tatrách. Celkem zkoumané území jest ohraničeno asi následovně: Počínaje Zakopaným v Polsku táhne se hranice přes Javorinu, odtud přes jihozápadní výběžky Spišské Magury k Tatranské Kotlině, odtud po náhorní rovině ke Kežmaroku a Popradu a dále ve směru trati Košicko-Bohumínské železnice ke Štrbě a Štrbskému plesu. Maje příležitost ztráviti v tomto území plné dva měsíce (od 15. června do 15. srpna 1924), mohl jsem si utvořiti dosti přesný obraz mykologických poměrů zdejších, pokud ovšem moje skrovné prostředky dovolovaly. Mimo jiné obral jsem si za úkol prozkoumati zdejší rezy. Lákala mne k tomuto studiu v první řadě zajímavá flora phanerogamická, která na tomto malém poměrně území jest v takovém bohatství shromážděna.

Podobně jako ráz květeny phanerogamické, jest i ráz Uredineí zdejších částečně vysokohorský. Nejpozoruhodnější jest nález podivné *Puccinia Volkartiana* Fischer na *Androsace Chamaejasme*, popsané r. 1905 Fischerem ze Švýcar.*) Taktéž výskyt *Melampsora alpina* Juel. na *Salix herbacea* téměř na vrcholku Gerlachovky (ca 2600 *m*) jest velmi zajímavý. Co se týče všeobecných mykologických poměrů Vysokých Tater, mají houby podobně jako phanerogamy, ve vyšších polohách (as nad 1400 m) ráz alpínský, v nižších subalpínský. Ovšem nelze u hub táhnouti hranici tak přesně, jako u phanerogamů, ale přes to jest rozdíl mezi oběma pásmy nápadný. Nižší úklony Vysokých Tater jsou životu hub příznivy. Rozsáhlé lesy zdejší, převážně smrkové, skýtají vhodný substrát houbám, jak svým dřevem, tak také hlubokým humusem. Vysoké Tatry vlastní ve vyšších polohách nejsou houbám příznivy. Geotektonika jejich, jejich vysoké a strmé štíty a úzká, studená, jakoby zaseknutá údolí neskýtají zvlášť příznivé podmínky vývoji hub. Má

*) E. Fischer: Die Uredineen der Schweiz. Bern 1904.

proto zdejší poměrně chudá flora houbová ráz namnoze boreální. Než bližší závěry phytogeografické nemožno dnes ještě činiti, neboť houby zdejší z většího dílu, hlavně však Hymenomycety, jsou dosud neznámy, což nejlépe jest patrno z phytogeografického díla Paxova,**) kde pro území Karpat udává pouze 45 druhů Hymenomycetů. Jistě, že v tomto území bude mnoho překvapujících objevů ve floře houbové učiněno, jak po stránce systematické, tak také phytogeografické. Rezů přichází nad hranicí lesního pásma poměrně málo druhů a to ještě dosti roztroušeně. Hojnější jsou pouze: Puccinia Soldanellae (DC. Fuckel na Soldanella hungarica, Eudophyllum Sempervivi (Alb. et Schw.) De Bary na Sempervivum montanum, Caeoma saxifragarum DC. na Saxifraga aizoides a Saxifraga muscoides, Uromyces Cacaliae (DC.) Unger a Coleosporium Cacaliae (DC.) Wagner na Adenostyles albifrons. První tři druhy vystupují až na nejvyšší štíty.

V následujícím podávám v systematickém pořádku druhy Uredineí mnou zde zjištěné.

I. Pucciniaceae.

1. Puccinieae.

Uromyces Link.

1. **Uromyces Valerianae** (Schumacher) Fuckel.

Uredo Valerianae Schum.

Spermogonie, aecidie, uredo a teleutospory na

Valeriana tripteris L. v celém pásmu subalpínském až do pásma kosodřeviny rozšířená.

Bílá plesa 1650 *m*, Zelené pleso 1600 *m*, u Bílé Vody 1200 *m* na

Valeriana sambucifolia Mik. v subalpinském pásmu. U Bílé Vody 1150 *m*, pod Zeleným plesem 1400 *m*, VII.—VIII. 1924.

2. **Uromyces Poae** Rubenhorst.

Uromyces Dactylidis Schroeter p. p.

Aecidium Ranunculacearum D. C. p. p.

Uredo se silně vyvinutými paraphysami na

Poa annua L., s subalpinském pásmu. Matliare 1050 *m*. VIII. 1924. Paraphysy skoro kulovitě hlavaté, se slabě oranžovým obsahem, 50—60 μ dlouhé. Hlava 10—14 μ široká, stopka 3—4 μ tlustá.

3. **Uromyces Pisi** (Pers.) De Bary.

Uredo appendiculota β. Pisi Persoon.

Aecidium Euphorbiae Pers. p. p.

**) F. Pax: Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpathen II., p. 124.

Uredo a teleutospory na

Lathyrus pratensis L. v subalpínském pásmu rozšířené. Sahá až do pásma vysokohorského na některých místech. Tak v »Holubyho dole« v Belských Alpách vápencových až do 1500 *m*. U Žďáru 1300 *m*, Javorina, Tatranská Lomnica, Kéžmarok. VIII. 1924.

4. **Uromyces Euphorbiae corniculati** Jordi.

Aecidium Euphorbiae Pers. p. p.

Uredo a teleutospory na

Lotus corniculatus L. z roviny až do subalpínského pásma. Tatranská Lomnica 1100 *m*, Huncovce. VIII. 1924.

5. **Uromyces Astragii** (Opiz.) Saccardo.

Uredo Astragali glycyphylli et Ciceris Opiz.

Uredo acuminata Kirschner.

Uromyces Euphorbiae-Astragali Jordi.

Uredo a teleutospory na

Astragalus glycyphyllus L. z roviny až do subalpínského pásma. Tak v Tatranské kotlině, Tatranská Lomnica. VIII. 1924.

6. **Uromyces Scrophulariae** (D. C.) Buk. et Broome.

Aecidium scrophulariae D. C.

Aecidie a teleutospory na

Scrophularia nodosa L. v nižším pásmu subalpínském dosti řídká. U Kežmarských Žlebů 920 *m*, Matliare 1000 *m*. VIII. 1924.

7. **Uromyces Hedysari obscuri** (D. C.) Carest. et Picc.

Uredo Hedysari obscuri D. C.

Uromyces Hedysari Fuckel.

Spermogonie a aecidie na spodní straně listů

Hedysarum obscurum L. v Belských Alpách vápencových velmi vzácně. Bujači 2000 *m*. VII. 1924.

8. **Uromyces Alchemillae** (Pers.) Schroeter.

Uredo Alchemillae Pers.

Trachyspora Alchemillae Fuchel.

Uredo a teleutospory na

Alchemilla vulgaris L. a jejích varietách

Alchemilla glabra D. C. a

Alchemilla montana Willd. z roviny až do pásma vysokohorského v celém území všeobecně rozšířená. Stoupá až do 2100 *m*. Kopa 1830 *m*, Bílé pleso 1650 *m*, Belské Alpy až do 2100 *m*, Tatranská Lomnica, Huncovce. VI.—VIII. 1924.

9. **Uromyces Cacaliae** (D. C.) Unger.

Puccinia cacaliae D. C.

Teleutospory na spodní straně listů.

Adenostyles albifrons Rchb. v subalpínském pásmu a v pásmu kleče dosti řídce. Zelené pleso 1550 *m*, »Holubyho důl« v Belských Alpách 1400 *m*, u Žďáru 1400 *m*. VIII. 1924. Tento druh jest ve Vysokých Tatrách mnohem vzácnější, než *Coleosporium Cacaliae* (D. C.) Wagner, které také parasituje na Adenostyles albifrons Rchb.

Puccinia Persoon.

10. **Puccinia punctata** Link.

Puccinia Galii ant. non Pers.

Na *Galium sudeticum* Tsch. v alpínském pásmu, Zadní Koperšady 1700 *m*. 2. srpna 1924.

11. **Puccinia Galii silvatici** Otth.

Uredo a teleutospory na

Galium silvaticum L. v předhoří a v subalpínském pásmu až do 1300 *m*. Žďár 1200 *m*, Matliare 1000 *m*, Zakopané, Tatranská Lomnica, Tatranská Polianka 1100 *m*. VII.—VIII. 1924.

12. **Puccinia Calthae** Link.

Uredo a teleutospory na

Caltha palustris L. v celém území Vysokých Tater rozšířená. Zadní Koperšady 1650 *m*, Matliare 1100 *m*, Javorina, Žďár 1100 *m*. VII.—VIII. 1924.

13. **Puccinia Soldanellae** (D. C.) Fuckel.

Aecidie, uredo a teleutospory na spodní straně listů

Soldanella hungarica Link. od vyššího pásma subalpínského počínaje, v celém pásmu alpínském všeobecně rozšířená. Kopa 1789 *m*, Zelené pleso 1400 *m*, Bílá plesa, vrchol Jahňačí 2200 *m*, Popradské pleso, v celém pásmu Belských Alp vápencových 1000—2000 *m*, Tatranská kotlina. VI.—VIII. 1924.

14. **Puccinia Violae** (Schum.) D. C.

Uredo a telentospory na

Viola silvatica Fries. Kežmarské Žleby. VII. 1924. Na

Viola hirta L. u Kežmaroku. Aecidie na

Viola lutea Sm. Zadní Koperšady 1650 *m*.

15. **Puccinia albescens** (Grév.) Plowr.

Aecidie, uredo a teleutospory pohromadě na

Adoxa moschatellina L. Kežmarský salaš 1300 *m*. 10. VII. 1924.

16. **Puccinia major** Dietel.

Uredo a teleutospory na

Crepis paludosa Much. v subalpínském pásmu roztroušeně. Kežmarské Žleby. VIII. 1924.

17. **Puccinia Crepidis-grandiflorae** Hasler.

Uredo a teleutospory na

Crepis grandiflora Tsch. v subalpínském a alpském pásmu dosti vzácně. Popradské pleso 1600 *m.* 5. VIII. 1924.

18. **Puccinia Menthae** Pers.

Uredo a teleutospory na

Mentha arvensis L. na vlhkých polích v náhorní rovině. Kežmarok Hundsdorf. VIII. 1924.

19. **Puccinia Cirsii lanceolati** Schroeter.

Na *Cirsium lanceolatum L.* v náhorní rovině. Velká Lomnica. VIII. 1924.

20. **Puccinia Chondrillae** Corda.

Puccinia Mycelis Opiz.

Spermogonie, aecidie, uredo a teleutospory na

Lactura muralis Fries. v nižším pásmu subalpínském až as do 1200 *m.* U cesty k Zelenému plesu, 1200 *m,* Kežmarské Žleby. VIII. 1924.

21. **Puccinia Prenanthis purpureae** (Pers.) Lindr.

Spermogonie a aecidie na

Prenanthes purpurea L., v celém pásmu subalpinském, až do pásma kleče rozšířená. Zelené pleso, 1550 *m,* Belské Alpy u Žďáru, 1500 *m.* VIII. 1924.

22. **Puccinia Mulgedii** Sydow.

Spermogonie, aecidie, uredo a teleutospory na

Mulgedium alpinum Cass. hlavně v subalpinském pásmu rozšířená. Stoupá až k hranicím vysokohorského pásma. Bílá Voda, 1300 *m,* Zelené pleso, 1450 *m,* Popradské pleso. VIII. 1924.

23. **Puccinia aromatica** Bubák.

Uredo a teleutospory na

Chareophyllum aromaticum L., v subalpinském pásmu. U Tatranské Lomnice, 1200 *m,* Kežmarské Žleby, 1100 *m,* Zakopané, 900 *m.* Polštářky zimních výtrusů zvláště na lodyhách velké a krásně vyvinuté. VIII. 1924.

24. **Puccinia Pimpinellae** (Straus.) Mart.

Aecidium Pimpinellae Kirchner.

Spermogonie, aecidie, uredo a teleutospory na

Pimpinella magna L. f. *rubra* Hoppe, v »Holubyho dole« v Belských Alpách. 1300 *m.* VIII. 1924.

25. **Puccinia simplex** (Körnicke). Erikssohn et Henning.

Uredo a teleutospory na

Hordeum distichum L. na polích u Žďáru, 1000—1100 *m,* velice rozšířená a téměř celou úrodu ničící. VII.—VIII. 1924.

26. **Puccinia Poarum** Niels.

Aecidie na

Tussilago farfara L., v celém pásmu subalpinském řídce. Starý Smokovec, 1100 *m.* 27. VI. 1924. Tento druh jest daleko řidší, než Coleosporium Tussilaginis (Pers.) Kleb.

27. **Puccinia graminis** Pers.

Aecidium Berberidis Pers.

Uredo na

Deschampsia caespit. Beauv. var. *alpina* Roth. v alpinském pásmu Vysokých Tater. Belský košiár, 1550 *m.* Uredo a telentospory na *Avena sativa* L. Huncovce. VIII. 1924.

28. **Puccinia coronata** Corda.

Uredospory na

Calamagrostis Epigeois L. v subalpinském pásmu. Matliare, 1100 *m.* VII. 1924.

29. **Puccinia Lolii** Niels.

Uredo a teleutospory na

Avena sativa L. v náhorní rovině u Huncovců. VIII. 1924.

30. **Puccinia obscura** Schroet.

Uredospory na

Luzula maxima D. C., v celém subalpinském pásmu až do pásma kleče všeobecně rozšířená. Bílá plesa, 1650 *m*, Zelené pleso, 1450 *m*, Žďár, 1300 *m*, Starý Smokovec, 1200 *m*, Podspády, Zadní Koperšáky, 1600 *m.* Na *Lazula campestris* L., u Tatranské Lomnice. VIII. 1924.

31. **Puccinia Polygoni amphibii** Pers.

Aecidium sanguinolentum Lindr.

Uredo a telentospory na

Polygonum amphibium L. β) *terrestre* Leers. v náhorní rovině u Huncovců. VIII. 1924.

32. **Puccinia Mei-mammillata** Semadini.

Aecidium Mei Schroeter.

Aecidium Mei mutellinae Wint.

Teleutospory na spodní straně listů

Polygonum viviparum L. v alpinském pásmu velmi vzácně. »Holubyho důl« v Belských Alpách. 22. VII. 1924.

33. **Puccinia Acetosae** (Schum.) Körnicke.

Uredo Acetosae Schum.

Puccinia Rumicis Lasch.

Jen uredo na lodyhách a listech

Rumex Acetosella L. v subalpinském pásmu. U cesty k Zelenému plesu 1150 *m.* Uredo na

Rumex Aecetosa L. v náhorní rovině u Huncovců. VIII. 1924.

34. **Puccinia Hieracii** (Schum.) Mart.

Spermogonie, uredo a telentospory na různých druzích rodu Hieracium.

Tak ve Vysokých Tatrách na

Hieracium alpinum L., skoro v celém vysokohorském pásmu. »Holubyho důl« v Belských Alpách a na jiných místech tohoto pohoří, 1600 až 2000 *m*. Na

Hieracium caesium Fr. »Holubyho důl« v Belských Alpách. Na

Hieracium murorum L., v celém téměř subalpinském pásmu. Bílá voda, 1300 *m*, Zelené pleso, 1450 *m*, Zakopané. VIII. 1924.

35. **Puccinia Taraxaci** (Rebent.) Plowright.

Uredo a teleutospory na

Taraxacum nigricans Rchb., v subalpinském a alpinském pásmu všeobecně rozšířená. Kopa 1830 *m*, Bílá plesa 1650 *m*, »Holubyho důl«, Bujačí a jiná místa Belských Alp vápencových, 1300—2000 *m*. Popradské pleso. Žďár, Matliare. Na

Taraxacum officinale Web..Tatranská Lomnica, Kežmarok. VII. -VIII. 1924.

36. **Puccinia Leontodontis** Jacky.

Uredo a telentospory na

Leontodon hispidus L., v subalpinském a alpinském pásmu. Sedlo Kopy 1778 *m*. 24. VI. 1924. Na

Leontodon danubialis Jacq., v náhorní rovině u Kežmaroku. VII. 1924.

37. **Puccinia montivaga** Bubák.

Sekunderní uredo a teleutospory na

Hypochoeris uniflora Vill., ve vyskohorském pásmu. Zadní Kopersady, 1650 *m*. VIII. 1924.

38. **Puccinia Jaceae** Otth.

Uredo a teleutospory na

Centaurea Jacea L., v náhorní rovině u Kežmaroku. VIII. 1924.

39. **Puccinia Centaureae** D. C.

Uredo a teleutospory na

Centaurea Scabiosa L., ještě v alpinském pásmu na některých místech. Tak na př. v »Holubyho dole« v Belských Alpách. VIII. 1924. Na

Centaurea Austriaca Willd. Tatranská Lomnica, Matliare, 1000 až 1100 *m*. VIII. 1924.

40. **Puccinia Carduorum** Jacky.

Spermogonie, uredo a teleutospory na

Carduus glaucus Baumg., ve vysokohorském pásmu. »Holubyho důl«

a jiná místa Belských Alp vápencových, 1500—1800 *m*. Přední Koperšady 1650 *m*. Na Carduus glaucus nebyl tento druh dosud pozorován. Na

Carduus personata Jacq., v celém subalpinském pásmu všeobecně rozšířená. Zelené pleso 1550 *m*, »Holubyho důl«v Belských Alpách, Tatranská kotlina, Zakopané. Na

Carduus acanthoides L., v náhorní rovině. Velká Lomnica, Poprad, Kežmarok, Tatranská Lomnica. VII.—VIII. 1924.

41. **Puccinia Cirsii** Lasch.

Spermogonie, uredo a teleutospory na

Cirsium Erisithales Scop., v subalpinském a alpinském pásmu. »Holubyho důl« v Belských Alpách až do 1500 *m*. Na

Cirsium palustre Scop., v náhorní rovině a v subalpinském pásmu. Matliare 1100 *m*, Kežmarské Žleby 1000 *m*. VII.—VIII. 1924.

42. **Puccinia suaveolens** (Pers.) Rostrup.

Puccinia obtegens (Link.) Tul.

Spermogonie, uredo a teleutospory na

Cirsium arvense L. z náhorní roviny až do subalpinského pásma rozšířená. První generace: Žďár (všeobecně rozšířená od 850 až do 1100 *m*). Javorina. Druhá generace: Matliare 1100 *m*, »Holubyho důl« 1200 *m*. VII. až VIII. 1924.

43. **Puccinia Pyrethri** Rabh.

Uredo a teleutospory na

Chrysanthemum corymbosum L., v subalpinském pásmu rozšířená. Sáhá téměř až k hranici pásma vysokohorského. Zelené pleso 1500 *m*, Bílá Voda 1200 *m*. VIII. 1924.

44. **Puccinia conglomerata** (Strauss) Schum. et Kunze.

Teleutospory na listech

Homogyne alpina Cass., v pásmu subalpinském a v pásmu kleče všeobecně rozšířená. Bílá plesa 1650 *m*, Zadní Koperšady 1600 *m*, Zelené pleso 1550 *m*, Matliare, Tatranská Polianka. VII.—VIII. 1924.

45. **Puccinia Volkartiana** Ed. Fischer.

Polštářky zimních výtrusů okrouhlé, eliptické, neb prodloužené, jednotlivé, neb v kruzích a pak splývající dohromady, na listech v růžicích polštářkovité, dlouho epidermis přikryté, na starých lodyhách a listech nahé, černohnědé.

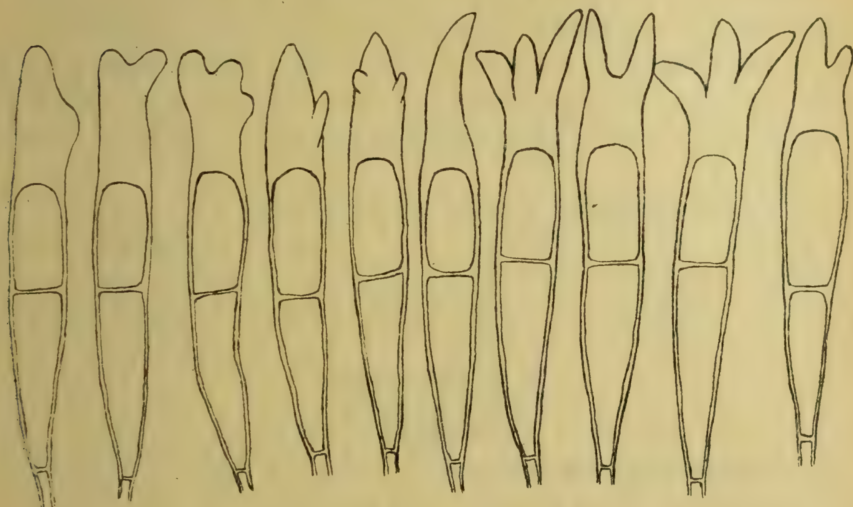
Teleutospory kyjovité, až kyjovitě-vřetenité, na hořejším konci obyčejně se dvěmi až třemi zubovitými, zašpičatělými, neb otupenými výrostky, řidčeji jednoduše přišpičatěné, velmi vzácně zaoblené, dolů zvolna ve stopku zúžené, na hranici obou buněk vzácně slabě zaškrcené, s výrostky 35—55 $\mu \times$ 8—16 μ. Dolejší buňka užší a delší, než hořejší,

řidčeji stejně dlouhá, neb i kratší. Membrána žlutohnědá, hladká, na hořejším konci velice silně ztluštělá (až 16 μ). Stopka pevná, žlutavá, kratší celého výtrusu (14—25 μ) a as 5 μ tlustá. Výtrusy neopadavé. Jednobuněčné výtrusy vyskýtají se velmi zřídka.

Na *Androsace Chamaejasme* Host. v alpinském pásmu Vysokých Tater velmi vzácně. Sedlo Kopy 1750 *m*. 29. VII. 1924. Napadené listy jsou nápadny oranžovým zbarvením kol kupek zimních výtrusů.

46. **Puccinia Ribis** D. C.

Teleutospory na svrchní straně listů



Puccinia Volkartiana Ed. Fischer.
Teleutospory z Androsace Chamaejasme. (Dle exemplářů sbíraných na Sedle Kopy 1750 m ve Vysokých Tatrách.) (Orig.)

Ribes petraeum Wulf., v subalpinském a alpinském pásmu všeobecně rozšířená. Bílá plesa 1650 *m*, Zelené pleso 1550 *m*, Popradské pleso 1500 *m*, v celých Belských Alpách. VII.—VIII. 1924.

47. **Puccinia Valantiae** Pers.

Teleutospory na

Gallium Cruciata L., v subalpinském pásmu až do 1250 *m* rozšířená. Na pasece u Bílé Vody 1250 *m*, Matliare 1100 *m*, VIII. 1924.

48. **Puccinia Glechomatis** D. C.

Teleutospory na

Glechoma hederáceum L., z náhorní roviny až do subalpinského pásma obecná. Tatranská Lomnica 1100 *m*, Matliare 1150 *m*, Velká Lomnica, Huncovce, Kežmarok. VIII. 1924.

49. **Puccinia Arenariae** (Schum.) Wint.
Teleutospory na
Stellaria nemorum L. v celém téměř subalpinském pásmu rozšířená. Pod Zeleným plesem 1400 *m*, Zadní Koperšady 1300 *m*, Matliare 1150 *m*. VIII. 1924.

2. Gymnosporangieae.

Gymnosporangium Hedwig.

50. **Gymnosporangium juniperinum** (L.) Fries.
Aecidium cornutum Gmel.
Spermogonie na svrchní straně, aecidie na spodní straně listu
Sorbus ancuparia L., z roviny až do pásma kleče všeobecně v celém území rozšířená. Bílá plesa 1614 *m*, u cesty k Zelenému plesu 1400 *m*, Velické pleso 1500 *m*, Morskie oko 1400 *m*, Žďár 1200 *m*, Tatranská Lomnica. VII.—VIII. 1924.

51. **Gymnosporangium Sabinae** (Dicks.) Winter.
Roestilia cancellata Reb.
Spermogonie na svrchní, aecidie na spodní straně listu
Pirus communis L., v náhorní rovině u Huncovců. VIII. 1924.

3. Phragmidieae.

Phragmidium Link.

52. **Phragmidium subcorticinum** (Schrank.) Winter.
Spermogonie, caeoma, uredo a teleutospory na
Rosa canina L., z roviny až do pásma subalpínského rozšířená. Kežmarské Žleby 1100 *m*, Tatranská Lomnica 1000 *m*, Huncovce atd. Na
Rosa centifolia L., Kéžmarok. VII.—VIII. 1924.

53. **Phragmidium Rosae alpinae** (D. C.) Schroeter.
Phragmidium fusiforme Schroeter.
Spermogonie, caeoma, uredo a teleutospory na
Rosa alpina L., v subalpinském pásmu Vysokých Tater všeobecně rozšířená. V tomto území není snad keře, který by nebyl nakažen touto houbou. Zelené pleso 1500 *m*, Bílá Voda 1300 *m*, Popradské pleso, Štrbské pleso, Žďár, Tatranská kotlina, Tatranská Lomnica, Smokvovec, Kéžmarské Žleby. VII.—VIII. 1924. Caeoma zvláště na receptakulích tvoří nápadné oranžové polštářky.

54. **Phragmidium Rubi Idaei** (Pers.) Winter.
Uredo a teleutospory na
Rubus Idaeus L., z roviny až do pásma kosodřeviny všeobecně rozšířená. Matliare, Zelené pleso 1550 *m*, Tatranská kotlina, Belské Alpy,

Bílá Voda, Kéžmarské Žleby, Zakopané, Štrbské pleso, Popradské pleso, Smokovec, Tatranská Polianka, Vyšné Hágy atd. VII. VIII. 1924.

55. **Phragmidium Rubi** (Pers.) Winter.

Uredo a teleutospory na

Rubus caesius L., pouze v náhorní rovině. Poprad. VIII. 1924.

Triphragmidium Link.

56. **Triphragmidium Ulmariae** (Schum.) Winter.

Uredo a teleutospory na spodní straně listů

Filipendula Ulmaria L., v subalpinském pásmu Vysokých Tater roztroušeně. Matliare. VIII. 1924.

II. Cronartiaceae.

Chrysomyxa Unger.

57. **Chrysomyxa Pirolae** (D. C.) Rostr.

Uredo na

Pirola minor L., v subalpinském pásmu. U cesty k Zelenému plesu 1300 *m*. 22. VII. 1924.

Cronartium Fries.

58. **Cronartium ribicolum** Dietrich.

Peridermium Strobi Kleb.

Uredo na spodní straně listů

Ribes petraeum Wulf. v subalpinském a alpinském pásmu. Belské Alpy u Žďáru 1600 *m*. 5. VII. 1924. Bílá plesa 1650 *m*. 10. VII. 1924. Telentospory na

Ribes alpinum L. Tatranská Lomnica 1200 *m*. 6. VIII. 1924. Belské Alpy u Žďáru 1600 *m*. 20. VII. 1924.

Eudophyllum Léveillé.

59. **Eudophyllum Sempervivi** (Alb. et Schw.) De Bary.

Na listech, řidčeji na květních lodyhách

Sempervivum montanum L., pásmem kosodřeviny počínaje, až na nejvyšší štíty velmi rozšířená. Bílá plesa 1650 *m*, Jahňačí 2240 *m*, Lomnický štít (pod vrcholem 2300 *m*), Sedlo Kopy 1700 *m*, Zelené pleso, Popradské pleso, Veliké pleso. Napadená rostlina jest nápadná bledě zelenou barvou a listy velmi prodlouženými. Nakažené květní lodyhy obyčejně květy nevytvořují.

III. Coleosporiaceae.

Coleosporium Léveillé.

60. **Coleosporium Cacaliae** (D. C.) Wagner.

Peridermium Magnusianum Ed. Fischer.

Peridermium Magnusii Wagner.

Uredo a teleutospory na spodní straně listů

Adenostyles albifrons Rchb., v pásmu subalpinském a alpinském všeobecně rozšířená. Zelené pleso 1600 *m*, Bílá plesa 1650 *m*, Štrbské pleso. Popradské pleso 1550 *m*, Velické pleso, »Holubyho důl« v Belských Alpách, Tatranská Kotlina, Morskie oko, Zadní Koperšady atd. VII.—VIII. 1924.

61. **Coleosporium Tussilaginis** (Pers.) Kleb.

Uredo a teleutospory na spodní straně listů

Tussilago farfara L., z roviny až do pásma subalpinského všeobecně rozšířená a obecná. Zelené pleso, Matliare, Tatranská Lomnica, Žďár. Štrbské pleso, Tatranská kotlina, Zadní Koperšady a Javorová dolina, Poprad, Kežmarok atd. VII.—VIII. 1924.

62. **Coleosporium Petasitis** De Bary.

Peridermium Bondieri E. Fischer.

Peridermium Dietelii Wagner.

Uredo a teleutospory na

Petasites albus L., v subalpinském pásmu Středních Karpat velice rozšířená. Stoupá na některých místech až do pásma alpinského. Zelené pleso 1500 *m*, »Holubyho důl« v Belských Alpách, Žďár, Bílá Voda, Zadní Koperšady, Tatranská Kotlina. VII.—VIII. 1924.

63. **Coleosporium Senecionis** (Pers.) Fr.

Peridermium oblongisporum Kleb.

Uredo a teleutospory na

Senecio nemorensis L., z roviny až do pásma kosodřeviny všeobecně rozšířená. Popradské pleso 1550 *m*, Zelené pleso 1500 *m*, Štrbské pleso, Tatranská Kotlina, Zakopané, Zadní Koperšady, Javorina, Morskie oko, Javorová dolina, Bělovodská dolina. Na

Senecio silvaticus L., v subalpinském pásmu roztroušeně. Matliare 1100 *m*. Na

Senecio subalpinus Koch., ve vyšším subalpinském a v pásmu kosodřeviny rozšířená. Zadní Koperšady 1700 *m*, Zelené pleso 1550 *m*. Bílá plesa 1600 *m*. Na

Doronicum austriacum Jacq., v pásmu kosodřeviny u Popradského plesa. VIII. 1924.

64. **Coleosporium Campanulae** (Pers.) Lév.
Peridermium oblongisporum Rostr.
Peridermium Rostrupii Kleb.
Peridermium Kosmahlii Wagner.

Uredo a teleutospory na různých druzích rodu *Campanula* ve Vysokých Tatrách z roviny až do alpinského pásma všeobecně rozšířená. Tak v rovině a v pásmu subalpinském na

Campanulla patula L., Kéžmarok, Matliare, Tatranská Lomnica.

Campanula Trachelium L., Tatranská Lomnica, Žďár 1100 *m*. Ve vyšších polohách jakož i v pásmu alpinském na

Campanula rotundifolia L. a

Campanula Scheuchzeri Vill. Morskie Oko 1300 *m*, Kopa 1800 *m*, Žďárská Vidla a Bujačí v Belských Alpách 1800—2150 *m*, Popradské pleso 1550 *m*. VII.—VIII. 1924.

IV. Melampsoraceae.

Thekopsora Magn.

65. **Thekopsora Galii** (Link) De Toni.
Melampsora Galii Winter.
Uredospory na

Galium sudeticum Tausch ve vysokohorském pásmu. Žďárská Vidla v Belských Alpách. VII. 1924.

66. **Thekopsora Vacciniorum** (Link.) Karsten.
Pucciniastrum Vaccinii Dietel.
Melanmpsora Vaccinii Winter.
Uredo na

Vaccinium vitis idaea L., v subalpinském pásmu roztroušeně. U cesty z Matliare k Zelenému plesu 1350 *m*. VII. 1924.

Hyalopsora Magnus.

67. **Hyalopsora Polypodii-dryopteridis** (Mong. et Nestl.) Magnus.
Melampsorella Aspidiotus (Peck.) Magnus.
Hyalopsora Aspidiotus (Peck.) Magnus.
Uredospory na

Phegopteris dryopteris Fée., v subalpinském pásmu Vysokých Tater všeobecně rozšířená. U Zeleného plesa 1300 *m*, u Žďáru v Belských Alpách, Popradské pleso, Kéžmarské Žleby 1100 *m*. VII.—VIII. 1924.

Melampsora Cast.

68. **Melampsora Larici-epitea** (Klebahn?) Fischer.
Uredo a teleutospory na různých druzích rodu *Salix* v celém území

Vysokých Tater z roviny až na nejvyšší štíty všeobecně rozšířená. Tak na

Salix Caprea L. Matliare, Kéžmarské Žleby.

Salix cinerea L. Tatranská Polianka, Smokovec.

Salix aurita L. Kežmarské Žleby.

Salix Silesiaca Willd. Bílá Voda, Zelené pleso 1550 *m*.

Salix Myrsinites L. var. *Jacquiniana* Koch, jen v nejvyšších polohách. »Holubyho důl« v Belských Alpách, Zelené pleso 1600 *m*.

Salix retusa L., ve vysokohorském pásmu. Bílá plesa 1660 *m*, Belské Alpy 1800—2000 *m*.

Salix reticulata L., v celých Belských Alpách vápencových všeobecně rozšířená. Bílá plesa 1650 *m*, Kopa 1800 *m*, »Holubyho důl« v Belských Alpách vápencových, Bujači atd. VII.—VIII. 1924.

69. **Melampsora alpina** Juel.

Uredo na

Salix herbacea L., pod vrcholem Gerlachovky (ca 2500 *m*). Polštářky výtrusů letních jednotlivé 0·2—0·5 *mm* široké, více méně okrouhlé, převážně na svrchní straně listu, zpočátku pokryté epidermis, později nahé, oranžově červené až hnědavé. Letní výtrusy nepravidelně kulovité až elipsoidické, 16—20 μ dlouhé, 12—16 μ široké, jemně ostnité, dosti tenkostěné. Paraphysy hlavaté, as 40—45 μ dlouhé, nejčastěji se žlutým obsahem. Hlava větší než letní výtrusy, 18—22 × 15—18 μ, s membranou tlustou 4—5 μ. Stopka as 5 μ tlustá. K tomuto druhu náleží as caeoma ze Saxifraga aizoides L. a Saxifraga muscoides L. Jelikož však genetická souvislost nebyla dosud infekčními pokusy zjištěna, uvádím toto caeoma jako »Caeoma saxifragarum D. C.« (viz čís. 76.). Taktéž se domnívám, že náleží k tomuto druhu uredo a telentospory ze Salix reticulata L., po případě i ze Salix Myrsinites var. Jacquiniana Koch. a Salix retusa L. v některých případech. Na Saxifraga aizoides a S. muscoides nalezl jsem vždy pouze caeoma, nikdy se mi nepodařilo nalézti uredo a telentospory. Voglino nalezl sice jednou vedle caeoma i uredo a telentospory a klade proto toto caeoma k druhu Melampsora saxifragarum (D. C.) Schroeter. Myslím však, že ve většině případů caeoma z těchto alpinských Saxifrag náleží k Melampsora alpina Juel. Tutéž domněnku vyslovuje i Fischer.

70. **Melampsora Laricis** R. Hartig.

Melampsora Larici-tremulae Kleb.

Uredo a teleutospory na

Populus Tremula L. Kežmarské Žleby, Tatranská Kotlina v hlubokých lesích. Pravděpodobně naše exempláry náležejí k tomuto druhu, neboť v této krajině borovice chybí a Chelidomium jest velmi vzácné, modřín pak jest zde velice rozšířen. VIII. 1924.

71. **Melampsora Lini** (Pers.) Desm.

Na listech a lodyhách různých druhů rodu *Linum*. V Tatrách na

Linum extraaxillare Kitt. ve vysokohorském pásmu vzácně. »Holubyho důl« 1600 *m* v Belských Alpách. Na

Linum catharticum L., v subalpinském pásmu u Žďáru 1300 *m*.

Melampsoridium Klebahn.

72. **Melampsoridium betulinum** (Pers.) Klebahn.

Uredo a teleutospory na

Betula verrucosa Ehrh. u Huncovců.

Betula pubescens Ehrh., v subalpinském pásmu. Kéžmarské Žleby 1050 *m*. VIII. 1924.

Rezy nedokonalé známé.

Aecidium.

73. **Aecidium cimicifugatum** Schweinitz.

Aecidie na spodní straně listů, řidčeji na řapících

Cimicifuga foetida L., v subalpinském pásmu. »Holubyho důl« v Belských Alpách 1300 *m*. VII. 1924.

74. **Aecidium Petasitidis** Sydow.

Pyknidy a aecidie na listech

Petasites albus L., v subalpinském pášmu. Stoupá často až do pásma vysokohorského. Tak na př. v »Holubyho dole« v Belských Alpách ještě ve výši 1700 *m*, Tatranská Kotlina, Popradské pleso 1500 *m*. VII.—VIII. 1924.

75. **Aecidium Phyteumatis** Ung.

Spermogonie a aecidie na listech

Phyteuma orbiculare L., v pásmu vysokohorském dosti rozšířená. Kopa 1800 *m*. 24. VI. 1924. Zadní Koperšady 1700 *m*. 2. VII. 1924.

Caeoma.

76. **Caeoma saxifragarum** D. C.

Caeoma na listech různých horských druhů rodu *Saxifraga* v alpinském pásmu Vysokých Tater velmi rozšířená. Na

Saxifraga aizoides L., Kopa 1800 *m*, Bílá plesa 1650 *m*, Zadní i Přední Koperšady, v celých Belských Alpách. Na

Saxifraga muscoides L., vzácnější.. Bílá plesa 1650 *m*, Belské Alpy 1400—2000 *m*. VII.—VIII. 1924. Snad náleží toto caeoma k Melampsora alpina Juel. (viz čís. 69.)

Summary.

Contribution to the knowledge of the High Tatras Uredineae.

The author talk in his work ower the list of the species Uredineae, which be collected during his travelling in the High Tatras (from 15. June to 15. Aug. 1924). The country he explored, is thus delimited. Begining from the town Zakopané to Javorina, than is extending over the south-west projections of Spišská Magura to Tatranská Kotlina, from here is stretching farther on the plain of Kéžmarok and Poprad, and than in the direction of the railway Košice-Bohumín goes to Štrba and Štrba-Lake. Most admirable is the appear of Puccinia Volkartiana Ed. Fischer on Androsace Chamaejasme, which was described by Ed. Fischer from Switzerland in the year 1905. Also the appear of Melampsora alpna Juel., nearly on the summit of Gerlachovka (ca 2600 *m*) is very interesting. To this species belongs perhaps caeoma from Saxifraga aizoides L. and Saxifraga muscoides L. which appears very often here in the alpine zone. Totaly the author describes systematical 76 species of Uredineae from this country.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 25.

Dr. ZDENĚK HORÁK:

PRINCIP ENERGIE
A
ROVNICE FYSIKY.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 25.

Dr. ZDENĚK HORÁK:

PRINCIP ENERGIE
A
ROVNICE FYSIKY.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Princip energie a rovnice fysiky.

Napsal Dr. *Zdeněk Horák.*

Účelem této práce jest zkoumati otázku, jak dalece je princip zachování energie způsobilý, aby se stal základem axiomatického i matematického vybudování fysiky.

Naprosto všeobecná — podle našeho přesvědčení — platnost principu energie staví jej mezi nejdůležitější zákony přírodních věd, zvláště fysiky. Praví nám, že energie je nevytvořitelná a nezničitelná. Abychom však mohli tento princip v jednotlivých případech aplikovati, musíme energii vyjádřiti pomocí veličin, jež umíme změřiti nebo vypočítati. To ovšem nemůžeme učiniti definitoricky, předem pro všechny případy, což je nutný nedostatek každého obecného zákona, neboť obecně definované pojmy vyžadují v každém konkrétním případě vhodné interpretace, jíž lze dosáhnouti jenom experimentálně, ovšem na základě obecně vyslovených vlastností, jež jsme pro ony pojmy postulovali.

Jakmile známe energii, podává nám již rovnice vyjadřující princip energie — budeme ji s Planckem nazývati »rovnicí energie« — jednu podmínku, kterou má splňovati uvažovaný fysikální proces. Je patrno, že obecně tato rovnice neurčuje jednoznačně průběh děje, vyslovujíc pouze jisté omezení v počtu možných, myslitelných pochodů. Mohli bychom udati nekonečně mnoho zákonů, jež neodporují principu energie, ale o nichž přece nemůžeme tvrditi, že by ve fysice platily. Odvoditi na základě tohoto principu fysikální zákony, není tedy úlohou čistě matematickou. K principu energie bude třeba připojiti další postuláty, vyjadřující fysikální poznatky. Podle toho, jak volíme tyto pomocné hypotesy, docházíme k různým způsobům řešení uvedeného problému. Jde jen o to, aby byly co nejjednodušší a zároveň nejobecnější a aby z nich správné rovnice plynuly skutečně logicky bezvadně.

Koncem minulého století bylo učiněno více pokusů v tomto směru. Omezím se však na stručnou kritiku nejdůležitějších prací, týkajících se v první řadě odvození pohybových rovnic pro systém hmotných bodů, jež postačí k orientaci, do jakého asi stadia dospělo řešení celé otázky.

Jest to především práce Planckova a Helmova, jež vznikly téměř současně roku 1887. *M. Planck*,[1]) aby docílil rozložení rovnice energie pro hmotný bod na tři rovnice pohybové, zavádí »princip superposice energií« (Superpositionsprinzip): »Energie hmotného systému je součtem jednotlivých, v systému obsažených, navzájem nezávislých druhů energie a každé vnější působení (Wirkung) mění jen ten druh energie, který mu právě odpovídá.« Aplikací tohoto principu na bod hmoty *m* podrobený síle o složkách *X, Y, Z* dochází z rovnice energie

$$d\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$

ke třem relacím

$$d\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}=X\,dx, \ldots, \ldots,$$

které skutečně vedou k Newtonovým pohybovým rovnicím. K tomu dodává: »Samozřejmě nemůže toto odvození činiti nároku na nějaký důkaz obou prvních axiomů Newtonových, neboť použitá věta o superposici energií nemůže býti a priori aplikována...« Dále pak: »Kdy však tento rozklad skutečně je proveditelný a kdy vede k správným důsledkům, o tom může nás poučiti jedině zkušenost. Neboť, že na př. působení podél směrů jednotlivých pravoúhlých souřadnic účinkují nezávisle na sobě, jest přece věta plynoucí ze zkušenosti, kterou nemůžeme za žádných okolností, při jakékoliv představě obejíti...« Ale i když nepřihlížíme k tomu, že Planckův princip neplatí zcela přesně (jak sám praví) a že nelze jej vždy aplikovati, je s hlediska matematického, jak se zdá, nezpůsobilý, aby spolu s principem energie vedl i v obecnějších případech k hledaným rovnicím, ježto podmínky jeho platnosti nedají se vyjádřiti matematicky. Mimo to není zaručena jednoznačnost rovnic, k nimž jeho užití může vésti. Na tom nic nemění mínění Planckovo, že mechanika dá se právě tak málo, jako každá jiná část fysiky, zbudovati cestou ryze deduktivní. Stejně jako je samozřejmo, že při budování každé přírodní vědy musíme vyjíti ze zkušenosti, je také jasno, že v teorii musíme se snažiti základní empirické poznatky shrnouti v takové axiomy či principy, z nichž čistě deduktivně a logicky bezvadně vyplynou ostatní experimentálně zjištěná fakta.

G. Helm své původní pojednání[2]) později vlivem Boltzmannovým přepracoval. Podrobnější diskusí však bychom seznali, že ani jeho nové

[1]) M. Planck: Das Prinzip der Erhaltung der Energie, p. 165 a násl. (Wissenschaft und Hypothese, VI., 1908.)

[2]) G. Helm: Ueber die analytische Verwendung des Energieprincips in der Mechanik. (Ztschr. für Math. und Phys., XXXV., 1890, p. 307.)

odvození pohybových rovnic není zcela správné. Helmův princip vede opravdu k cíli jenom ve formulaci *Neumannově*, který postupuje takto:[3]) »Nechť na bod hmoty m o souřadnicích x, y, z, v absolutně klidném systému souřadném působí síla o složkách X, Y, Z. Přírůstek kinetické energie za čas dt jest

$$dT = m\ (x''\ dx + y''\ dy + z''\ dz).$$

Práce silou za týž čas vykonaná

$$dA = X\ dx + Y\ dy + Z\ dz.$$

Definice: Vzhledem k předcházejícímu označme výraz

$$m\ x''\ dx$$

jako směru x odpovídající přírůstek kinetické energie a výraz

$$X\ dx$$

jako ve směru x vykonanou práci.

Nový princip: Pro každý absolutně pevný (nepohyblivý) směr platí formule

$$dT = dA.«$$

Zvolíme-li za onen pevný směr postupně osy pravoúhlé soustavy souřadné, obdržíme po zkrácení dx, dy, dz pohybové rovnice. Helm k tomu připojuje rozšíření na obecné souřadnice Lagrangeovy, které však je v podstatě pouhou transformací pravoúhlých souřadnic v obecné, nikoliv odvozením Lagrangeových rovnic z obecného tvaru energie hmotného systému.

Podotýkám ještě, že tento i Planckův postup mlčky předpokládá, že dx, dy, dz, resp. $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ nejsou rovny nule. Neobdrželi bychom žádaných rovnic, kdyby bod byl na př. na počátku děje v klidu. Lze sice očekávati, že rovnice ty platí i v okamžiku klidu, ale v tom už je skryt předpoklad, že tvar pohybových rovnic je nezávislý na stavu bodu. A právě na základě tohoto předpokladu, jak uvidíme, lze získati z principu energie potřebný počet rovnic.

Známý princip *Ostwaldův*[4]) z roku 1892 »Ze všech možných změn energie nastane ta, která vykazuje největší přeměnu« vede za jistých předpokladů spolu s principem energie k rovnicím mechaniky, avšak k získání obecných výsledků je nutno vhodně doplniti jeho formulaci, z níž je pak zřejmo, že je pouze v jiném tvaru vysloveným principem nejmenší akce.[5]) Proto nebudu se jím blíže zabývati.

---

[3]) G. Helm: Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwickelung, Leipzig 1898, p. 229—231.

[4]) Lehrbuch der allgemeinen Chemie.

[5]) Viz na př. M. Réthy: Das Ostwaldsche Prinzip vom Energieumsatz in der Mechanik. (Math. Ann. 59, p. 554.)

Zajímavé jest pojednání *E. Padovy*,[6]) který učinil pokus odvoditi Lagrangeovy rovnice druhého tvaru přímo v obecných souřadnicích q_i. Předpokládá kinetickou energii soustavy hmotných bodů ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} \sum_{rs} a_{rs} q'_r q'_s,$$

její diferenciál pak píše ve tvaru

$$dT = \sum_i dq_i \left[\sum_{kh} \left[{h\, k \atop i} \right] q'_h q'_k + \sum_h a_{hi} \chi_h \right]$$

$$= \sum_i dq_i \left[\sum_{kh} \left[{h\, i \atop k} \right] q'_h q'_k + \sum_h a_{hi} \chi_h \right],$$

při čemž $\chi_h\, dt$ značí přírůstek obecné rychlosti q'_h během času dt. Splňují-li tedy χ_h rovnice

$$\sum_h a_{hi} \chi_h + \sum_{hk} \left[{h\, k \atop i} \right] q'_h q'_k = 0.$$

o nichž dokázal, že jsou invariantní pro libovolné transformace, jest $dT = 0$. Takto stanovená χ_h nazývá Padova složkami »spontánního zrychlení«. Působí-li na systém vnější síly, bude míti skutečné zrychlení q''_h obecně jinou hodnotu než χ_h takže nastane změna kinetické energie

$$d\,T = \sum_i dq_i \sum_h a_{hi} (q''_h - \chi_h).$$

Tato musí býti rovna práci sil

$$\sum_i Q_i \; dq_i.$$

Odtud ihned píše Padova pohybové rovnice

$$Q_i = \sum_h a_{ih} (q''_h - \chi_h),$$

jež jsou totožné s Lagrangeovými. Tento poslední krok je však zřejmě neodůvodněn. Další nedostatek tohoto odvození je ten, že není jisto, že uvedené rovnice pro χ_h jsou jediné invariantní rovnice, jež stanoví χ_h tak, aby $dT = 0$. Padova sice ukazuje, že druhý, výše uvedený tvar dT nevede k invariantním rovnicím, to je však téměř bezcenné, ježto diferenciál energie můžeme upraviti nekonečně mnoha způsoby na lineární formu diferenciálů dq_i, jak ukáži v § 4. Nelze tedy práci Padovovu pokládati za řešení našeho problému, je však pozoruhodná z těchto důvodů. Složky spontánního zrychlení souvisí velmi jednoduše se změnami složek rychlosti při paralelním posunutí v Riemannově prostoru, jehož metrika je stanovena formou T. Mimo to se domnívám, že byl první, kdo dal Lagrangeovým rovnicím tvar

$$\sum_h a_{ih} q''_h + \sum_{hk} \left[{h\, k \atop i} \right] q'_h q'_k = Q_i,$$

který se nyní v literatuře častěji vyskytuje.

---

[6]) E. Padova: Sulle equazioni della dinamica. (Atti del reale Istituto Veneto, VI. (1894), p. 1640.)

Zbývá promluviti o *Schützově* principu »absolutního zachování energie«, který lze vysloviti takto:[7]) Princip energie platí nezávisle na rovnoměrné translaci hmotného světa vůči geometrickému prostoru (platnost jeho se neruší rovnoměrnou translací). Označíme-li α, β, γ složky této translace a u, v, w složky rychlosti bodu, na nějž působí síla X, Y, Z, zní rovnice energie

$$\left[X(u+\alpha)+Y(v+\beta)+Z(w+\gamma)\right]dt=$$
$$=d\frac{m}{2}\left[(u+\alpha)^2+(v+\beta)^2+(w+\gamma)^2\right].$$

Volíme-li nejprve $\alpha=\beta=\gamma=0$ a tak vzniklou rovnici odečteme od rovnice plynoucí pro $\alpha \neq 0$, obdržíme

$$X\alpha\ dt=d\ (m\alpha u)\quad \text{čili}\quad X=m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot$$

Princip sám je sice velmi plausibilní, ale poskytuje vždy jen tři rovnice. Nevede tedy k úplnému řešení již ani v případě systému dvou (volných) bodů, podávaje pouze na základě III. Newtonova axiomu větu o těžišti. Mimo to nelze jej přímo aplikovati na obecné souřadnice.

Celkem můžeme říci, že mimo princip Ostwaldův žádné z uvedených řešení neposkytuje více než pohybové rovnice v pravoúhlých souřadnicích. Je patrno, že rozšíření těchto metod na obecné souřadnice není na snadě, ježto jsou založeny právě na specielních vlastnostech souřadnic pravoúhlých. Proto také nelze některou z nich dospěti na př. k Eulerovým rovnicím pro těleso tuhé, aniž bychom musili pokládati těleso za souhrn jednotlivých bodů, což právem vytýká Boltzmann.[8]) Soudí ostatně, že odvození těchto rovnic z výrazu pro energii tělesa, stejně jako získání příslušných rovnic ze vzorců pro energii elastickou a hydrodynamickou, bylo by vědě prospěšné. (Zur Energetik, Popul. Schriften, p. 137.)

Stran literatury odkazuji na Encyklopädie der math. Wiss., IV., 1, p. 115 a na Helmovu knihu o energetice.[3])

V následujícím pokusím se získati z principu energie pokud možno obecné výsledky pomocí jistých předpokladů, které jsou u nejdůležitějších zjevů fysikálních vskutku splněny. Ukáži, že opravdu lze z rovnice energie odvoditi právě potřebný počet rovnic diferenciálních, řídících děje v obecných systémech fysikálních, jichž tvar však jsem stanovil jen ve speciálním případě, kdy energie nezávisí na vyšších než prvních derivacích parametrů dle času, tyto pak obsahuje jen v kvadratické formě

[7]) J. R. Schütz: Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. (Gött. Nachr., 1897, p. 114.)

[8]) L. Boltzmann: Ein Wort der Mathematik an die Energetik. (Wied. Ann., 57., 1896, Popul. Schriften.)

s koeficienty libovolně závislými na parametrech samých. Bude ovšem třeba zavésti některé obecnější pojmy, jež se však objeví zcela účelnými.

I. Formulace problému a jeho řešitelnost.

§ 1. Obecný systém. Než přistoupím k úvahám o otázkách, jimiž se chci zabývati, pokládám za vhodné předeslati toto: Když na základě experimentů či pozorování odvozujeme přírodní zákony, indukcí rozšiřujíce platnost zjištěných fakt, činíme nutně předpoklad, který krátce lze vyjádřiti slovy »přírodní zákony platí stejně v ž d y a v š u d e«, čili za stejných podmínek nastanou vždy a všude tytéž děje přírodní. Proto jsme přesvědčeni, docílíme-li dvakráte týchž okolností s jistou přesností, že nastanou v obou případech tytéž zjevy v mezích stejné přesnosti. V tom jeví se také podstata všech důkazů, plynoucích »z důvodů symetrie«. Uvedený předpoklad nevedl dosud ke sporu se zkušeností, takže není důvodu pochybovati o jeho oprávněnosti. Suponujme tedy axiomaticky platnost věty:

(I) *Zákony přírodní jsou nezávislé na absolutní poloze v prostoru a na absolutním čase.*

Při tom ovšem stojíme na stanovisku klasické fysiky, kde užité pojmy mají zcela určitý význam. Předpoklad l o g i c k é existence a b s o l u t n í h o č a s u a p r o s t o r u položil na př. G. Hamel v čelo svých axiomů, na nichž buduje mechaniku.[9])

Hořejší věta vlastně vyjadřuje, že prostor je fysikálně homogenní a isotropický a že přírodní zákony jsou stále tytéž. Stejná nezávislost plyne odtud také pro veličiny, mezi nimiž existující vztahy vyjadřují fysikální zákony a které nazýváme »fysikálními veličinami«. V následujícím budu míti příležitost užíti některých důsledků axiomu (I).

A nyní uvažujme *obecný systém fysikální,* čímž rozumíme souhrn objektů, jež mohou za jistých podmínek podstoupiti fysikální změny, jinými slovy, jimiž mohou probíhati fysikální děje. Takový systém sestrojíme, vybereme-li si určitá tělesa nebo části prostoru vyplněné hmotami a sestavíme-li je nějakým způsobem, takže po případě mohou na sebe vzájemně působiti. Pak všechen ostatní svět tvoří vnější podmínky, v nichž se systém nachází. Veškeré působení těles a hmot, jež k systému nečítáme, nazýváme *vnějším.* Dále pravíme, že systém má v každém okamžiku určitý *stav.* Aby tento pojem měl fysikální význam, musí býti ve shodě s axiomem (I). Tu ovšem pokládáme vnější podmínky za s t e j n é, pokud se ve vnějším světě nic nezměnilo, a název ten přenášíme i na vnější působení. Kdykoliv se octne systém v týchž podmínkách vnějších

---

9) G. Hamel: Ueber die Grundlagen der Mechanik. (Math. Ann., 66, 1908.)

i v témž stavu, musí se podle (I) chovati vždy stejně. Naopak musíme dva stavy systému pokládati za totožné, když za stejných podmínek jeví stejné vlastnosti. Tak docházíme k této definici stavu: *ve dvou případech je fysikální systém v tomtéž stavu, reaguje-li na libovolná, ale v obou případech stejná vnější působení týmž způsobem.* Definice tato ovšem předpokládá, že dva různé stavy vždy dovedeme rozpoznati vhodnou volbou vnějších působení.

Probíhá-li v systému fysikální děj, t. j. mění-li se jeho stav, můžeme průběh sledovati pomocí fysikálních vlastností systému, kterými je charakterisován způsob, jakým reaguje na venek. Dovedeme-li tyto vlastnosti jednoznačně stanoviti skalárními veličinami, dostaneme z každého měření, provedeného v určitém okamžiku, řadu čísel, jež odpovídají příslušnému okamžitému stavu. Zjistíme-li pak, že systém během konečného intervalu časového neměnil svého stavu, pravíme, že systém v oné době měl stálou, neproměnnou *polohu* či *konfiguraci.* V tomto speciálním případě »klidu« nazýváme čísla, stanovící úplně vlastnosti systému, jeho *parametry.* Volba i počet těchto parametrů může býti ovšem různý. Při konstrukci systému můžeme mu předepsati jisté vlastnosti; podobně u systémů, s nimiž se setkáváme ve skutečnosti, tyto vlastnosti konstatujeme. Na základě jich lze pak stanoviti určité číslo, které udává *nejmenší* počet všech parametrů, jež jim přiřazenou konfiguraci úplně vystihují a jednoznačně stanoví. Jsou-li tyto parametry navzájem nezávislé, nazýváme toto číslo *stupněm volnosti* či *volností* systému. Nejsou-li nezávislé, sluje volností počet jich zmenšený o tolik jednotek, kolik nezávislých relací platí mezi nimi. V prvém případě předpokládejme, že ony parametry probíhají spojitě určité obory hodnot, když se konfigurace systému spojitě mění v jistých mezích. Pravím, že jsou spojitými funkcemi konfigurace a nazvu je *charakteristickými parametry.* Systémy, u nichž takové parametry existují, označím jako *holonomní,* systémy, pro něž nelze užíti nezávislých parametrů, jako *anholonomní.* Známe-li v jistém okamžiku hodnoty všech parametrů, není tím obecně určen stav systému. Neboť danou konfigurací může systém procházeti rozmanitým způsobem a musíme připustiti, že na tomto průchodu závisí i vlastnosti, jež v tom okamžiku má. Proto k určení stavu je třeba také znáti, jak se parametry v nejbližším čase mění, tedy jich derivace dle času až do jistého řádu. Jsou-li nejnižší derivace, které již nemají vlivu na reagování systému na vnější působení, řádu r, pravíme, že systém je rovněž řádu r.

[*Poznámka:* Uvedená definice stavu neshoduje se formálně s definicí Planckovou (¹) p. 120.): »Stav hmotného systému v určitém čase jest souhrn všech veličin, jichž okamžitými hodnotami je úplně stanoven

celý časový průběh procesu odehrávajícího se v systému.« (Vnější účinky jsou zde ovšem vyloučeny.) Avšak dva stavy stejné podle naší definice vedou při stejném vnějším působení k témuž průběhu děje v nejbližším okamžiku. Po uplynutí této nekonečně krátké doby však v obou případech musí nastati opět týž stav, ježto stejným procesem ze dvou stavů totožných dospěje systém zase k stavům totožným. Tedy počátečním stavem a vnějším působením je stanoven jednoznačně průběh celého děje. Požadavek, který klade na stav Planck, je tedy zahrnut v naší definici.]

§ 2. Energie. Síla. Při budování teorie vycházíme od jistých základních představ a pojmů a pro ně postulovaných premis. Není ovšem možno všechny pojmy definovati, proto v přírodovědeckých teoriích musíme některé z nich pokládati za dané zkušeností. Tyto apriorní pojmy bychom mohli voliti účelně tak, že pro každou část či obor fysiky bychom vybrali nejvhodnější, z nichž nejsnáze plynou všechny ostatní pojmy, které vystupují v dotyčné skupině zjevů. Chceme-li však docíliti jednotného logického podkladu pro celou fysiku, musíme hledati pojmy obecné, společné celé fysice nebo aspoň některým jejím částem.

Takovým obecným pojmem par excellence jest energie. S tohoto stanoviska jsme tedy vedeni k tomu, zvoliti energii za onen předem daný pojem, na jehož definici resignujeme. Při tom ovšem předpokládáme, že dovedeme skutečně v daném případě energii měřiti a to na základě vlastností, které jí přisuzujeme. Typickou její vlastnost vyjadřuje právě princip energie, který vyslovíme takto: *Pro každý fysikální systém existuje jistá funkce jeho stavu, jejíž změna během určité doby je rovna energii zvenčí systému dodané během téhož času.* Tuto funkci nazývám *vlastní energií systému.* Zde máme již předpis, jak měřiti změny energie libovolného systému, dovedeme-li měřiti energii dodanou vnějším působením. Přijmeme-li na př. energii mechanickou za známou, můžeme stanoviti z principu energie změny energie každého systému, na který lze mechanicky působiti, nebo jehož energii můžeme přeměniti v energii mechanického systému. Není-li vůbec vnějšího působení, pravíme, že systém je *isolován,* a jeho vlastní energie je stálá. Vlastní energie systému podle uvedené definice nezávisí *explicite* na vnějších podmínkách, na vnějším působení. Někdy se užívá názvu energie systému i pro veličiny, jež nezávisí jen na stavu systému, nýbrž i na vnějším působení. Ty ovšem nepředstavují vlastní energii a neplatí pro ně princip energie v uvedeném tvaru. (Na př. u mechanického systému konservativního odpovídá vlastní energii součet kinetické a vnitřní potenciální energie.) Protože však veškeré další úvahy týkají se vždy vlastní energie, budu ji častěji nazývati prostě energií (systému).

Abychom mohli princip energie vyjádřiti matematicky, musíme především najíti matematický výraz pro energii. Vyjděme z určitého stavu systému a uveďme jej dvojím od sebe různým vnějším působením do jiného, v obou případech však téhož stavu. Po ukončení obou pochodů není mezi oběma systémy fysikálního rozdílu, jak plyne z definice stavu, takže musíme naměřiti v obou případech tutéž změnu energie proti stavu původnímu. Z toho plyne, že změna energie je stanovena jednoznačně změnou stavu. Nepřihlížíme-li tedy k arbitrární aditivní konstantě, můžeme říci, že energie jest jednoznačnou funkcí veličin, jež určují stav: parametrů a jich derivací dle času až do určitého řádu. Při tom předpokládáme, že stav systému nezávisí explicite na čase, což odpovídá požadavku, že předepsané vlastnosti systému — jeho sestavení — nejsou na čase závislé, čili, že máme během celého děje týž *skleronomní* systém. Není-li tomu tak, vstupuje čas mezi veličiny určující stav systému, jejž pak nazýváme *rheonomním.* Pak také energie, jsouc funkcí stavu, může obsahovati čas explicite, což u skleronomního systému není možno podle (I). V následujícím budeme uvažovati systémy skleronomní, ježto rovnice pro tyto systémy snadno lze rozšířiti i na rheonomní. Ještě budiž podotknuto, že funkce představující energii má zcela určitý tvar při zvolených parametrech charakteristických, ježto hodnota energie je stanovena pro libovolné jejich hodnoty.

Když stanovíme energii systému jako funkci stavu, musíme ještě znáti vnější působení po stránce energetické, musíme dovésti měřiti nebo počítati energii, kterou při určitém působení dodáme systému během jistého času. Má-li se však měniti energie systému, musí se měniti také jeho stav, takže stačí znáti energii dodanou při určité změně stavu. Pak můžeme princip energie vyjádřiti matematicky. Působíme-li na systém dodávajíce mu energii, bude se jeho stav spojitě měniti, mění-li se ono vnější působení spojitě. Systém přechází z jedné konfigurace do druhé, při čemž jsou parametry spojité funkce času. Tím se stává také energie spojitou funkcí času t prostřednictvím veličin určujících stav. Během intervalu $(t, t + dt)$ nechť se změní vlastní energie E o dE. Energii systému dodanou označme dP, ač tato nekonečně malá veličina není obecně úplným diferenciálem nějaké funkce stavu. Pro tento elementární děj platí rovnice energie

$$dE = dP.$$

Přihlédněme nyní k veličině dP, udávající energii dodanou systému během času dt. Předpokládejme, že je téhož řádu jako přírůstky veličin určujících stav, takže nedbajíce veličin řádů vyšších, můžeme dP pokládati za lineární funkci oněch přírůstků, jež lze nahraditi diferenciály.

Ježto uvažujeme systémy skleronomní, nebude mezi nimi *dt*, a protože energie se nemůže měniti beze změny stavu, jest ona funkce homogenní. Avšak vzhledem k spojitosti děje mění se stav jen za současné změny konfigurace. Tím jsme vedeni k předpokladu, že *dP* je lineární formou diferenciálů parametrů. Vnější působení, které splňuje tuto suposici, budu nazývati ***působením silovým*** či působením ***síly*** a energii dodanou tímto způsobem ***prací*** silou vykonanou.

Užil jsem slova síla, jehož význam potřebuje objasnění. Budiž vyjádřením toho, co kvalitativně i kvantitativně charakterisuje vnější působení (silové) čili způsob, jakým dodáváme systému energii i její množství. Neboť nestačí znáti na př. velikost vykonané práce, poněvadž tutéž energii lze systému dodati různým způsobem, na němž obecně bude také záviseti účinek na stav systému. Mimo to dodaná práce závisí též na okamžitém stavu, který spolu s vnějším působením určuje změnu, jež v daném čase nastane. To musíme připustiti vzhledem k definici stavu. Těmito úvahami jsme vedeni k tomu, pokládati silové působení za stanovené, známe-li hodnoty všech koeficientů formy *dP* v každém okamžiku, resp. jejich závislost na stavu systému a čase. Definujeme tedy jako ***sílu*** na systém působící ***souhrn koeficientů diferenciální formy dP***. Je ovšem třeba koeficienty, jež nazveme jejími ***složkami***, jednoznačně stanoviti. Toho docílíme tím, že zjistíme práci vykonanou při libovolné variaci konfigurace systému, vycházející z polohy dané, za předpokladu, že ***komponenty síly jsou nezávislé na volbě oné variace.*** Dvě síly jsou stejné, když mají stejné všechny složky. Jsou-li všechny komponenty síly rovny nule, není vnějšího působení, systém je isolován.

§ 3. Formulace úlohy. Jde o to, stanoviti zákony, jimiž se řídí průběh dějů ve fysikálním systému při známém silovém působení. Při tom intervenují jednak vlastnosti systému, kterými však celý proces není určen. Ve smyslu definice stavu musíme se domnívati, že záleží také na tom, v jakém stavu byl systém na počátku děje. Jakmile však známe tento počáteční stav, je celý proces jednoznačně stanoven při daném vnějším působení, jak plyne z definice stavu. Uvažme, jak dalece jest počáteční stav libovolný. Zkušenost ukazuje, že různým působením můžeme přivésti týž systém do velmi různých stavů, z nichž každý vhodným uspořádáním lze učiniti počátečním stavem pro nový proces probíhající pod vlivem jiných úplně libovolných sil, které necháme působiti samotny od určitého okamžiku. Z toho je patrno, že počáteční stav nezávisí na vnějším působení. Logicky vyplývá tento poznatek z předpokladu, že stavy, jimiž může systém probíhati, jsou omezeny jedině vlastnostmi systému, což matematicky vyjádřeno praví, že parametry a jejich derivace mohou probíhati všechny hodnoty, jež jsou ve shodě s podmínkami danými

konstrukcí systému. Jedná se tedy o stanovení průběhu děje v systému, podléhajícím známému silovému působení, při daném počátečním stavu. K vůli matematickému popisu jest třeba nalézti problém matematický této úloze ekvivalentní. Stanoviti průběh děje v systému znamená určiti v každém okamžiku jeho stav. Toho dosáhneme, jakmile budeme znáti v každém čase hodnoty všech parametrů a jich derivací až do jistého řádu. K tomu opět stačí znáti parametry jako funkce času, které ovšem musí splňovati všechny dané podmínky. Ježto počátku děje můžeme přiřaditi libovolný bod časové škály, lze náš problém formulovati takto:

Najíti rovnice, které stanoví při daném silovém působení jednoznačně všechny parametry jako funkce času tak, že splňují dané podmínky a pro určitý čas mají spolu se svými derivacemi až do jistého řádu předem dané hodnoty.

Je-li systém řádu *r*, volnosti *n*, musí býti dáno *nr* hodnot parametrů a jich derivací. Z toho soudíme, že úloha je řešitelna soustavou řádu *nr* diferenciálních rovnic, na př. *n* simultánními rovnicemi obyčejnými řádu *r*.

Nám se bude jednati o řešení tohoto problému na základě principu energie. Matematicky je tento princip vyjádřen jedinou rovnicí, takže sám o sobě mohl by vésti k cíli jen v případě jednoho stupně volnosti. Abychom získali dostatečný počet rovnic, musíme učiniti další předpoklady. Tu se naskýtá otázka, má-li vůbec smysl vycházeti z principu energie při odvozování hledaných rovnic, neboť vztah mezi nimi a principem energie mohl by býti v jednotlivých případech různý, takže by obecnost našich úvah zůstala nevyužita. Ve fysice však pozorujeme významný fakt, že systémy, jichž energie je vyjádřena touž funkcí parametrů a jejich derivací, řídí se týmiž zákony (připomínám jen mechaniku, hydrodynamiku a elektrodynamiku). Můžeme se domnívati, že je tomu tak ve všech případech. Tím nabýváme přesvědčení, že tvar energie a diferenciální zákony pro systém platné souvisí určitým jednoznačným způsobem, že *existuje ve fysice obecně platný předpis, jak z rovnice energie dospěti k příslušným zákonům.* Je-li tato hypotesa splněna, pak by bylo jistě výhodné zmíněný předpis znáti, je-li ovšem přiměřeně jednoduchý a obecný. V tom smyslu budeme také uvedenou úlohu řešiti. Problém si rozdělíme na dva: nejprve ukážeme, že z rovnice energie lze dospěti k žádanému počtu rovnic pomocí jistého předpokladu, potom teprve přistoupíme k tomu, abychom tyto rovnice stanovili tak, aby vyjadřovaly skutečně platné zákony. Uvidíme, že první část úlohy lze řešiti zcela obecně, kdežto přesný tvar hledaných rovnic podaří se nám udati jen pro systémy určitého druhu, které však se ve fysice nejčastěji vyskytují.

§ 4. *Rozklad rovnice energie. Silový axiom.* Abych nerušil chod dalších úvah, vyřeším předem jednu čistě matematickou úlohu.

Mějme lineární formu n-ární v proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$. Ptejme se, jak je nutno voliti její koeficienty $A_1, A_2, \ldots A_n$, jež pokládáme obecně za funkce proměnných x, aby byla rovna nule pro všechny hodnoty těchto proměnných, t. j., aby platila identicky rovnice

$$\sum_k A_k x_k = 0. \tag{1}$$

Je patrno, že můžeme voliti $n-1$ koeficientů libovolně; pak ovšem je zbývající jednoznačně stanoven relací

$$A_i = -\frac{1}{x_i} \sum_{k(=|=i)} A_k x_k . \tag{2}$$

Abychom však obdrželi symetrické vyjádření všech koeficientů, předpokládejme, že každý z nich je lineární formou proměnných

$$A_i = \sum_k c_{ik} x_k, \tag{3}$$

při čemž koeficienty c_{ik} buďtež nejprve nezávislé na x. Rovnice (1) pak zní

$$\sum_{ik} c_{ik} x_i x_k = 0,$$

takže musí

$$c_{ik} + c_{ki} = 0. \tag{4}$$

Je zřejmo, že tyto podmínky jsou postačující i v případě, kdy c_{ik} jsou libovolné funkce proměnných x. Ať jsou koeficienty A_k jakékoliv, lze vždy $n-1$ z nich, na př. $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, předpokládati ve tvaru (3), připustíme-li, že c_{ik} jsou závislá na x. Zároveň můžeme vždy c_{ik} stanoviti tak, aby platily rov. (4), neboť c_{ik} musí mimo (4) splniti již jen $n-1$ rovnic:

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n} c_{1k} x_k, \ldots A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} c_{n-1,\,k} x_k, \tag{3'}$$

takže některá z nich v počtu $\binom{n-1}{2}$ jsou ještě libovolná. (Můžeme na př. klásti nuly za všechna c_{ik}, pro něž ani i ani k není rovno n.) Jsou-li však dány koeficienty $A_1, \ldots A_{n-1}$, je zbývající stanoven rovnicí (2), takže vzhledem k (3′)

$$A_n = -\frac{1}{x_n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k - \sum_{k=1}^{n} c_{nk} x_n x_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} x_k.$$

Je-li tedy splněna rovnice (1) identicky, lze všech n koeficientů A_k vyjádřiti rovnicemi (3) za současné platnosti podmínek (4).

Tím docházíme k výsledku: *nejobecnější řešení rovnice (1) je dáno rovnicemi (3) a (4).* Koeficienty A_k tedy obdržíme, předpokládáme-li je

nejprve jako lineární formy proměnných x s konstantními koeficienty, vyjádříme, že tak vzniklá kvadratická forma je identicky nulou a klademe pak za c_{ik} jakkoliv proměnné veličiny či jakékoliv funkce x, jichž volba jest omezena toliko podmínkami (4).

A nyní uvažujme obecný systém fysikální r-tého řádu o ν stupních volnosti. Jeho konfigurace budiž stanovena n parametry $p_1, p_2, \ldots p_n$, které však musí splňovati $n-\nu$ nezávislých podmínek. Označíme-li první až r-tou derivaci p_k dle času $\dot{p}_k, \ddot{p}_k, \ldots p_k^{(r)}$, jest energie systému obecně funkcí těchto nr veličin:

$$p_1, p_2, \ldots p_n; \dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots \dot{p}_n; \ldots p_1^{(r-1)}, p_2^{(r-1)}, \ldots p_n^{(r-1)}.$$

Její diferenciál jako funkce času t:

$$d E = \sum_{k, l=1}^{n, r} \frac{\partial E}{\partial p_k^{(l-1)}} dp_k^{(l-1)}.$$

Při tom dp_k a t. d. jsou až na veličiny vyšších řádů změny nastalé během časového intervalu $(t, t + dt)$ při skutečné změně konfigurace systému. Avšak

$$dp_k^{(l-1)} = \frac{p_k^{(l)}}{\dot{p}_k} dp_k,$$

takže

$$d E = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial E}{\partial p_k^{(l-1)}} \frac{p_k^{(l)}}{\dot{p}_k} \right\} dp_k. \tag{5}$$

Lze tedy diferenciál energie vždycky vyjádřiti jako lineární formu diferenciálů parametrů. Můžeme to učiniti pro parametry vázané libovolnými podmínkami i pro parametry nezávislé. Ale i v případě, kdy neexistují parametry charakteristické, můžeme zavésti jisté nezávislé veličiny, nekonečně malé téhož řádu jako dp_k, v počtu ν, které mají stejný význam jako diferenciály charakteristických parametrů. Předpokládáme ovšem, že podmínky předepsané systému lze psáti jako lineární rovnice homogenní pro diferenciály dp_k s koeficienty libovolně závislými na parametrech. Potom můžeme vyjádřiti všechna dp_k jako lineární formy ν nezávislých veličin $d\pi_\varkappa$

$$dp_k = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \beta_\varkappa^k \, d\pi_\varkappa . \tag{6}$$

Budeme je nazývati *diferenciály kvasiparametrů*. Nahradíme-li v rovnici (5) dp_k veličinami $d\pi_\varkappa$, obdržíme výraz téhož tvaru. Můžeme tedy i v případě systému anholonomního vyjádřiti diferenciál energie jako lineární formu nezávislých diferenciálů. Dokážeme, že toto vyjádření možno provésti nekonečně mnoha způsoby, jak-

mile existuje jediný. Přičteme-li totiž k pravé straně rovnice (5), kterou pišme ve tvaru

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k E_k \dot{p}_k ,$$

lineární formu derivací $\dot{p}_k$, jež se identicky rovná nule, nezruší se její platnost. Koeficienty oné formy musí sice splňovati jisté podmínky, ale můžeme jich udati nekonečně mnoho. Označíme-li je E'_k, bude

$$dE = \sum_k (E_k + E'_k)\, dp_k ,$$

čímž je naše tvrzení dokázáno. Tato okolnost je velmi důležitá pro celý náš problém a představuje hlavní obtíž, jež se při jeho řešení naskýtá. Ačkoliv již Lipschitz na tom založil svou známou námitku proti Helmholtzovi — upozorňuje, že rovnice

$$L\, dx + M\, dy + N\, dz = 0$$

je splněna nejen pro $L = M = N = 0$, ale také pro

$$L = Q\dot{z} - R\dot{y}, \qquad M = R\dot{x} - P\dot{z}, \qquad N = P\dot{y} - Q\dot{x},$$

kde P, Q, R jsou úplně libovolné funkce — přece Helm nebral k tomuto faktu zřetele. Také Padova jen neúplně přihlížel k mnohoznačnosti svého odvození. Konečně ani Boltzmann,[8]) který na tomto podkladě vtipně skonstruoval svou námitku proti Helmovi, neodůvodnil obecně mnohoznačnost vyjádření diferenciálu energie jako lineární formy diferenciální.

Budiž uvažovaný systém podroben vnějšímu silovému působení. Elementární práce dodaná systému v časovém intervalu $(t, t + dt)$ je dána lineární formou

$$dP = \sum_k P_k\, dp_k.$$

Složky síly P_k nechť jsou jistými funkcemi stavu systému a času t. Je-li systém holonomní, můžeme zavésti charakteristické parametry, je-li anholonomní, užijeme na dp_k transformace (6), takže v každém případě lze rovnici energie psáti ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\nu} (E_k - P_k)\, dp_k = 0, \tag{7}$$

při čemž hodnoty dp_k nejsou vázány žádnými předem danými podmínkami. Jsou stanoveny teprve počátečním stavem a vnějším působením. Nyní se jedná o to, abychom získali potřebný počet rovnic z jedné rovnice (7), která vyjadřujíc princip energie praví, že vlastní energie se změní o zcela určitou hodnotu, když síla dodá systému práci. Při tom se ovšem změní také stav systému — nastává fysikální děj. Z principu energie totiž neplyne, že tělesa a hmoty, jež k systému nepočítáme, jsou

opravdu s to, systému dodati energii, i když byl původně v klidu. Uvažujeme-li samotný princip energie, nemáme přechodu, souvislosti mezi vnějším působením a systémem, kterou při logickém budování fysikální soustavy musíme postulovati. Proto předpoklad, který má vésti od rovnice energie k diferenciálním zákonům, vyslovím tak, aby zároveň z něho plynul poznatek, že existence síly působící na systém vskutku způsobuje změnu jeho stavu. Suponuji tedy všeobecnou platnost tohoto axiomu:

(II) *Mezi všemi lineárními formami diferenciálními, které udávají změnu vlastní energie systému během nekonečně krátkého času, existuje jedna, jejíž koeficienty mají hodnoty závislé jen na síle působící. Tato závislost jest pro všechny síly táž.*

Souhrn koeficientů této formy budu nazývati *energetickým účinkem síly* či prostě jejím *účinkem*. Složky jeho jsou ovšem funkcemi stavu systému, jak je zřejmo na př. z (5). Hořejší předpoklad tedy vyjadřuje, že síla působící na systém má vliv na jeho stav. Jakmile vznikne síla, musí současně složky účinku nabýti jistých hodnot. Obsahují však derivace parametrů, z nichž nejvyšší jsou téhož řádu jako systém, tedy složky účinku jsou také funkcemi derivací veličin určujících stav systému. Z toho vidíme, že síla udává změnu stavu systému v nejbližším okamžiku. Tedy je zřejmý vliv vnějšího působení na proces v systému. Dále plyne z hořejšího, že mezi silou a systémem existují vztahy, jež platí stejně během libovolného děje a nezávisle na volbě počátečního stavu. Tvar těchto vztahů je mimo to nezávislý na volbě síly a jest určen jednoznačně, neboť je zřejmo, že současně nemohou axiomu (II) vyhovovati koeficienty dvou různých forem pro libovolné síly. Předpoklad (II) budu označovati jako *postulát silového působení* nebo *silový axiom*. Pojmenování »energetický účinek« jest odůvodněno tím, že hodnoty jeho složek nás informují jak o velikosti změny energie při určité elementární změně konfigurace, tak o způsobu, jakým je celkový přírůstek rozdělen na jednotlivé parametry. Jsou pak silou působící při daných vlastnostech systému úplně stanoveny.

Silový axiom praví, že složky energetického účinku závisí jen na působící síle. Označíme-li je E_k^*, můžeme to vyjádřiti matematicky rovnicemi

$$(8) \qquad E_k^* = F_k\,(P_1, P_2, \ldots P_\nu), \qquad k = 1, 2, \ldots \nu,$$

neboť síla jest úplně stanovena svými složkami. Při tom funkce F_k mohou obsahovati jen konstanty systému, určené jeho předem danými vlastnostmi. Stanovíme-li tyto funkce, obdržíme již právě potřebný počet rovnic, jež platí pro děj probíhající v systému. Nyní předpokládejme, že systém je aspoň 2. řádu, což nebude na překážku obecné aplikaci. Neboť

všude ve fysice, kde zdánlivě se setkáváme se systémy prvního řádu, je to umožněno jen tím, že pokládáme změny parametrů za velmi pomalé. Avšak rovnice (8) platí nezávisle na stavu systému, tedy i pro děje velmi pomalé (na př. zvratné), při nichž se systém jeví systémem 1. řádu.

Rovnice energie zní dle (7):

$$\sum_{k=1}^{\nu} (F_k - P_k)\, \dot{p}_k = 0.$$

Koeficienty této lineární formy jsou závislé na stavu systému jen potud, pokud na něm závisí složky síly, nesmí tedy obsahovati explicite ani parametry ani jich derivace. Tato rovnice však musí platit pro všechny počáteční podmínky, ať volíme počáteční stav systému jakkoliv. Uvažujeme-li tedy okamžik počátku děje, platí hořejší rovnice identicky. Pak můžeme psáti

$$F_k - P_k = A_k,$$

kde A_k jsou funkce derivací $\dot{p}_i$, jež jsme stanovili na začátku tohoto paragrafu. Avšak v uvažovaném okamžiku můžeme působiti na systém libovolnou silou, jejíž komponenty mají hodnoty nezávislé na počátečním stavu, tedy také A_k musí býti pro všechny možné hodnoty derivací $\dot{p}_i$ stejná, takže podle dřívějšího jsou identicky rovna nule. Tedy vzhledem k (8)

(9) $$E_k^* = P_k\,, \qquad k = 1, 2 \ldots \nu,$$

což podle (II) platí pro libovolné síly, ať jsou jakkoliv závislé na čase nebo na stavu systému, a během celého děje. Máme tedy obecně platnou větu:

(III) *Děj v systému probíhá tak, že složky účinku jsou v každém okamžiku rovny odpovídajícím složkám síly, jinými slovy, energetický účinek rovná se působící síle.*

Z toho vyvodíme ihned jistý důsledek. Každou sílu můžeme si mysliti složenu z libovolného počtu sil, jichž korespondující složky sečteny dávají komponenty síly výsledné. Při současném působení více sil je totiž celková práce rovna součtu prací jednotlivých sil, což plyne z definice síly a z okolnosti, že práce současně pro systém vykonané se sčítají, která jest přímým důsledkem principu energie. Plyne tedy z (III), že účinek výsledné síly je roven součtu účinků sil částečných. Účinek však charakterisuje působení síly na systém, takže:

(IV) *Při současném působení více sil na týž systém působí jednotlivé síly nezávisle, jich účinky se superponují.*

Celkem vidíme, že pomocí silového axiomu podařilo se nám rozložiti rovnici energie na dostatečný počet rovnic, nutných k stanovení parametrů jako funkcí času. Rovnice (9) jsou obecně pro systém r-tého řádu diferen-

ciální rovnice obyčejné téhož řádu, což je ve shodě s tím, že hodnoty parametrů a jich derivací až do řádu $r-1$ můžeme voliti pro jednu hodnotu t zcela libovolně. Kdybychom dovedli udati složky energetického účinku jako funkce parametrů a jejich derivací (až do řádu r), byly by rovnice (9) řešením naší úlohy. Tím jsme převedli řešení celého problému na stanovení energetického účinku. Známe-li jej, můžeme pokládati průběh děje za stanovený na základě věty (III). Tyto výsledky platí pro libovolný systém skleronomní, avšak stanoviti složky účinku pro libovolný tvar energie jest ovšem problém zatím neřešitelný. Budu se dále zabývati jeho řešením ve speciálním případě, nyní však zobecním rovnice (9) pro systémy podrobené vazbám a systémy rheonomní.

§ 5. *Vazby. Systémy rheonomní.* Pro další úvahy je důležitá jistá věta, kterou odvodím z principu energie. Mějme sílu, o níž víme nebo předpokládáme, že nemá vlivu na průběh určité infinitesimální změny konfigurace systému. Působme silově na systém tak, aby při vhodném počátečním stavu nastala v jistém elementu času ona změna polohy. Tento děj nechme proběhnouti nejprve bez působení oné síly, potom za současného jejího působení, při jinak stejných podmínkách. Podle učiněného předpokladu bude průběh děje v obou případech týž. Vykoná-li při tom uvažovaná síla práci, musí o tutéž hodnotu vzrůsti vlastní energie systému. Je však jednoznačnou funkcí stavu, takže také konečný stav musí býti v obou případech různý, což jest proti předpokladu. Tedy *síla, která nemá vlivu na průběh určitého děje v systému, nekoná při tomto ději práce.* To platí i pro tak zvané síly vnitřní, jež definujeme známým způsobem pomocí vnitřní potenciální energie. Lze totiž uvažovati systém částečný, do něhož nepočítáme ty části systému, v nichž má původ ona síla. Pro takový parciální systém je silou vnější. Také lze užíti toho, že potenciální i aktuální energie jsou každá zvlášť jednoznačnou funkcí stavu. Zmenšení potenciální energie bylo by tedy v odporu se suposicí, že síla nemá vlivu na ten děj.

Při odvození rovnic (9) jsme předpokládali, že diferenciály dp_k jsou navzájem nezávislé. Někdy však může býti výhodné počítati s parametry, jež se nemohou měniti libovolně. Budeme tedy předpokládati, že mimo dané silové působení jsou systému předepsány jisté podmínky. Uvažujme systém, jehož konfigurace je stanovena n parametry p_k, mezi nimiž však platí m nezávislých rovnic, které lze psáti ve tvaru

$$(10)\qquad \sum_{k=1}^{n} Q_k^i\, dp_k + Q_{n+1}^i\, dt = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots m,$$

při čemž Q_k^i buďtež jakékoliv funkce parametrů a času t. Fysikálně realisovati předepsané podmínky lze ovšem jenom jistým fysikálním pů-

sobením. Učiňme předpoklad, že toto působení je silové, a označme příslušné podmínky jako *vazby*, síly je realisující jako *síly vazbové*. Tyto budou záviseti na předepsaných vazbách i na silách daných (explicitních), mají však jednu vlastnost, na základě níž je můžeme stanoviti. Má-li totiž vůbec nějaký proces v systému nastati, musí vazby dovolovati některé z možných změn polohy systému. Není-li vazbami již předem celý děj stanoven, musí býti systému dána možnost, některé změny proběhnouti způsobem vazbami neurčeným. Proto také síly vazbové, kterými chceme jen realisovati dané vazby, nikoliv působiti další omezení volnosti procesu, musí býti bez vlivu na ty změny, které nejsou omezeny vyslovenými podmínkami. Tím dle dřívějšího docházíme k větě: *Vazbové síly nekonají práce při těch změnách konfigurace systému, které vazby nechávají volné, jichž se vazby netýkají.* Nazveme-li tyto »volné« změny *virtuálními*, splyne tato věta s předpokladem, který se v mechanice nazývá obyčejně *principem Lagrangeovým*. Je totiž zřejmo, že pro skleronomní vazby jsou výše definované virtuální změny totožné s Lagrangeovými. Stejně je tomu i pro vazby proměnné, při nichž se ovšem mění s časem také jimi dovolené změny. Chceme-li je stanoviti v určitém okamžiku, musíme pokládati v onom okamžiku vazby za stálé, takže pro virtuální změny platí rovnice (10), do nichž jsme kladli $dt = 0$. Že při skutečné změně konfigurace rheonomní síly vazbové mohou konati práci, neodporuje uvedené větě, ježto v tomto případě nemůžeme tvrditi, že vazbové síly nemají vlivu na průběh děje. My jsme však, abychom mohli tu větu aplikovati, museli vzíti v úvahu takové změny, na jichž průběh vazby nepůsobí. Složky vazbové síly $\overline{P}_k$ tedy splňují rovnice

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P}_k \, dp_k = 0$$

pro všechny hodnoty dp_k, jež splňují podmínky

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^i \, dp_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m.$$

Odtud Lagrangeovou metodou určíme

$$\overline{P}_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, Q_k^i .$$

Volíme-li λ_i tak, aby tato síla spolu s danou způsobily děj vyhovující podmínkám (10), můžeme pokládati parametry p_k za nezávislé, takže podle (9) platí rovnice

$$E_k^* = P_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, Q_k^i , \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{11}$$

A z těchto rovnic můžeme skutečně pomocí (10) stanoviti parametry i koeficienty λ_i

Kdyby v rovnicích (10) nevystupoval čas, kdyby tedy všechna Q^i_k byla jen funkcemi parametrů, Q^i_{n+1} pak nulou, mohli bychom zavésti nezávislé diferenciály, pro něž by zase platily rovnice (9). Zavedeme-li však v obecném případě nezávislé diferenciály $d\pi_\varkappa$, nemůžeme předem říci, že pro příslušné koeficienty $E^*_\varkappa$ platí rovnice (9). Neboť mimo ně vystupoval by v rovnici energie lineárně také diferenciál času dt, kromě toho energie sama by závisela explicite na čase t. Máme před sebou systém rheonomní, jehož sestavení je s časem proměnné, takže se mění i fysikální význam parametrů. Čas vystupuje mezi veličinami určujícími stav systému. Tu je na snadě zavésti další parametr. Nejlépe relací

$$p_{n+1} = t. \tag{12}$$

Užijeme-li nezávislých diferenciálů, můžeme mimo to klásti

$$d\pi_{\nu+1} - dt = 0,$$

takže celkem máme $n+1$ parametr. Zároveň však tato rovnice představuje další vazbu, takže stupeň volnosti, označme jej zase ν, se ovšem nezměnil. K realisaci podmínky (12) je však nutno zavésti vazbovou sílu $\bar{P}_k$. Její komponenty, odpovídající nezávislým diferenciálům $d\pi_1$ až $d\pi_\nu$ jsou dle předchozího rovny nule. Mimo danou sílu o komponentách Π_1 $\Pi_2, \ldots \Pi_{\nu+1}$ působí na systém síla vazbová stanovená jedinou složkou, kterou označme $\overline{\Pi}_{\nu+1}$. Máme pak systém o $\nu+1$ stupni volnosti, na který lze aplikovati rovnice (11). Tím obdržíme

$$E^*_\varkappa = \Pi_\varkappa\ , \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots \nu$$

$$E^*_{\nu+1} = \Pi_{\nu+1} + \overline{\Pi}_{\nu+1}.$$

Nahradíme-li podle (12) v těchto rovnicích p_{n+1}. časem t, vidíme, že prvních ν rovnic platí beze změny jako pro systém skleronomní. Ty stačí k určení děje v systému, kdežto rovnice zbývající stanoví vazbovou sílu $\Pi_{\nu+1}$.[10]) Tato ukazuje konečně, že pro čas explicite vystupující v energii vlastní platí rovnice zcela analogická těm, které se vztahují k parametrům stanovícím konfiguraci systému.

[*Poznámka.* Někdy se říká, že princip energie neplatí pro rheonomní systémy (na př. C. Schaefer: Die Prinzipe der Dynamik, 1919. § 4). Tímto způsobem formulovati fakt, že práce explicitních sil není rovna změně kinetické energie, nepokládám za vhodné, ježto plyne právě

---

[10]) V podstatě stejným způsobem stanovil Helm práci potřebnou k splnění vazeb rheonomních (holonomních), viz pozn. 2. Srovn. též G. Hamel: Uber die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. (Math. Ann., 59, p. 427, 1904.)

z principu energie. Neboť fysikálně realisovati vazby lze j e n pomocí sil; máme-li místo nich dány matematické podmínky, neznamená to přece, že není třeba je bráti v úvahu při stanovení vykonané práce. Bylo by tedy lépe říci, že neplatí v ě t a o kinetické energii, uvažujeme-li jen síly explicitní.]

Celkem tedy vidíme, že silový axiom spolu s principem energie vede i v nejobecnějším případě systému vázaného rheonomními, anholonomními podmínkami k právě potřebnému počtu rovnic, z nichž lze při daném silovém působení a počátečním stavu stanoviti parametry jako funkce času. Zároveň z tohoto postulátu plyne, že takové rovnice vždycky existují a jsou stanoveny jednoznačně. Abychom touto metodou dospěli k úplnému řešení našeho problému, musíme ovšem silový axiom doplniti takovým způsobem, aby koeficienty formy, jejíž existenci předpokládá, byly přesně určeny. Jinými slovy: je nutno d e f i n o v a t i energetický účinek. Ve speciálním případě, který budu v dalším uvažovati, provedu to tak, že vyslovím silový axiom přímo pro koeficienty jisté formy, jejíž definici lze jednoduše invariantně formulovati.

Těmito výsledky jest zásadní ř e š i t e l n o s t problému prokázána.

II. Systémy dynamické.

§ 6. *Diferenciál energie.* V následujícím omezím své úvahy na systémy 2. řádu, jichž vlastní energie v případě s k l e r o n o m n í c h vazeb splňuje tyto podmínky: skládá se aditivně ze dvou částí, z nichž jedna je pouze funkcí parametrů, druhá pak je k v a d r a t i c k o u f o r m o u jich derivací. Její koeficienty nechť jsou funkcemi parametrů samých, při čemž determinant z nich utvořený je různý od nuly. První z obou částí označuji jako *potenciální,* druhou jako *aktuální energii.* Podrobíme-li takový systém r h e o n o m n í m vazbám, stane se energie funkcí času, mimo to aktuální část přejde při zavedení nezávislých parametrů v kvadratickou n e h o m o g e n n í funkci derivací. V obou případech budu uvažovaný systém nazývati *systémem dynamickým.* Užil jsem tohoto pojmenování, ač není slovně právě výstižné, z toho důvodu, že v dynamice mechanických soustav, hydrodynamice i v elektrodynamice nacházíme vesměs systémy uvažovaného druhu.

Označíme-li aktuální energii T, potenciální U, bude

$$dE = \sum_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial U}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} d\dot{p}_k \right\}.$$

Ukázal jsem obecně, že vždy je možno vyjádřiti *dE* nekonečně mnoha způsoby jako lineární formu diferenciálů parametrů. Aplikujeme-li na př.

rovnici (5), obdržíme

$$d E = \sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial p_k} + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \frac{\ddot{p}_k}{\dot{p}_k} \right) dp_k \cdot \tag{13}$$

V tomto případě existuje však jeden význačný tvar, k němuž dojdeme takto: pišme

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k} a_{ik} \dot{p}_i \dot{p}_k , \qquad a_{ik} = a_{ki} \tag{14}$$

$$d T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial p_k} dp_k + \sum_{i, k} a_{ik} \dot{p}_k d\dot{p}_i ,$$

takže

$$d E = \sum_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial p_k} + \sum_i a_{ik} \ddot{p}_i + \frac{\partial U}{\partial p_k} \right\} dp_k .$$

Tuto lineární formu jsme obdrželi n e j j e d n o d u š š í m způsobem, aniž bychom přidávali nové členy, nebo násobili a dělili. Vznikla z nejjednoduššího tvaru dE jen užitím identity

$$\dot{p}_k d\dot{p}_i = \ddot{p}_i dp_k .$$

Proto příslušné koeficienty

$$E^o_k = \sum_i a_{ik} \ddot{p}_i + \frac{\partial E}{\partial p_k} \tag{15}$$

nazvu *redukované*. Jsou přede všemi ostatními vyznačeny a jednoznačně stanoveny. Libovolné jiné koeficienty dostaneme přičtením členů (podle § 4):

$$E'_k = \sum_i c_{ki} \dot{p}_i .$$

Na př. formu (13) získáme pro

$$E'_k = \sum_i a_{ik} \left(\frac{\ddot{p}_k}{\dot{p}_k} - \frac{\ddot{p}_i}{\dot{p}_i} \right) \dot{p}_i ,$$

při čemž skutečně $c_{ik} + c_{ki} = 0$. Podobně tvar, kterého užil Helm k odvození Lagrangeových rovnic,

$$E_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} \tag{16}$$

obdržíme z (15) pro $U = 0$ přičtením koeficientů E'_k, pro něž volíme

$$c_{ki} = \sum_l \left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{li}}{\partial p_k} \right) \dot{p}_l . \tag{16'}$$

Není-li potenciální energie, můžeme místo (15) psáti dle (14)

$$E^o_k = \frac{\partial T}{\partial p_k} + \sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_k} \ddot{p}_i \cdot$$

Tento tvar uvádí právě Boltzmann ve své polemice s Helmem. Z jeho odvození není ovšem zřejmo, že je nejjednodušší ze všech možných.

Ještě se zmíním o jiném způsobu rozkladu diferenciálu energie na lineární formu diferenciálů parametrů, který zůstává v platnosti pro libovolný systém 2. řádu a obsahuje jako speciální případ formu s koeficienty (16). Zavedeme-li místo derivací $\dot{p}_k$ další parametry

$$q_k = q_k (p_1, p_2, \ldots p_n ; \dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots \dot{p}_n), \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

stane se energie funkcí p_k, q_k:

$$K (p_1, p_2, \ldots p_n ; q_1, q_2, \ldots q_n),$$

takže

$$d\, E = \sum_k \left\{ \frac{\partial K}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial K}{\partial q_k} d q_k \right\}.$$

Volíme-li parametry q_k tak, aby

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \dot{p}_k , \tag{17}$$

bude

$$d\, E = \sum_k \left\{ \frac{\partial K}{\partial p_k} + \frac{d q_k}{dt} \right\} dp_k .$$

Kdybychom pro koeficienty této formy postulovali vlastnosti energetického účinku, dostali bychom z (9) a (17)

$$\frac{dq_k}{dt} = - \frac{\partial K}{\partial p_k} + P_k , \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial q_k}.$$

Tyto rovnice jsou zcela analogické rovnicím *Hamiltonovým* a vyhovují principu energie pro libovolný skleronomní systém 2. řádu. Pro systém dynamický splývají s nimi formálně. Avšak veličiny q_k mohou míti obecnější význam než impulsy definované známým způsobem. Funkce K je totiž definována parciální rovnicí diferenciální:

$$E \left(p_1, p_2, \ldots p_n ; \frac{\partial K}{\partial q_1}, \frac{\partial K}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial K}{\partial q_n} \right) = K.$$

Najíti mezi řešeními této rovnice takové, které na základě (17) by vedlo k rovnicím ve fysice opravdu platným, není ovšem snadné. Proto nebudeme se déle touto metodou zabývati. Uvedl jsem ji pouze, aby bylo patrno, jak jednoduše souvisí kanonický tvar dynamických rovnic s principem energie.

§ 7. *Varieta konfigurací.* Uvažujme dynamický systém skleronomní, holonomní o ν stupních volnosti. Zavedeme-li charakteristické parametry $p_1, p_2 \ldots p_\nu$, je každá jeho konfigurace stanovena ν hodnotami těchto parametrů. Souhrn všech možných poloh systému tvoří za učiněných před-

pokladů ν-rozměrnou varietu (množinu). Na tuto varietu konfigurací budu nyní aplikovati základní pojmy novější *infinitesimální geometrie,* při čemž budu užívati terminologie a symboliky *Weylovy.*[11])

Každá poloha tvoří element či bod množiny. Hodnoty parametrů, jež můžeme také nazývati souřadnicemi, stanovící určitý element, jsou ovšem závislé na fysikálním významu jejich, který lze vystihnouti určitými konfiguracemi základními, jež odpovídají zvoleným hodnotám parametrů. Docházíme tak k pojmu *fysikální soustavy souřadné.* Rozdíly souřadnic dvou nekonečně blízkých poloh či konfigurací nazývám složkami infinitesimálního *posuvu systému.* Je to kontravariantní vektor, který dělen skalárem *dt* přejde v okamžitou *rychlost systému.* Označme její složky v^k, takže aktuální energie bude míti tvar

$$(18) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}\, v^i\, v^k = \frac{1}{2} a_{ik}\, v^i\, v^k.$$

Dále budu již vynechávati sčítací znamení, jak je zvykem v tensorovém počtu.

Nyní stanovíme přesněji varietu poloh systému. Ve všech předešlých úvahách užívali jsme pojmu energie jako jednoho z nejpodstatnějších. A je to právě aktuální energie, která nás povede při volbě metriky, jejíž zavedení nám umožní vyjádřiti veličiny skalární účelně a jednoduše pomocí jediného invariantu, *skalárního součinu.*

Tu musíme požadovati, abychom mohli srovnávati energii systému v různých polohách, chceme-li vůbec aplikovati princip energie. Avšak potenciální energie jest konfigurací úplně stanovena, musí tedy totéž platit i o energii aktuální při stálých složkách rychlosti. Abychom tedy mohli srovnávati aktuální energii v různých konfiguracích, učiňme tuto volbu: *Varietu konfigurací pokládáme za Riemannův prostor, jehož metrická forma jest úměrna aktuální energii.* Při tom faktor úměrnosti $\frac{1}{2} M$ budiž konstantní, týž pro všechny polohy. Pak *jest aktuální energie úměrna rychlosti systému*

$$(19) \qquad T = \frac{1}{2} M\, g_{ik}\, v^i\, v^k = \frac{1}{2} M\, v_k\, v^k \cdot$$

Tím jsme splnili všechny hořejší požadavky ([11]) p. 124) a vlastnosti variety poloh systému jsou úplně stanoveny.

Předpokládali jsme, že systém je holonomní. Ukáži nyní, že předešlé úvahy lze rozšířiti i na systémy n e h o l o m n í. Není nesnadno základní

[11]) H. Weyl: Reine Infinitesimalgeometrie (Math. Ztschr. 2., 1918, p. 384). Raum - Zeit - Materie, V. Aufl., 1923, Berlin. (K této knize se vztahují odkazy dále činěné.)

pojmy infinitesimální geometrie tak zobecniti, aby obsáhly také tento případ. Poněvadž v této práci, která sleduje jiný cíl, nemohu se touto věcí obšírněji zabývati, naznačím pouze hlavní body a omezím se na to, co nutně potřebuji v dalším.

Jak bylo řečeno v § 4., lze v každém případě zavésti nezávislé diferenciály $d\pi_\varkappa$. Jich počet odpovídá stupňům volnosti. Stejné rovnice platí ovšem i pro poměry $\frac{d\pi_\varkappa}{dt}$, které, jak je zvykem, označíme symbolicky $\dot{\pi}_\varkappa$ jako derivace kvasiparametrů $\pi_\varkappa$. Rovnicemi (6) jest zároveň definována transformace kontravariantních složek vektorů. Aktuální energie je po transformaci zase kvadratickou formou derivací $\dot{\pi}_\varkappa$. Jediný rozdíl proti dřívějšímu je ten, že konfiguraci systému nelze stanoviti ν nezávislými hodnotami, ale n parametry, mezi nimiž však platí $n-\nu$ relací. Je zde rozdíl v matematickém vyjádření, kdežto fysikálně se oba případy podstatně neliší. Nazveme-li tedy souhrn všech možných konfigurací i za těchto okolností varietou ν-rozměrnou, můžeme pojmy a definice obvyklé v infinitesimální geometrii přenésti i na tyto systémy. K matematickému zpracování bude ovšem nutno poněkud zevšeobecniti známé výsledky. Týká se to zejména koeficientů afinní souvislosti.

Zde odvodím pouze výrazy pro změnu komponent rychlosti při infinitesimálním paralelním posuvu. Uvažovaná ν-rozměrná varieta konfigurací jest obsažena v n-rozměrné varietě (holonomní), jejíž každý element je stanoven n parametry p_k. Mějme na mysli určitou konfiguraci. Podmínkami předepsanými systému je přechod do polohy soumezné vázán podmínkami (6), při čemž $d\pi_\varkappa$ mohou míti libovolné, nekonečně malé hodnoty. Sčítá se pro $\varkappa = 1, 2, \ldots \nu$. Důsledně označím indexy, jež probíhají hodnoty od 1 do ν, literami řeckými, ostatní, dle kterých se sčítá od 1 do n, latinskými.

Předpokládejme nejprve, že parametry p_k jsou nezávislé, tedy $\nu = n$, takže systém je holonomní. Můžeme však zavésti anholonomní parametry $\pi_\varkappa$ rovnicemi

$$d\pi_\varkappa = \alpha^\varkappa_k \, dp_k \,, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots \nu, \tag{20}$$

z nichž plynou ovšem rovnice (6). Abychom obdrželi změny složek rychlosti v libovolné soustavě souřadné, postupujme takto:[12]) budiž metrika stanovena základní formou

$$g_{\iota\varkappa} \, d\pi_\iota \, d\pi_\varkappa = g'_{ik} \, dp_i \, dp_k \,, \qquad g_{\iota\varkappa} = g_{\varkappa\iota} \,, \qquad g'_{ik} = g'_{ki} \,,$$

takže

$$g'_{ik} = g_{\iota\varkappa} \, \alpha^\iota_i \, \alpha^\varkappa_k, \; g^{\iota\varkappa} = g'^{ik} \, \alpha^\iota_i \, \alpha^\varkappa_k.$$

---

[12]) V podstatě sleduji způsob, kterým se odvozují Christoffelovy vzorce. Srovnej na př. Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1910. (§ 24.)

Označíme-li symbolicky

$$\frac{\partial g_{\iota\varkappa}}{\partial p_l}\,\beta^l_\lambda = \frac{\partial g_{\iota\varkappa}}{\partial \pi_\lambda} \quad \text{čili} \quad \frac{\partial g_{\iota\varkappa}}{\partial \pi_\lambda}\,\alpha^\lambda_l = \frac{\partial g_{\iota\varkappa}}{\partial p_l},$$

bude

$$\left[{i\,k \atop l}\right]' = \alpha^\lambda_l \left\{ \left[{\iota\,\varkappa \atop \lambda}\right] \alpha^\iota_i\,\alpha^\varkappa_k + \frac{1}{2}\,g_{\iota\lambda}\left(\frac{\partial \alpha^\iota_i}{\partial p_k} + \frac{\partial \alpha^\iota_k}{\partial p_i}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,g_{\iota\varkappa}\left\{ \alpha^\iota_i \left(\frac{\partial \alpha^\varkappa_l}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha^\varkappa_k}{\partial p_l}\right) + \alpha^\varkappa_k \left(\frac{\partial \alpha^\iota_l}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha^\iota_i}{\partial p_l}\right)\right\}.$$

Násobíme-li hořejší rovnici $g'^{ls}\,\alpha^\sigma_s$ a sečteme pro všechny hodnoty l, s, získáme relaci

$$\left\{{i\;k \atop s}\right\}'\alpha^\sigma_s = \left\{{\iota\;\varkappa \atop \sigma}\right\}\alpha^\iota_i\,\alpha^\varkappa_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha^\sigma_i}{\partial p_k} + \frac{\partial \alpha^\sigma_k}{\partial p_i}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,g_{\iota\varkappa}\,g'^{ls}\,\alpha^\sigma_s\left\{ \alpha^\iota_i \left(\frac{\partial \alpha^\varkappa_l}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha^\varkappa_k}{\partial p_l}\right) + \alpha^\varkappa_k \left(\frac{\partial \alpha^\iota_l}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha^\iota_i}{\partial p_l}\right)\right\}.$$

Tato rovnice představuje pouze zobecnění Christoffelových formulí, které z ní skutečně plynou, splňují-li rovnice (6) a (20) podmínky integrability. Násobme ji složkami rychlosti v'^i, v'^k a sečtěme pro všechna i, k. Užijeme-li pak vztahů

$$(21) \qquad \alpha^\iota_i\,v'^i = v^\iota, \qquad\qquad v'^i = \beta^i_\varrho\,v^\varrho,$$

budeme míti

$$\alpha^\sigma_s\left\{{i\;k \atop s}\right\}' v'^i\,v'^k = \left\{{\iota\;\varkappa \atop \sigma}\right\} v^\iota\,v^\varkappa + \frac{\partial \alpha^\sigma_i}{\partial p_k}\,v'^i\,v'^k +$$

$$+ g_{\iota\varkappa}\,g'^{ls}\,\alpha^\sigma_s\,\alpha^\iota_i\,\beta^i_\varrho\,\beta^k_\tau\left(\frac{\partial \alpha^\varkappa_l}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha^\varkappa_k}{\partial p_l}\right) v^\varrho\,v^\tau.$$

Avšak

$$g_{\iota\varkappa}\,\alpha^\iota_i\,\beta^i_\varrho\,v^\varrho = v_\varkappa, \qquad\qquad g'^{ls}\,\alpha^\sigma_s = g^{\mu\sigma}\,\beta^l_\mu,$$

takže docházíme konečně k rovnici

$$(22) \qquad \frac{\partial \alpha^\sigma_i}{\partial p_k}\,v'^i\,v'^k - \alpha^\sigma_s\left\{{i\;k \atop s}\right\}' v'^i\,v'^k =$$

$$= -\left\{{\iota\;\varkappa \atop \sigma}\right\} v^\iota\,v^\varkappa - g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial \alpha^\varkappa_l}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha^\varkappa_l}{\partial p_l}\right)\beta^l_\mu\,\beta^k_\tau\,v_\varkappa\,v^\tau.$$

Přejde-li nyní systém do konfigurace soumezné posuvem o složkách dp_k, jest

$$\frac{dp_k}{dt} = v'^k, \qquad\qquad \frac{d\pi_\varkappa}{dt} = v^\varkappa.$$

Posune-li se při tom vektor rychlosti paralelně, bude časová změna jeho komponent v^σ dle (21)

$$\text{(23)} \qquad \frac{dv^\sigma}{dt} = \frac{\partial\, \alpha^\sigma_i}{\partial\, p_k} v'^i \frac{dp_k}{dt} + \alpha^\sigma_i \frac{dv'^i}{dt}.$$

Jsou-li pak $p_1, p_2, \ldots p_n$ jakékoliv parametry holonomní, platí pro rovnoběžné posunutí známý vzorec

$$\frac{dv'^s}{dt} = -\left\{ {i\ k \atop s} \right\}' v'^i\, v'^k,$$

takže dosazením do (23) obdržíme levou stranu rovnice (22). Tedy časová změna komponent rychlosti v kvasiparametrech při rovnoběžném posuvu je dána pravou stranou její.

Kdybychom zjistili, že v určitém okamžiku je změna složek rychlosti různá od nuly, nemohli bychom tvrditi, že se rychlost jako vektor mění. Teprve mění-li se její složky jinak než při paralelním posuvu, můžeme říci, že systém má *zrychlení*. Budeme tedy ***kontravariantní*** složky tohoto vektoru definovati jako ***skutečné změny složek rychlosti, zmenšené o změny, jež by nastaly při rovnoběžném posuvu:***

$$\text{(24)} \qquad a^\sigma = \frac{dv^\sigma}{dt} + \left\{ {\iota\ \varkappa \atop \sigma} \right\} v^\iota\, v^\varkappa + g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial\, \alpha^\varkappa_l}{\partial\, p_k} - \frac{\partial\, \alpha^\varkappa_k}{\partial\, p_l} \right) \beta^l_\mu\, \beta^k_\tau\, v_\varkappa\, v^\tau.$$

Důkaz, že je to vektor, lze vésti zcela stejně, jako pro parametry holonomní (viz na př. [11]), § 15.). Kovariantní složky získáme pak známým způsobem ve tvaru

$$\text{(25)} \qquad a_\lambda = g_{\lambda\sigma} \frac{dv^\sigma}{dt} + \left[{\iota\ \varkappa \atop \lambda} \right] v^\iota\, v^\varkappa + \left(\frac{\partial\, \alpha^\varkappa_l}{\partial\, p_k} - \frac{\partial\, \alpha^\varkappa_k}{\partial\, p_l} \right) \beta^l_\lambda\, \beta^k_\tau\, v_\varkappa\, v^\tau.$$

Zbývá ještě ukázati, že při paralelním posunutí rychlosti nemění se její velikost. Čtverec její derivujme podle času

$$\text{(26)} \qquad \frac{d}{dt}(g_{\varrho\sigma}\, v^\varrho\, v^\sigma) = 2\, g_{\varrho\sigma} \frac{dv^\sigma}{dt} v^\varrho + \frac{\partial\, g_{\varrho\sigma}}{\partial\, \pi_\tau} v^\varrho\, v^\sigma\, v^\tau.$$

Klademe-li nyní za $\dfrac{dv^\sigma}{dt}$ hodnotu vypočtenou z rovnice $a^\sigma = 0$, jest dle (24) vskutku pravá strana hořejší rovnice identicky rovna nule:

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\, g^{\varrho\sigma}}{\partial\, \pi_\tau} v^\varrho\, v^\sigma\, v^\tau - 2 \left[{\iota\ \varkappa \atop \varrho} \right] v^\iota\, v^\varkappa\, v^\varrho - \\ &- 2 \left(\frac{\partial\, \alpha^\varkappa_l}{\partial\, p_k} - \frac{\partial\, \alpha^\varkappa_k}{\partial\, p_l} \right) \beta^l_\varrho\, \beta^k_\tau\, v_\varkappa\, v^\tau\, v^\varrho = 0. \end{aligned}$$

Tím jest naše tvrzení dokázáno.

A teď se vraťme k systému a n h o l o n o m n í m u, jehož polohy nelze stanoviti nezávislými parametry (skutečnými). Pak jest $\nu < n$ a koeficienty $\alpha_k^\varkappa$ nemají jednoznačný význam. Proto vyjádřím složky zrychlení v takovém tvaru, aby neobsahovaly $\alpha_k^\varkappa$. Velmi snadno lze to provésti pro složky k o v a r i a n t n í. Označíme-li a'_l složky v parametrech p_l a jako dříve a_λ komponenty v kvasiparametrech π_λ, jest

$$a_\lambda = \beta_\lambda^l \, a'_l .$$

Parametry p_i jsou holonomní; užijeme-li tedy pro ně rovnice (25), obdržíme

$$a'_l = g'_{kl} \ddot{p}_k + \begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix}' \dot{p}_i \dot{p}_k .$$

Vzhledem k (6) pak

$$\ddot{p}_k = \beta_k^\varkappa \ddot{\pi}_\varkappa + \frac{\partial \beta_\varkappa^k}{\partial \pi_\mu} \dot{\pi}_\varkappa \dot{\pi}_\mu ,$$

kde opět

$$\frac{\partial \beta_k^\varkappa}{\partial \pi_\mu} = \frac{\partial \beta_\varkappa^k}{\partial p_m} \beta_\mu^m .$$

Tedy

$$a_\lambda = g'_{kl} \beta_\varkappa^k \beta_\lambda^l \ddot{\pi}_\varkappa + g'_{kl} \beta_\lambda^l \frac{\partial \beta_\varkappa^k}{\partial \pi_\mu} \dot{\pi}_\varkappa \dot{\pi}_\mu + \begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix}' \beta_\iota^i \beta_\varkappa^k \beta_\lambda^l \dot{\pi}_\iota \dot{\pi}_\varkappa . \tag{28}$$

Ale

$$g_{\iota\varkappa} = g'_{ik} \beta_\iota^i \beta_\varkappa^k ,$$

$$\frac{\partial g_{\iota\varkappa}}{\partial \pi_\lambda} = \frac{\partial g'_{ik}}{\partial p_l} \beta_\iota^i \beta_\varkappa^k \beta_\lambda^l + g'_{ik} \left(\beta_\iota^i \frac{\partial \beta_\varkappa^k}{\partial \pi_\lambda} + \beta_\varkappa^k \frac{\partial \beta_\iota^i}{\partial \pi_\lambda} \right),$$

takže poslední člen pravé strany (28)

$$\left(\frac{\partial g'_{kl}}{\partial p_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g'_{ik}}{\partial p_l} \right) \beta_\iota^i \beta_\varkappa^k \beta_\lambda^l \dot{\pi}_\iota \dot{\pi}_\varkappa =$$

$$= \left\{ \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial \pi_\iota} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\iota\varkappa}}{\partial \pi_\lambda} + g'_{ik} \beta_\iota^i \frac{\partial \beta_\varkappa^k}{\partial \pi_\lambda} - g'_{kl} \left(\beta_\lambda^l \frac{\partial \beta_\varkappa^k}{\partial \pi_\iota} + \beta_\varkappa^k \frac{\partial \beta_\lambda^l}{\partial \pi_\iota} \right) \right\} \dot{\pi}_\iota \dot{\pi}_\varkappa$$

a v důsledku toho

$$a_\lambda = g_{\varkappa\lambda} \ddot{\pi}_\varkappa + \begin{bmatrix} \iota\ \varkappa \\ \lambda \end{bmatrix} \dot{\pi}_\iota \dot{\pi}_\varkappa + g'_{ik} \dot{p}_k \left(\frac{\partial \beta_\varkappa^i}{\partial \pi_\lambda} - \frac{\partial \beta_\lambda^i}{\partial \pi_\varkappa} \right) \dot{\pi}_\varkappa . \tag{29}$$

Kontravariantní složky bychom obdrželi z těchto obvyklým způsobem.

Poněvadž matematické vyjádření zrychlení pomocí složek rychlosti nevyniká stručností, mimo to jeho vektorový charakter není odtud přímo patrný, užiji *direktního počtu vektorového*.[13]) Vektor v určitém bodě variety o kontravariantních složkách a^k, kovariantních a_k označím jediným

[13]) Na př. D. J. Struik: Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung. Springer, 1922.

znakem $\mathfrak{a}$. Algebraické operace mezi vektory v týchž bodech označuji obvyklým způsobem, skalární součin dvou vektorů $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ prostě $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$.

Diferenciál vektoru $d\,\mathfrak{a}$ můžeme definovati nejjednodušeji jako vektor, jehož složky jsou rovny skutečným změnám složek vektoru $\mathfrak{a}$ zmenšeným o hodnoty, jež odpovídají rovnoběžnému posuvu. Mimo to budu nazývati *vektorovým diferenciálem libovolné skalární funkce vektorů* výraz, který vznikne diferencováním, jež se liší od obvyklého — skalárního — jen tím, že vektory diferencujeme vektorově.

Jde-li o rychlost $\mathfrak{v}$ značí poměr $\frac{d\,\mathfrak{v}}{dt}$ vektor o komponentách a^k stanovených rovnicí (24), t. j.

$$\frac{d\,\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{a}, \tag{30}$$

takže zrychlení je v této symbolice vyjádřeno formálně zcela stejně jako v Euklidově prostoru.

V dalším užiji vztahů:

$$d\,(c\,\mathfrak{v}) = c\,d\,\mathfrak{v} \;\;(c = \text{konst.}), \qquad d\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) = d\,(\mathfrak{v}^2) = 2\,\mathfrak{v}\,d\,\mathfrak{v}, \tag{31}$$

z nichž druhý plyne sečtením (26) a (27).

§ 8. *Úplné řešení úlohy.* Viděli jsme, že silový axiom vede k existenci diferenciálních rovnic stanovících průběh děje v systému. Zbývá jen určiti složky účinku jako funkce stavu. Pro systémy dynamické lze je definovati celkem jednoduše, mimo to nezávisle na volbě parametrů. Především se jedná o invariantní formulaci postulátu silového působení. Z definice síly (§ 2.) je patrna její vektorová povaha, takže můžeme říci: *Síla je kovariantní vektor, jehož skalární součin s libovolným infinitesimálním posuvem systému udává práci vnějškem při tom vykonanou a který jest na volbě onoho posuvu nezávislý.* Je zřejmo, že touto definicí je síla stanovena jednoznačně. Také *energetický účinek musí býti kovariantní vektor,* neboť změna energie jest invariant. Tím přicházíme k této formulaci silového axiomu, který takto vyjadřuje princip nezávislý na volbě parametrů:

(II′) *Při každém silovém působení existuje vektor, jehož skalární součin s posuvem systému udává časovou změnu vlastní energie a který je silou úplně stanoven způsobem na volbě síly nezávislým.*

Složky tohoto vektoru, účinku síly, jsou ovšem jistými funkcemi stavu systému a hořejší axiom vyjadřuje právě, že tento stav závisí jistým způsobem na vnějším působení. Rovnice (9), vyjadřující tuto závislost, budou míti pro systémy dynamické invariantní tvar. Jde nyní o to, jak definovati účinek, aby zmíněné rovnice představovaly vskutku platné zákony. Nebylo by ovšem nic snazšího, než definovati na př. výrazy (16) jako jeho složky (pro holonomní par.). Ale pak by bylo lépe přímo předpokládati Lagrangeovy rovnice a z nich teprve odvoditi princip energie. Našim

cílem je však odvoditi předpis, kterým z principu energie dojdeme k dynamickým rovnicím, a tu budeme hledět vyjádřiti účinek pomocí známé energie. Místo abychom určili přímo jeho tvar, můžeme udati postup, jímž k němu dospějeme na základě energie.

Uvažujme nejprve zvláštní případ, kdy koeficienty formy (14) jsou konstantní. Pak výrazy (16′) vymizí a koeficienty (16) přejdou v redukované (15). V tomto případě, kdy vektorová křivost variety konfigurací je rovna nule, kdy polohy systému tvoří Euklidovskou množinu, mohli bychom tedy složky účinku definovati jako redukované koeficienty diferenciálu energie. Pak bychom mohli silový axiom vysloviti takto: děj v systému probíhá tak, že nejjednodušší koeficienty diferenciálu energie závisí pouze na působící síle a to pro každou sílu týmž způsobem. Odtud na základě principu energie plynoucí rovnice

$$(32) \qquad a_{ik}\, \ddot{p}_i + \frac{\partial E}{\partial p_k} = P_k$$

skutečně platí. Lze z nich odvoditi na př. pohybové rovnice v pravoúhlých souřadnicích pro systémy hmotných bodů, za působení konservativních sil vnitřních a libovolných sil vnějších.

Zcela podobně dospějeme k správným rovnicím pro obecný systém dynamický — k *rovnicím dynamickým* — na základě vektorové diferenciace. K vůli stručnějšímu vyjadřování zavedu nyní následující název: ***nejjednodušší (redukované) koeficienty vektorového diferenciálu vlastní energie nazvu složkami jejího gradientu.*** Jest to kovariantní vektor, jehož skalární součin s libovolným posuvem systému, proběhnutým v nekonečně krátkém čase, udává změnu jeho energie. Kdyby aktuální energie byla rovna nule, byl by totožný s gradientem potenciální energie, definovaným známým způsobem (na př. [11]) p. 52., 107.). A nyní již vyslovíme v definitivním tvaru invariantní postulát silového působení:

(IIa). *Gradient vlastní energie systému závisí jen na působící síle způsobem pro všechny síly stejným.*

Spojíme-li tento axiom s principem energie, získáme obecné dynamické rovnice v invariantním vyjádření. Podle § 7. jest vlastní energie dynamického systému

$$(33) \qquad E = \frac{1}{2} M\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{v} + U = \frac{1}{2} M\, \mathfrak{v}^2 + U$$

a skalární diferenciál čtverce rychlosti $\mathfrak{v}^2$ rovný vektorovému. Poněvadž energie mimo tento čtverec neobsahuje vektorů, je také vektorový diferenciál energie rovný skalárnímu. Z toho plyne, že složky gradientu jsou koeficienty jedné z nekonečně mnoha lineárních diferenciálních fo-

rem, na něž můžeme upraviti diferenciál energie. Tím je prokázána slučitelnost speciální formulace silového axiomu (IIa) s obecnou (II). Tedy z axiomu (IIa) plynou rovnice

(34) $$grad_k\ E = P_k$$

zcela stejným logickým postupem jako rovnice (9) z (II). Obdržíme je ostatně kladouce do (9) $E_k^* = grad_k\ E$. Představují obecné dynamické rovnice, které takto plynou j e d n o z n a č n ě z principu energie a silového axiomu. Můžeme je shrnouti v jedinou relaci mezi vektory v množině konfigurací systému:

(34′) $$grad\ E = \mathfrak{P},$$

neboť gradient i síla vztahují se vždy k téže konfiguraci systému, takže z této vektorové rovnice plyne rovnost jejich složek v každé soustavě souřadné. Zbývá jen vypočítati gradient energie. Vzhledem k (31) plyne z (33)

$$d\,E = M\,\mathfrak{v}\,d\,\mathfrak{v} + \frac{\partial U}{\partial p_k}\,dp_k\,,$$

či dle (30)

$$d\,E = \left(M\,a_k + \frac{\partial U}{\partial p_k}\right)dp_k\,.$$

Výraz v závorce představuje redukovaný koeficient vektorového diferenciálu energie, poněvadž jsme vyšli od nejjednoduššího tvaru diferenciálu a při úpravě na lineární formu dp_k jsme ani nepřipojovali dalších členů, aniž jsme čímkoliv násobili. Je tedy složkou gradientu energie:

(35) $$grad_k\ E = Ma_k + \frac{\partial U}{\partial p_k}\,, \qquad grad\ E = M\mathfrak{a} + \text{grad}\ U.$$

Tím docházíme k rovnicím

(36) $$Ma_k + \frac{\partial U}{\partial p_k} = P_k\,, \qquad M\mathfrak{a} + grad\,U = \mathfrak{P},$$

které úplně stanoví průběh děje v systému za působení dané síly a při daném počátečním stavu. Vidíme tedy, že axiom (IIa), připojený k principu energie, vede k ú p l n é m u ř e š e n í předložené úlohy.

Silový axiom můžeme však vysloviti ještě v poněkud jiné formě. *grad U* je totiž kovariantní vektor, jehož skalární součin s posuvem systému dává vzrůst potenciální energie (vlastní). Existence potenciální energie způsobuje, že aktuální energie může se měniti i u systému isolovaného. Její přírůstek je však roven k l e s n u t í potenciální energie; interpretujeme-li tedy *grad U* jako sílu, musíme jej vzíti s opačným znamením. Proto vektor

(37) $$\mathfrak{P}' = -\,grad\,U$$

nazýváme *vnitřní silou,* abychom jej odlišili od sil, jichž původ leží mimo

systém a jež vskutku do systému vnášejí energii. Označíme-li pak vektor

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{P} + \mathfrak{P}'$$

jako *celkovou* sílu na systém působící, přejde (36) ve vztah

(38) $$M\mathfrak{a} = \mathfrak{S}.$$

Kdybychom dále psali

$$M\mathfrak{a} = \frac{d}{dt}(M\mathfrak{v})$$

a nazvali vektor

(39) $$M\mathfrak{v} = \mathfrak{G}$$

impulsem systému, měli bychom

(40) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{S}.$$

Je nyní patrno, že rovnici (38) resp. (40) bychom obdrželi přímo z rovnice energie, kdybychom vyslovili silový axiom v tomto rovněž invariantním tvaru:

(IIb). Zrychlení systému závisí jen na (celkové) síle a to způsobem stejným pro všechny síly;

resp.

(IIc). Impuls systému se mění způsobem závislým jen na síle působící; tato závislost jest pro všechny síly táž.

[*Poznámka.* Předpokládal jsem existenci obecného předpisu, který udává, jak z principu energie dospějeme k diferenciálním rovnicím, stanovícím děj v systému. Tu jsme seznali, že při užití vektorů jeví se získané rovnice jako nejjednodušší ze všech, které silový axiom v obecném tvaru (II) připouští. Kdyby se nám však jednalo jen o matematický postup, který vede z rovnice energie k rovnicím dynamickým, mohli bychom jej vysloviti tímto formálním předpisem: »vyjádříme rovnici energie pomocí vektorů, s nimiž pak operujeme jako se skaláry. Tím získáme rovnici, která se stane vektorovým vyjádřením dynamických rovnic, jakmile vrátíme vektorům jejich původní význam«. Pišme rovnici energie na př. ve tvaru:

$$dT = S_k\, dp_k\,,$$

vektorově tedy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M\, \mathfrak{v}^2\right) = \mathfrak{S}\mathfrak{v}.$$

Pokládejme nyní $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{S}$ za skaláry. Pak

$$M\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{S}\mathfrak{v}$$

a krátíme-li $\mathfrak{v}$, obdržíme skutečně

$$M\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{S}.$$

Uvedený postup by byl předem — bez jakýchkoli postulátů — oprávněn, kdyby měl systém jediný stupeň volnosti. V tomto případě stačí k odvození hledaných rovnic samotný princip energie. Při užití vektorové symboliky je tedy souvislost obecných dynamických rovnic s principem energie formálně stejně jednoduchá jako pro jeden stupeň volnosti.]

Celkem tedy konstatujeme, že silový axiom ve kterémkoli z posledních vyjádření (IIa, b, c) vede spolu s principem energie k žádanému počtu rovnic pro libovolný dynamický systém, podrobený silovému působení.

§ 9. *Výsledné rovnice.* Ze silového axiomu vyplývá platnost rovnic (36) resp. (38), (40) pro každý dynamický systém, anholonomní i rheonomní, neboť jsou pouhou specialisací rovnic (9), o nichž jsme to dokázali. Při tom ovšem není systém podroben žádným dalším podmínkám, počet rovnic (36) je rovný počtu stupňů volnosti. Kdyby však byly předepsány vazby nejobecnějšího tvaru (10), obdržíme příslušné rovnice připojením vazbových sil podle (11). Pro systém vázaný musíme tedy místo (36) užíti rovnic

$$M a_k + \frac{\partial U}{\partial p_k} = P_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, Q_k^i . \tag{41}$$

Ale je patrno, že koeficienty Q_k^i možno interpretovati jako kovariantní složky vektorů, k nimž musí býti virtuální posuvy v každém okamžiku kolmé. Podle věty odvozené v § 5. také *síly vazbové jsou kolmé k virtuálním posuvům.* Jsou-li podmínky (10) nezávislé, jsou též vektory $\mathfrak{Q}^i$ nezávislé a tvoří m-rozměrnou *množinu vektorovou,* jejíž každý vektor lze vyjádřiti lineárně pomocí $\mathfrak{Q}^i$. Ale všechny vektory $(m+\nu)$-rozměrné variety kolmé k ν-rozměrné vektorové množině tvoří m-rozměrnou množinu, takže vazbová síla je stanovena rovnicí

$$\overline{\mathfrak{P}} = \lambda_i \, \mathfrak{Q}^i .$$

Tím jsme získali na volbě parametrů nezávislé vyjádření vazeb i vazbové síly. Můžeme pak i rovnice (41) shrnouti v jedinou rovnici vektorovou

$$M\mathfrak{a} + grad\, U = \mathfrak{P} + \lambda_i \, \mathfrak{Q}^i \, , \tag{41'}$$

pro vazby holonomní $\Phi^i = 0$ také

$$M\mathfrak{a} + grad\, U = \mathfrak{P} + \lambda_i \; grad\, \Phi^i \, .$$

Ve všech těchto rovnicích vystupuje potenciální energie, aktuální jen nepřímo. Avšak

$$\frac{\partial T}{\partial v_k} = M v_k = G_k \, , \tag{42}$$

mimo to

$$dT = M \mathfrak{v} \, d\mathfrak{v},$$

takže symbolicky lze psáti

$$\frac{dT}{d\mathfrak{v}} = \mathfrak{G},$$

nebo, poněvadž M je konstanta,

$$\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{v}} = \mathfrak{G}. \tag{42'}$$

Rovnice (42) a (42′) definují *derivaci podle vektoru.*[14]) Poněvadž pak U nezávisí na $\mathfrak{v}$, jest také

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{v}} = \mathfrak{G}.$$

Chceme-li tedy vyznačiti souvislost dynamických rovnic s energií systému, můžeme místo (36), (40) užíti některého z těchto tvarů

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{v}} + \operatorname{grad} U = \mathfrak{P}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{v}} = \mathfrak{S}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{v}} = \mathfrak{S}. \tag{43}$$

V těchto rovnicích vystupují mimo sílu jen veličiny odvozené z vlastní energie systému způsobem na volbě parametrů nezávislým. V posledních dvou pak nevystupuje explicite energie potenciální, za to ovšem je třeba uvažovati také vnitřní sílu.

Zbývá ukázati, že odvozené rovnice vyjadřují skutečně známé zákony platné pro systémy dynamické. Kovariantní složky zrychlení v holonomní varietě jsou stanoveny rovnicemi (25). Označíme-li kvasiparametry π_ϱ a jim příslušné složky vnější síly Π_ϱ, obdržíme z (41′)

$$M g_{\varrho\sigma}\frac{dv^\sigma}{dt} + M\begin{bmatrix}\iota & \varkappa \\ & \varrho\end{bmatrix} v^\iota\, v^\varkappa + M\left(\frac{\partial \alpha_l^\varkappa}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_k^\varkappa}{\partial p_l}\right)\beta_\varrho^l\, \beta_\tau^k\, v_\varkappa\, v^\tau + \frac{\partial U}{\partial \pi_\varrho} =$$
$$= \Pi_\varrho + \lambda_i\, \beta_\varrho^r\, Q_r^i.$$

Srovnáním (18) a (19) plyne

$$M g_{\varrho\sigma} = a_{\varrho\sigma},$$

takže

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_\varrho} - \frac{\partial T}{\partial \pi_\varrho} + \left(\frac{\partial \alpha_l^\varkappa}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_l^\varkappa}{\partial p_l}\right)\beta_\varrho^l\, \beta_\tau^k\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_\varkappa}\, \dot{\pi}_\tau + \frac{\partial U}{\partial \pi_\varrho} = \tag{44}$$
$$= \Pi_\varrho + \lambda_i\, \beta_\varrho^r\, Q_r^i.$$

Tyto rovnice platí pro nejobecnější holonomní systém v případě kvasiparametrů vázaných podmínkami. Jsou-li jich diferenciály nezávislé a označíme-li celkovou sílu Σ_ϱ, bude

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_\varrho} - \frac{\partial T}{\partial \pi_\varrho} + \left(\frac{\partial \alpha_l^\varkappa}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_k^\varkappa}{\partial p_l}\right)\beta_\varrho^l\, \beta_\tau^k\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_\varkappa}\, \dot{\pi}_\tau = \Sigma_\varrho, \tag{45}$$

což jsou *zobecněné Lagrangeovy* či *Lagrange-Eulerovy rovnice,* jak je

[14]) Srovn. na př. B. Kučera: Základy mechaniky tuhých těles. 1921, § 52.

známe z mechaniky,[15]) které pro holonomní parametry přejdou ovšem v rovnice Lagrangeovy. Je-li však systém a n h o l o n o m n í, je varieta jeho poloh rovněž anholonomní a zrychlení je dáno rovnicemi (29). Dosazením do (41) získáme relace

$$(46) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_\varrho} - \frac{\partial T}{\partial \pi_\varrho} + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r}\left(\frac{\partial \beta^r_\varkappa}{\partial \pi_\varrho} - \frac{\partial \beta^\varrho_r}{\partial \pi_\varkappa}\right)\dot{\pi}_\varkappa + \frac{\partial U}{\partial \pi_\varrho} = \Pi_\varrho + \lambda_i \beta^r_\varrho Q^i_r,$$

z nichž plynou skutečně rovnice, které pro anholonomní systémy mechanické odvodil L. Boltzmann.[16])

V důsledku silového axiomu, který jsem vyslovil pro obecný systém dynamický, platí hořejší rovnice stejně obecně. Lze je tedy aplikovati a priori na každý dynamický systém, nejen na systémy mechanické. To je umožněno právě obecností pojmu energie, kterou jsem hned na počátku zdůraznil. Na rovnici (40) můžeme tedy pohlížeti jako na invariantní vyjádření obecného fysikálního zákona, který lze vysloviti formálně jako druhý axiom Newtonův pro pohyb hmotného bodu: *Změna impulsu je rovna celkové síle.* Kdybychom naopak tento zákon vyslovili jako princip, plynul by z něho zákon zachování energie.

Když ve zvláštním případě vnější síly kompensují síly vnitřní, — pak pravíme, že systém je *volný* — jest

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0, \qquad \mathfrak{a} = 0,$$

čili

$$\mathfrak{G} = \text{konst.}, \qquad \mathfrak{v} = \text{konst.}$$

Tedy *impuls volného systému je stálý,* jinými slovy *volný systém pohybuje se rovnoměrně a přímočaře ve varietě konfigurací.* Tím je vyjádřen *obecný zákon setrvačnosti.* Setrvačnost je tedy vlastností systémů dynamických.

Někdy se může státi, že aktuální energie je velmi malá proti potenciální. To můžeme vyložiti malou velikostí konstanty M, kterou vzhledem k analogii s hmotným bodem lze nazvati *dynamickou hmotou* systému. Kdybychom předpokládali hmotu M rovnou nule, stal by se dynamický systém systémem 1. řádu. Můžeme ostatně pro velmi malé rychlosti pokládati každý dynamický systém za systém 1. řádu (na př. pro děje zvratné). Zanedbáme-li členy obsahující jako faktor derivace parametrů, obdržíme

$$grad\, U = \mathfrak{P} \text{ či } \frac{\partial U}{\partial \pi_\varrho} = \Pi_\varrho.$$

[15]) Na př. C. Schaefer: Phys. Zeitschr., XIX., 1918, p. 132, nebo Die Prinzipe der Dynamik, 1919, § 9.

[16]) Wissensch. Abh., III., p. 692.

Jsou-li vnější síly s časem proměnné, nebo je-li systém rheonomní, stanoví tyto rovnice parametry jako funkce času. Platí ovšem jen přibližně, tím přesněji, čím menší hodnoty mají derivace parametrů. Zcela přesně platí pak v případě *rovnováhy,* kdy systém jest během konečného času v téže konfiguraci. Nastane to jenom tehdy, když hořejší rovnice neobsahují času explicite. Jsou jimi pak stanoveny souřadnice konfigurací rovnovážných. Je-li systém isolován, nastane rovnováha jen v těch konfiguracích, v nichž je potenciální energie stacionární.

[*Poznámka.* Newtonův princip setrvačnosti rozšířil již Hertz (Die Prinzipien der Mechanik) na systém isolovaných bodů hmotných, kdežto C. Schaefer[17]) ukázal, že lze definici elementu dráhy systému voliti tak, aby stejný zákon setrvačnosti platil i za působení konservativních sil. Hertzovy definice plynou přímo specialisací v této práci zavedených pojmů.]

*

Přehlédneme-li získané výsledky, vidíme, že skutečně lze z principu energie odvoditi diferenciální rovnice řídící průběh dějů ve fysikálních systémech uvažovaného druhu.

Matematicky představuje rovnice energie jeden z prvních integrálu dynamických rovnic. Proto bylo nutno k principu zachování energie připojiti další předpoklady, abychom došli k rovnicím, které ve fysice opravdu platí. Při tom jest podstatnou okolnost, že tyto další suposice jsme mohli voliti obecně, takže jsou společné různým oborům fysiky. Lze říci, že po stránce matematické jsme daný problém řešili způsobem v celku jednoduchým. Tu nám vlastní energie představuje funkci stavu systému, která jej charakterisuje, pokud jde o jeho reakci na vnější působení. Tvar této funkce vede pomocí postulovaných principů jednoznačně k zákonům, jimž podléhají procesy probíhající v systémech. V tom je možno spatřovati největší význam energie pro matematické zpracování fysikálních problémů.

Pokládali jsme pojem energie za a priori daný, vyznačený jen onou její vlastností, kterou vyslovuje princip energie. Tu se naskýtá otázka, má-li energie vůbec f y s i k á l n í význam, představuje-li něco, co má reálnou podstatu. Odpověď na tuto otázku předpokládá určitý filosofický názor o existenci a poznání. My se spokojíme faktem, že nic nám nebrání pokládati energii za skutečnou fysikální veličinu, která existuje stejně »reálně«, jako všechny ostatní. Naopak její invariantní charakter, zřejmý zvláště z vektorového vyjádření aktuální energie jako skalárního součinu rychlosti a impulsu, plně k tomu opravňuje.

---

[17]) Die Prinzipe der Dynamik, 1919.

Při tom rád bych upozornil na jedno. Aplikací zásad infinitesimální geometrie na varietu konfigurací systémů docílili jsme jednoduché invariantní formulace silového axiomu i pomocí něho odvozených dynamických rovnic, které vedou k fundamentálním zákonům nejdůležitějších skupin fysikálních zjevů. To můžeme pokládati za dostatečný důvod k tomu, abychom v metrice zavedené ve varietě konfigurací nespatřovali pouze vhodnou konvenci, ale spíše na fysikálních zákonech založenou vlastnost množiny poloh, jež systém může zaujmouti. Přes to ,že užíváme názvů obvyklých v geometrii, není nutno pohlížeti na celou věc jako na pouhé geometrické znázornění, spíše jako na z o b e c n ě n í pojmu geometrického prostoru, který se nám takto jeví speciálním druhem *prostoru fysikálního*, v němž se odehrávají fysikální děje za platnosti týchž jednoduchých zákonů, které řídí pohyb hmotného bodu v euklidovském prostoru třírozměrném. Vektorům, jež jsme zavedli: síle, rychlosti, impulsu můžeme přisouditi skutečný fysikální význam, stejně jako to činíme v prostoru geometrickém. Potom také obecný zákon: »časová změna impulsu je rovna síle« vyjadřuje na volbě soustavy souřadné nezávislý vztah mezi fysikálními veličinami, úplně definovanými při známé metrice, která opět plyne z tvaru energie. Předpokládáme-li naopak a p r i o r i všeobecnou platnost tohoto zákona, můžeme na podkladě fysikálních měření zjistiti, jaká »geometrie« v určitém fysikálním prostoru platí.

Jedná se ještě o l o g i c k o u stránku v této práci načrtnutého založení fysiky. Musíme konstatovati, že nečinilo obtíží vycházeti z pojmu energie a na základě tohoto tvořiti ostatní. Známe-li tvar energie pro uvažovaný případ, stanovíme čistě logickým pochodem platné zákony z principů, jichž obecnou platnost jsme suponovali. Při tom předpokládáme, že lze energii v každém případě experimentálně určiti. Avšak logické vybudování vyžaduje jistých premis — axiomatických základů — z nichž pouhou spekulací lze dojíti k žádoucímu výsledku. Toho dosáhneme na př. tím, že prostě definujeme energii pro jednoduché elementární systémy, z nichž synthesou obdržíme systémy složitější, s nimiž se v konkrétních případech setkáváme, což podrobněji vyložím v další práci. Při tom jest lhostejno, zda a s jakou přesností ony myšlené systémy můžeme ve skutečnosti realisovati. A právě různost těchto definicí — rozmanitost fysikálního významu veličin, které v těchto definicích vystupují — způsobuje odlišnost jednotlivých fysikálních zákonů mezi sebou. Vše ostatní je společné.

Uvažujeme-li každý obor fysiky zcela samostatně, není snad silnějších důvodů pokládati energetické založení fysiky za výhodnější než jiné. Jakmile však máme na mysli c e l o u fysiku, chápajíce ji jako je-

dinou, organicky souvislou vědu, přichází v úvahu jednotnost a ucelenost energetického pojetí.

Naznačil jsem zde hlavní idee, na jejichž podkladě by bylo možno vybudovati fysikální soustavu. Jsem dalek toho, abych metody, které tuto uvádím, pokládal za bezvadné, přece však se domnívám, že lze na celek pohlížeti jako na jedno z možných řešení problému, který jsem si předložil, a myslím, že by nebylo bez užitku, kdyby se došlo v tomto směru k dalším výsledkům, neboť je jisto, že energie nabývá ve fysice stále většího významu.

V Praze v říjnu 1924.

Le principe de la conservation de l'énergie et les équations de la Physique.

Dans l'article précédent, je m'occupe du problème de déduir les équations relatives à un système général de physique, en partant du principe de la conservation de l'énergie. Celui-ci n'exprimant qu'une seule condition, il est évident qu'il est nécéssaire d'ajouter des hypothèses nouvelles, pour déterminer le procès parcourant dans le système.

Après des considérations générales, concernant les idées et les définitions fondamentales, j'arrive à formuler mon *axiome dynamique:* »Entre tous les formes linéaires des différentielles, exprimant le changement de l'énergie d'un système pendant un intervalle infiniment petit de temps, il n'existe qu'une seule dont les coefficients ne dépendent que de la force agissant sur le système. Cette relation est la même pour tous les forces.« Si les différentielles dp_k des paramètres sont indépendantes et si nous désignons E_k les coefficients de la forme nommée et P_k les composantes correspondantes de la force, nous obtiendrons les équations (9), restant valables même pour les paramètres anholonomes. Dans le cas général où les paramètres sont liés par des conditions anholonomes et rheonomes (10), on obtiendra les équations (11). Ce sont les conséquences logiques du principe de la conservation de l'énergie et de l'axiome dynamique. Les équations (9) ne sont suffisantes à résoudre le problème posé que si nous déterminerons les coefficients E_k^*, mais cela fait, elles représentent une solution exacte du problème.

Alors, si nous voulons résoudre complètement notre problème, nous sommes obligés de restreindre la généralité de nos recherches. Bornons nous, dans la suite, aux systèmes dont l'énergie est la somme des deux parties, potentielle et actuelle, la première U étant une fonction des paramètres seules, la deuxième T étant une forme quadratique (symétrique) des dérivées des paramètres par rapport au temps dont les coefficients supposons comme des fonctions quelconques des paramètres. (Le déterminant de ces coefficients ne doit pas s'annuler.)

Il paraît avantageux adopter à la variété des configurations d'un tel système les idées du calcul différentiel absolu. Si nous la considérons comme un *espace de Riemann* dont la forme quadratique fondamentale est proportionelle à l'énergie actuelle (le facteur $\frac{1}{2}$ M soit constant), les dérivées des paramètres seront les composantes v^k d'un vecteur contrevariant — de la *vitesse* du système, P_k les composantes covariantes de la force. Alors, l'énergie actuelle devient proportionelle au carré de la grandeur de la vitesse et on peut définir un vecteur covariant, le *gradient de l'énergie (grad E).* Les composantes de celui-ci sont formées par les coefficients de la forme linéaire la plus simple entre tous les formes qu'expriment la *différentielle vectorielle* de l'énergie. Cela posé, nous pouvons donner à l'axiome dynamique une forme invariante et plus précise: »Le gradient de l'énergie d'un système ne dépend que de la force agissant, d'une manière égale pour tous les forces.« En ajoutant cet axiome au principe de la conservation de l'énergie, nous sommes conduits aux relations (34). Ces résultats sont les mêmes pour les paramêtres anholonomes, si l'on généralise les définitions respectives de la géométrie infinitésimale. Ils résultent d'un calcul facile pour les composantes de *grad E* les termes (35) où a_k désignent les composantes covariantes de l'accélération du système; donc, nous avons les équations (36) qui présentent une solution véritable de notre problème, car elles ne sont qu'une autre forme des équations généralisées de Lagrange (45) ou de Boltzmann (46), bien connues dans la mécanique.

Au lieu de l'accélération, il est convenable d'introduir la dérivée vectorielle de la *quantité de mouvement* du système, dont les composantes covariantes G_k sont définies par les équations (42). Si nous appellons la force intérieure le vecteur — *grad U* et si nous désignons la somme vectorielle de celle-ci et de la force extérieure comme la force *totale,* il est possible de formuler l'axiome dynamique d'une manière nouvelle: »l'accélération d'un système ne dépend que de la force totale; cette relation est pour les forces quelconques la même«, ou »la quantité de mouvement d'un système change d'une manière, tout à fait déterminée par la force totale, qui est la même pour tous les forces«. De là, il résulte une lois générale de physique: *le changement de la quantité de mouvement est égale à la force* dont l'invariance se manifeste dans son expression par l'équation vectorielle (40).

Alors, on peut constater, dans le cas particulier considéré, que le principe de la conservation de l'énergie à l'aide de l'axiome dynamique conduit à la solution complète du problème donné.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 26.

Dr. J. HRDLIČKA:

O poměrech hustot bromostříbrných desek pro různé gradační intervaly v X-spektrech.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1924. ČÍSLO 26.

Dr. J. HRDLIČKA:

O poměrech hustot bromostříbrných desek pro různé gradační intervaly v X-spektrech.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dr. J. Hrdlička:

O poměrech hustot bromostříbrných desek pro různé gradační intervaly v X-spektrech.

Účinek röntgenových paprsků na desku fotografickou jeví se podobně jako při účinku světla obyčejného schopností redukce zrnéček bromidu stříbrného redukčními látkami v kovové stříbro, tedy výsledným zčernáním desky. Dle Lüppo-Cramera způsobuje X-záření vedle chemického odštěpení halogenu (bromu) ještě změnu fysikální, mechanické rozprašování zrn bromidu stříbrného, takže vznik latentního röntgenového obrazu jest vlastně směsí těchto dvojích účinků röntgenových paprsků na desku bromostříbrnou. Již také Röntgen[1]) uvádí ve své předběžné práci možnost, že účinek X-záření jest sekundární a vzniká teprve fluorescencí pojidla gelatýny.

K fotometrii röntgenových paprsků užívá se často metody fotografické. K tomu účelu musí však býti napřed známy vztahy mezi fotografickým účinkem, který jeví se výsledným zčernáním desky, dobou působení a všemi faktory, které mají vliv na intensitu a tvrdost záření.

Těmito faktory jest jednak:

1. Vnější účinek energie zářivé, resp. intensita a doba působení na vznik latentního obrazu. (Sem patří všechny ty faktory, které mají vliv na intensitu a charakter záření, jako jest na př. napětí a intensita proudu.)

2. Fotochemické vlastnosti fotografické desky (jsou to charakteristické znaky desky, související s výrobou emulse) a způsob redukce latentního obrazu.

Chci krátce ukázati, do jaké míry dotýkají se některé práce jednotlivostí, jež jsem uvedl.

Tematem práce Krönckeovy[2]) jest studovati závislost mezi černáním a současně proměnnou jak intensitou, tak dobou působení, tak aby

---

[1]) W. K. Röntgen, Eine neue Art von Strahlen. (Vorläufige Mittheilung.) Sitzungsberichte der Würzburger Physik.-med. Gesellschaft, 1895.

[2]) H. Kröncke, Ueber die Messung der Intensität und Härte der Röntgenstrahlen. Annalen der Physik, Bd. 43, str. 687.

součin z obou byl konstantní. Vztahy tyto studuje pro záření nehomogenní, konstantnost tvrdosti záření reguluje vzduchovým ventilem, takže napětí kolísá v rozdílech až 6%. Jako desek užívá Schleussnerových röntgenových desek, které vyvolává vývojkou železnato-šťavelovou. Dochází na základě svých výsledků k závěru, že pro röntgenové desky Schleussnerovy platí zákon Bunsen-Roscoeův. Jest tedy konstanta *p* v zákoně Schwarzschildově rovna v tomto případě jedné, nebo jest jistě větší než 0·96. Pro závislost napětí při téže intensitě dostává křivku v mezích 15—35 kilovolt. Podotýká, že pro nehomogennost záření není napětí měrou délky vlny, vztah ten musil by býti prý zkoumán v homogenním záření sekundárním. Tento výsledek nesouhlasí s pozorováním Röntgenovým,[3]) který ve své třetí práci uvádí, že za jinak stejných poměrů černání desky jest tím menší, čím záření jest tvrdší, neboť tvrdšímu záření odpovídá větší prostupnost a tím menší absorpce. Kröncke nesouhlas tento vysvětluje tím, že obor jeho měření není dostatečně široký.

W. Friedrich a P. P. Koch[4]) podali první práci, která se zabývá zákonem černání fotografické desky působením X-záření. Závislost studují rourovým fotometrem v homogenním záření charakteristickém, vzniklém dopadem záření přímého na desky různých kovů: železa, olova, zinku a cínu. Materiálem fotografickým jsou Schleussnerovy röntgenové desky a filmy a röntgenové desky Hauffovy; vyvoláváno rodinalem 1 : 10 s velkou přísadou bromu po 8 minut. Použitím však fotometru rourového i při exposicích až desetihodinových jest měření omezeno pro obor hustot malých, pro $H = 1{\cdot}1$ (po odečtení závoje). Body, které tvoří tyto intensitní křivky, dají se s velikým přiblížením až pro $H = 0$ proložiti přímky. Nevykazuje proto intensitní křivka röntgenová na rozdíl od intensitní křivky pro světlo obyčejné žádnou mezní hranici. (Schwellenwert.)

Výsledky tyto potvrdili a pro větší hustoty (až pro $H = 4{\cdot}0$) měření rozšířili R. Glocker a W. Traub[5]). Jako zdroje homogenního, sekundárního záření *Se, Sr, Mo, Ag, Sb* a *Ba* užito sekundárního analysátoru

---

[3]) W. C. Röntgen, Weitere Beobachtungen über die Eigenschaften der X-Strahlen. (Dritte Mittheilung.) Annalen der Physik und Chemie. Bd. 64, 1898, str. 18.

[4]) W. Friedrich u. P. P. Koch: Ueber die Methoden zur photographischen Spektralphotometrie der Röntgenstrahlen. Annalen der Physik, Bd. 45, str. 399, 1914.

[5]) R. Glocker u. W. Traub: Das photographische Schwärzungsgesetz der Röntgenstrahlen. Physikalische Zeitschrift, 22, Nr. 12, 1921, str. 345. R. Glocker: Experimentelle Untersuchungen über die physikalischen Grundlagen der Röntgendiagnostik. Fortschritte a. d. Gebiete d. Röntgenstrahlen. XXIX., 1., str. 100.

Glockerova. Exponováno na röntgenové desky Hauffovy a vyvoláváno 5 minut adurolem s potaší a bromidem draselným při teplotě 18° C.

Práci lze rozděliti ve tři části:

1. Závislost mezi černáním a exposiční dobou,

2. vliv vlnité délky,

3. vztah mezi fotografickým účinkem a součinem intensity a exposiční doby. (Potvrzení platnosti zákona Bunsen-Roscoe-ova resp. zákona Schwarzschildova.)

Výsledky potvrzeno, že gradační křivka bez mezní citlivosti, tedy od $H = 0·0 — 1·0$ je přímka, pouze však pro určitou temperaturu lázně a dobu vyvolávání. Pro každou redukční látku, na jejímž chemickém složení záleží jen velmi málo, lze nalézti optimum vyvolávání tak, aby průběh gradační křivky až po $H = 1·0$ byl lineární. Od toho bodu (přibližně $H = 1·3$), kde končí závislost lineární a jehož poloha závisí tedy na způsobu redukce, přibývá hustoty až po $H = 4·0$ pomaleji a to s logarithmem exposiční doby resp. s logarithmem intensity. Při $H = 4·0$ nastává konečně solarisace.

Závislost mezi černáním a délkou vlnitou zkoumána pro $\lambda = 1·1 — 0·4 \,\text{Å}$, zvláště pak při přechodu absorpčních hran stříbra anebo bromu a nalezena velmi jednoduchá: křivka černání nezávisí na délce vlnité.

Úchylky od zákona Bunsen-Roscoeova shledány velmi nepatrné; pro konstantu Schwarzschildovu, která jen málo liší se od 1, nalezen průměr 0·98 ± 0·01, takže přibližně platí reciproční zákon Bunsenův.

Závislostí mezi černáním a různým způsobem vyvolávání (faktory druhého druhu, vlivy chemické), zabývá se práce Schlechterova[6]). Jako zdroje záření užito opětně analysátoru Glockerova. Röntgenové desky Hauffovy exponovány různě dlouho za jinak stejných poměrů záření (pro $\lambda = 0·49 \,\text{Å}$) a různým způsobem vyvolávány. Látky redukční byly tyto: metol-hydrochinon s bromidem draselným, glycin, adurol a pozvolné vyvolávání glycinem.

Rapidní vývojka (metol-hydrochinon) při větších hustotách kryje hustěji než při hustotách menších; pomalá vývojka naopak (glycin). Křivka pro adurol leží uprostřed. Všecky tři křivky se při hustotě 0·48 protínají. Pozvolné vyvolávání vývojkou zředěnou na př. glycinem nemá

[6]) E. Schlechter, Einfluss der Entwicklungsweise u. Wirkung des Verstärkungsschirmes auf die phot. Platte bei Röntgenstrahlen. Physikalische Zeitschrift, XXIV, 1923, No. 2, str. 29 a kapitola v citované již práci Glockerově: Die Abhängigkeit der Schwärzung von den chemischen Einflüssen. Fortschritte a. d. Gebiete d. Röntgenstrahlen, XXIX., 1., str. 108.

ani pro malé hustoty žádné výhody a přednosti. Užití našlo by se snad tam, kde by bylo třeba zmenšiti kontrasty v gradačním intervalu velkých hustot. Prodloužení doby vyvolávací (zvláště pro glycin) znamená vzrůst černání a to v oboru hustot malých i velkých, přibližně v témž poměru, v jakém doba vyvolávací byla prodloužena. Zvýšení teploty (pro tutéž vývojku) odpovídá větší černání, pouze však pro hustoty větší a znamená tudíž prodloužení té části gradační křivky, kde černání desky je přímo úměrno exposiční době nebo intensitě. Jak až možno teplotu zvyšovati, nedá se všeobecně říci, neboť to závisí na druhu vývojky. (Vzrůst závoje při vyšších teplotách různý pro různé vývojky.) Pro röntgenografii nedá se určitá vývojka jako nejlepší doporučiti. Nezáleží na druhu, jako na způsobu, jakým se s ní pracuje. Křivka gradační dá se do značné míry změniti koncentrací vývojky, její teplotou, dobou vyvolávací atd. Určitou volbou doby vyvolávací a teploty vývojky dá se najíti jakési optimum vyvolávací, při němž lineární část gradační křivky dá se prodloužiti až k hustotě 1—1·3.

Práce B o u w e r s o v a[7]) zabývá se opětně

1. exposiční dobou,
2. intensitou a
3. vlnitou délkou.

Užito záření přímého nehomogenního i monochromatického, desek Gevaert-Sensima a vyvoláváno rodinalem Agfa bez bromidu draselného. Dle výsledků je gradační křivka časová jako závislost mezi černáním a dobou exposiční v souhlase s pracemi předešlými v oboru hustot malých přímkou. Pro hustoty větší až pro $H = 2{\cdot}0$ dá se závislost vyjádřiti vzorcem, který odvodil B u s é pro světlo obyčejné, je-li vyvoláváno bez přísady bromidu draselného,

$$H = C \log. \left(\frac{t}{\tau} + 1\right),$$

kde C a τ jsou konstanty. Konstanta C závisí na době vyvolávání a to s rostoucí dobou vyvolávací roste k jakési mezné maximální hodnotě. Z měření Schwarzschildovy konstanty plyne průměrná hodnota

$$p = 0{\cdot}99 \pm 0{\cdot}02.$$

Dosadíme-li pak za ní hodnotu přibližnou $p = 1$ do vzorce

$$H = f\,(J \,.\, t^p),$$

---

[7]) A. Bouwers, Ueber die Schwärzung der photographischen Platte durch Röntgenstrahlen u. ihre Anwendung zur Intensitätsmessung. Zeitschrift für Physik, Bd. 14, 6, 1923, str. 374.

dostaneme tento zákon černání

$$H = C \cdot \log\left(\frac{J \cdot t}{a} + 1\right),$$

kde C a a jsou konstanty, J značí intensitu a t čas. Dle výsledků měření pro monochromatické záření pro K_α-linie *Pd, Mo* a *Cu* není konstanta černání C závislá na vlnité délce záření.

Z uvedených prací jest patrno, že bylo skoro výhradně zkoumáno působení röntgenových paprsků v každém případě na jediný specielní druh fotografických desek. Nebyl však dosud studován vztah mezi různým druhem fotografické emulse a fotografickým účinkem, t. j. černáním při různých délkách vlnitých. V této práci bylo pak snahou zkoumati vztahy mezi těmito faktory, jež tedy jsou

1. fotochemické vlastnosti různých druhů fotografických emulsí, které jeví se zvláště základními vlastnostmi charakteristickými, jako jest citlivost a gradace desky,
2. vliv vlnité délky na citlivost desky.

O citlivosti různých desek pro X-paprsky jsou, pokud mi známo, pouze malé zmínky ze zkušenosti, které uvádí na př. Lüppo-Cramer[8]) nebo Eder a Valenta[9]) a které týkají se citlivosti speciálních desek röntgenových a desek obyčejných. Desky obyčejné jsou pro X-záření méně citlivé přes to, že pro denní světlo a zdroje sensitometrické jsou zase citlivější.

Pro viditelné záření rozumíme citlivostí fotografické desky schopnost redukce bromidu stříbrného vlivem látek redukčních v kovové stříbro. Citlivost určité emulse fotografické je pak tím větší, čím menší množství energie zářivé je třeba za jinak stejných podmínek k tomu, aby nastaly první stopy fotochemického účinku. Závislost této citlivosti na vlnité délce v oboru spekter optických již v oboru jediné oktávy je velice značná. Obor citlivosti i citlivost sama v oboru spektra viditelného zvětšuje nebo se rozšiřuje přítomností sensibilačních barviv. Proto byla na snadě otázka, jaký je vztah citlivosti nebo změna citlivosti a změna gradace různých desek bromostříbrných pro délky vlnité v oboru X-spekter.

Fakt, že křivka černání pro určitý druh desek nezávisí na vlnité délce záření, znamená, že průběh — přibývání černání s rostoucí dobou exposiční resp. intensitou je pro všecky vlnité délky X-záření totéž. Tento fakt však neznamená, že vlastní citlivost fotografické desky, tedy velikost černání pro linie různé délky vlnité za jinak stejných intensit záření se

[8]) Lüppo-Cramer, Die Röntgenographie in ihrem photographischen Teil. Encyklopädie der Photographie, Heft 67., 1909, str. 70.

[9]) Photographische Mitteilungen, Jahrgang 32., 1896, str. 382.

nemění. Velikost tohoto černání, této citlivosti, může, jak dalo by se očekávati dle některých okolností, záviseti právě na vlnité délce záření.

Dle uvedených prací, které úzce dotýkají se tohoto tematu, nedá se citlivost pro X-paprsky podobně definovati jako pro světlo obyčejné. Podle Edera definuje se citlivost desky pro světlo obyčejné jako první stopa fotochemického účinku světla, nebo jak jest tomu při všech metodách sensitometrických poslední číslice nebo poslední políčko fotometru, které lze ještě odečítati. Proto v této práci byla měřena výsledná hustota redukovaného röntgenového obrazu a srovnávána vždy s hustotou desky, která zvolena za základní a která se zkoumanou deskou současně byla exponována. Hustotou rozumíme briggický logarithmus poměru

$$H = \log \frac{I_0}{I},$$

kde I_0 je intensita světelného zdroje fotometru seslabená po průchodu vrstvou vyloučeného stříbra fotografické desky na I.

Jest ovšem otázkou, v kterém oboru dá se čekat obdobná závislost změny citlivosti jako je změna citlivosti obyčejné desky fotografické v oboru spektra viditelného pro část fialovou a ultrafialovou proti citlivosti téže desky pro ostatní délky vlnité. Závislost citlivosti studována v této práci v oboru vlnitých délek 2·5 $\bar{\bar{A}}$ — 0·9 $\bar{\bar{A}}$. Obor ten zvolen proto, poněvadž nejsnáze bylo možno při užité aparatuře těchto délek vlnitých dosáhnouti.

Užito bylo kovové röntgenové trubice Debye-Hullovy s vyměnitelnou katodou a antikatodou v hlavních rysech totožné lampy popsané Siegbahnem.[10]) Čerpáno pomocí Volmerových skleněných pump rtuťových. K rozkladu záření dle rovnice Braggovy,

$$2d \cdot \sin \varphi = n\lambda,$$

použito krystalu vápencového o mřížkové konstantě 2d = 6058,08 X.J. Jako proudu užito bylo vysoko napjatého proudu střídavého, z něhož synchronně rotujícím přerušovačem vysekávány byly pouze fáze jednoho směru.

Aby bylo dosaženo co možná největší přesnosti, neboť není nikdy možno zaručiti, že linie jsou po celé délce stejně intensivní (případná nestejnost štěrbiny, reflexe a absorpce v krystalu atd.), vloženy vždy do kasety a současně exponovány tři desky, z nichž dvě krajní byly desky srovnávací a z nichž vždy vzat průměr pro prostřední desku zkoumanou.

---

[10]) M. Siegbahn, Bericht über die letzte Entwicklung der Röntgenspektroskopie. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektrotechnik. Bd. 1., Heft 3., 1921. str. 240.

Jak svrchu zmíněno, závisí výsledná hustota fotografického obrazu při témže fotochemickém účinku světla na mnoha faktorech, které zásadně jsou dvojího druhu: druh a způsob fabrikace dané emulse zahrnující v sobě charakteristické znaky určitého druhu desky jako je citlivost desky, její gradace atd. a způsob redukce latentního obrazu. Proto všechny desky byly vyvolávány stejně touže vývojkou metol-hydrochinonovou se sodou za přísady KBr tři minuty. Desky srovnávací a deska zkoumaná, které byly současně exponovány, byly také současně vyvolávány, stejně fixovány, prány atd., takže v úvahu přichází pouze druh emulse. Při vyvolávání používáno zařízení thermostatového, takže teplota lázně kolísala pouze v přípustných mezích 14·5°—16·0° C. Vliv teploty lázně vyvolávací na hustotu obrazu pro metol-hydrochinon jest málo znatelný.[11]) Pro nekontrolovatelné množství bromidu připravena pro každou trojici desek vždy čerstvá lázeň (100 *ccm* v misce pro formát 9 × 12) z těchto tří roztoků dle následujícího předpisu:

Roztok A.	H_2O (destil.)	1000 *g*
	metol	10 *g*
	Na_2SO_3 (krystal.) . . .	100 *g*
Roztok B.	H_2O	1000 *g*
	Na_2SO_3	75 *g*
	hydrochinon	20 *g*
Roztok C.	H_2O	1000 *g*
	Na_2CO_3 (krystal.) . . .	100 *g*

K vyvolávání mísí se vždy těsně před užitím 1 díl roztoku A + 1 díl B + 2 díly C + bromid draselný. Bromidu draselného v koncentraci 1 : 10 přidáno vždy na 10 *ccm* vývojky 1 kapka (ve 100 *ccm* vývojky obsaženo v 10 kapkách 0·07 KBr).

Desky proměřovány mikrofotometrem Hartmannovým. Klínek z densografu Goldbergova, jehož bylo použito, kalibrován pomocí desek ze sensitometru Scheinerova, proměřených polarisačním fotometrem Martensovým. Křivka kalibrační sestrojena z následujících dat, kde *H* je hustota políčka sensitometru Scheinerova, *K* odečtený dílek škály mikrofotometru a *K'* hodnoty vyrovnané z předešlých metodou nejmenších čtverců.

H	*K*	*K'*	*H*	*K*	*K'*
1·98	75·3	75·5	0·52	33·8	34·3
1·79	71·2	70·9	0·42	31·0	31·0
1·64	65·9	67·1	0·32	27·5	27·6
1·48	63·2	62·8	0·25	24·9	25·2

[11]) E. Schlechter, Physik. Zeitschrift, XXIV., No. 2., str. 30.

H	*K*	*K'*	*H*	*K*	*K'*
1·39	61·4	60·4	0·19	23·2	23·1
1·33	59·0	58·7	0·15	21·6	21·8
1·26	56·7	56·8	0·12	20·7	20·7
1·17	54·5	54·2	0·10	20·5	20·0
1·14	52·7	53·4	0·09	20·0	19·6
0·99	49·3	49·0	0·09	19·3	19·6
0·88	45·4	45·6	0·08	19·3	19·3
0·76	42·5	41·9	0·07	19·1	18·9
0·64	37·5	38·2			

Mikrofotometr vykompensován pro tentýž klínek ještě pro hustoty větší dle těchto měření:

H	*K*	*H*	*K*	*H*	*K*
2·28	66·0	2·01	59·6	2·34	67·3
2·26	65·9	2·91	75·1	2·15	64·4
2·22	65·5	2·66	72·9	2·05	60·9
2·15	64·4	2·44	69·3		

Za desku srovnávací zvolena deska »Eclipse« (The Imperial Dry Plate Co) č. em. 15156 a 16147, pro její vysokou citlivost, střední normální gradaci a poněvadž je zcela prosta závoje. Exponována $K_{\alpha_{1,2}}$ mědi, niklu, bromu a titania. Jako příklad metody měření a výpočtu uvádím toto měření:

Lumière, rapidité extrême:

	závoj	$Cu\,K_{\alpha 1}$	$Cu\,K_{\alpha 2}$	závoj
Deska čís. 193.				
	20·7	37·1	30·8	20·8
	20·2	36·6	30·9	20·5
		36·8	30·8	20·2
		37·0	31·2	
průměry:	20·5	36·9	30·9	20·5
redukce z kalibr. křivky	0·11	0·60	0·42	0·11
hustoty po odeč. závoje		0·49	0·31	
Deska čís. 192				
	23·9	34·2	30·2	23·6
	23·6	34·5	30·2	24·2
	24·0	34·4	30·0	24·0
	24·2		30·6	
		33·9	29·9	
		34·6	30·2	

	závoj	$Cu\,K_{\alpha 1}$	$Cu\,K_{\alpha 2}$	závoj
		33·9	29·7	
		34·8		
		33·9		
průměry:	24·0	34·3	30·1	23·9 – 24·0
redukce z kalibr. křivky	0·21	0·52	0·39	0·21
hustoty po odeč. závoje		0·31	0·18	

Deska čís. 191.

	závoj	$Cu\,K_{\alpha 1}$	$Cu\,K_{\alpha 2}$	závoj
	20·3	36·5	30·7	19·8
	20·7	36·4	31·4	20·1
	20·6	36·8	31·2	20·6
		36·4	31·1	
průměry:	20·5	36·5	31·1	20·2—20·4
redukce z kalibr. křivky	0·11	0·59	0·42	0·10 – 0·11
hodnoty po odeč. závoje		0·48	0·31	
průměry z desek 191 a 193		0·49	0·31	
výsledné poměry hustot desek (191, 193) : 192		1·6	1·7	

Rozdíly hustot obou desek srovnávacích byly pro Cu, Ni a Br v 70% všech měření v mezích 0·00—0·02, v 19% 0·02—0·05 a ve zbývajících 11% v mezích 0·05—0·09. Pouze pro Ti dosáhly rozdíly hodnot větších v oboru hustot 0·10—0·24. Že odchylky právě pro Ti dosáhly těchto hodnot, je patrno, že při měkčím záření jsou úchylky v nestejnosti intensity po délce linie větší. Absorpce pro toto měkčí záření vysvětluje tuto nestejnost, neboť již v aluminiu samém, 0·007 *mm* silném, jehož užito bylo za okénko při štěrbině, je absorpce 60%, takže případné znečištění i lehčími prvky, t. j. rozprášení z antikatody, které tvrdší záření téměř nemění, způsobuje v tomto případě tuto nestejnoměrnost. Krom toho nelze zaručiti nebo dosíci, aby tak tenká aluminiová folie byla po celé ploše stejně tlustá a každá nepravidelnost v tloušťce může snadno způsobiti zmíněné úchylky.

Údaje hustot při dalších výsledcích jsou již prosté závoje. H je hustota desky zkoumané, H_e srovnávací.

Hauff, ortochromatická, extra-rapid č. e. 10826.

	H	H_e	$H_e : H$
Cu	0·20	0·29	1·5
	1·45	1·35	0·9
	2·10	1·70	0·8
	0·49	0·63	1·3
	0·12	0·16	1·3

	H	H_e	$H_e : H$
	0·29	0·41	1·4
	0·89	0·87	1·0
	1·85	1·38	0·7
Br	0·14	0·22	1·6
	0·07	0·12	1·7
Ti	0·18	0·28	1·6
	0·33	0·45	1·4

Guilleminot, ultra-rapid, č. e. 10982.

Cu	0·39,	0·65	1·7
	1·50	1·75	1·2
	0·20	0·43	2·2
	1·12	1·36	1·2
Ni	0·07	0·09	1·3

R. Jahr, červená etiketa, č. e. 5322.

Cu	0·40	0·59	1·5
	1·46	1·38	0·9
	0·24	0·37	1·5
	1·09	1·06	1·0
Ni	0·07	0·05	0·7
	0·06	0·03	0·5

Agfa-röntgen, č. e. 8734.

Cu	0·40	0·64	1·6
	0·21	0·41	2·0
Ti	0·45	0·73	1·6
	0·42	0·63	1·5
	0·28	0·47	1·7
	0·28	0·42	1·5
Br	0·09	0·20	2·2
	0·04	0·13	3·3
Ni	0·59	0·77	1·3
	0·38	0·55	1·4

Hauff, ultra-rapid, č. e. 11104.

	H	H_e	$H_e : H$
Cu	0·48	0·68	1·4
	0·99	1·35	1·4
	1·59	1·63	1·0
	0·34	0·43	1·3
	0·71	0·87	1·2
	1·34	1·36	1·0
Ti	0·56	0·73	1·3
	0·43	0·51	1·2
Br	0·23	0·28	1·2
	0·13	0·16	1·2
Ni	0·71	0·94	1·3
	0·15	0·16	1·1
	0·45	0·69	1·5
	0·09	0·07	0·8

Hauff, extra-rapid, č. e. 10682.

Cu	0·75	0·65	0·9
	0·09	0·14	1·6
	1·55	1·28	0·8
	0·40	0·43	1·1
	0·98	0·92	0·9
Ni	1·47	1·11	0·8
	0·97	0·81	0·8

Perutz, portrait special, č. e. 14097.

Cu	0·22	0·53	2·4
	0·76	1·15	1·5
	0·92	1·56	1·7
	0·16	0·33	2·1
	0·43	0·83	1·9
	0·59	1·17	1·9
Ni	0·12	0·23	1·9
	0·03	0·06	2·0
	0·07	0·15	2·1

A. Lumière, značka »Sigma«, č. e. 5701.

	H	H_e	$H_e : H$
Cu	0·25	0·36	1·4
	0·04	0·08	2·0
	0·11	0·23	2·1
Ni	0·78	0·98	1·3
	0·52	0·70	1·3

A. Lumière, etiketa fialová (sensibilité extrême), č. e. 3997.

Cu	0·31	0·49	1·6
	1·73	1·38	0·8
	0·03	0·09	3·0
	0·18	0·31	1·7
	1·07	1·06	1·0
Ni	0·06	0·05	0·8
	0·69	0·91	1·3
	0·04	0·03	0·8
	0·43	0·67	1·6

J. Gebhardt, »Graphos«, deska fotomechanická, č. e. 4548.

Cu	0·82	1·64	2·0
	0·12	0·65	5·4
	0·57	1·34	2·4
	0·07	0·39	5·6
Ti	0·17	0·71	4·2
	0·14	0·66	4·7
Ni	0·14	0·67	4·8
	0·13	0·68	5·2
	* [12]	0·07	—
	0·06	0·43	7·2
	0·06	0·44	7·3
	*	0·04	—

[12]) * značí, že linie jsou okem vidět, ale v mikrofotometru se nedají fotometrovat; — linie není vůbec viděti.

Agfa diapositivní, č. e. 7763.

	H	H_e	$H_e : H$
Cu	0·08	1·44	18·0
	0·30	1·87	6·2
	*	0·64	—
	0·04	1·08	27·0
	0·14	1·62	11·6
	*	0·42	—
Ni	*	0·55	—
	—	0·35	—

Agfa, extra-rapid, č. e. 8253.

Cu	0·11	0·31	2·8
	1·67	1·70	1·0
	0·04	0·17	4·3
	1·29	1·38	1·1
Ni	0·70	1·00	1·4
	0·44	0·73	1·7

Eisenberger, ultra-rapid, č. e. 7937.

Cu	0·22	0·53	2·4
	1·49	1·68	1·1
	0·12	0·35	2·9
	1·00	1·35	1·4
Ni	0·04	0·13	3·3

Westendorp & Wehner, červená etiketa, ultra-rapid, č. e. 9542.

Cu	0·25	0·49	2·0
	1·38	1·61	1·2
	0·16	0·32	2·0
	1·03	1·30	1·3
Ni	0·05	0·10	2·0

Fotochema, portrait special, č. e. 11102.

Cu	0·26	0·68	2·6
	0·18	0·51	2·8

	H	H_e	$H_e : H$
	1·47	1·63	1·1
	0·04	0·11	2·8
	0·14	0·45	3·2
	0·08	0·37	4·6
	1·26	1·36	1·1
Ti	0·38	0·91	2·4
	0·26	0·64	2·5
Ni	0·77	1·11	1·4
	0·05	0·16	3·2
	0·48	0·88	1·8

Herzka, diapositivní, č. e. 6367.

Cu	0·08	0·56	7·0
	0·26	1·13	4·3
	0·05	0·37	7·4
	0·14	0·88	6·3

Viliers, ultra-rapid, č. e. ?

Cu	1·90	1·75	0·9
	1·36	1·36	1·0
	0·06	0·09	1·5

Pro orientační srovnání s hustotami ve spektru viditelném užito spektra rtuti a to dvou linií v oboru fialovém o délkách 4047 Å a 4078 Å. Získané hustoty pro jednotlivé druhy desek uvedeny jsou v následující tabulce.

	4047			4078		
	H	H_e	$H_e : H$	H	H_e	$H_e : H$
Westendorp	1·23	1·44	1·2	0·57	0·79	1·4
Hauff ortochrom.	0·98	1·24	1·3	0·32	0·66	2·1
Guilleminot	1·18	1·44	1·2	0·55	0·84	1·5
Jahr	1·15	1·35	1·2	0·53	0·78	1·5
Agfa-röntgen	1·26	1·54	1·2	0·41	0·82	2·0
Hauff, ultra	0·82	1·38	1·7	0·44	0·77	1·8
Hauff, extra	1·62	0·50	0·9	0·84	0·80	1·0
Perutz, portrait	1·09	1·44	1·3	0·48	0·73	1·5

	4047			4078		
	H	H_e	$H_e : H$	*H*	H_e	$H_e : H$
Lumière »Sigma«	1·23	1·33	1·1	0·50	0·70	1·4
Lumière extrême	1·41	1·54	1·1	0·68	0·86	1·6
Agfa diapositiv.	0·02	1·48	74·0	—	0·77	—
Graphos	0·30	1·50	5·0	—	0·93	—
Herzka diap.	0·03	1·42	47·3	*	0·80	—
Agfa extra	1·08	1·47	1·4	0·43	0·78	1·8
Viliers ultra	1·48	1·53	1·0	0·75	0·94	1·3
Eisenberger	0·75	1·51	2·0	0·26	0·88	3·4
Fotochema portr.	0·82	1·47	1·8	0·28	0·84	3·0

Naneseme-li hustoty naměřené v X-spektrech a k nim pro určitý druh desek příslušné poměry hustot desky zkoumané k hustotě desky srovnávací do sítě koordinátové (hustotu »Eclipse« jako ordinátu a příslušný poměr hustot jako abscissu), dostaneme řadu bodů, jimiž lze proložiti křivku (ve většině případů jest to přímka), která vyjadřuje tedy vztah mezi hustotou desky srovnávací a desky dané. Na základě této křivky lze také interpolovati, t. j. k daným hustotám desky srovnávací lze určiti poměr hustot a z něho pak v mezích pozorovacích chyb vypočísti hustotu desky zkoumané. Tímto způsobem je možno srovnati hustoty, které jsou nám v X-záření měrou citlivosti pro jednotlivé druhy desek.

O liniích optického spektra 4047 a 4078 Å, poněvadž jsou velmi blízko, můžeme předpokládati, že různá hustota jest způsobena pouze různou vlastní intensitou čar a ne změnou citlivosti desky, takže s velkým přiblížením můžeme v uvedených intervalech hustot poměry interpolovati a to lineárně, neboť jde o střední obor hustot.

Vedle toho zjištěna citlivost pro měření desky klínovým sensitometrem Eder-Hechtovým. Desky exponovány pod klínkem svíčkou Scheinerovou ze vzdálenosti 25 *cm* po dobu 1 minuty.

V následující tabulce udány jsou tyto relativní citlivosti v poměru k citlivosti srovnávací desky »Eclipse«, k nim pak pro jednotlivé druhy poměry hustot a hustoty z nich vypočtené pro hustotu Eclipse H = 1·00 pro X-spektra a pro udanou fialovou část spektra viditelného (také pro H = 1·00).

	Citlivost Eder-Hecht	poměry pro $H_e = 1·00$ obyč. sp.	X - sp.	hustoty pro $H_e = 1·00$ obyč. sp.	X - sp.
Lumière extrême	1·0	1·5	1·2	0·67	0·83
Hauff ultra rapid	1·2	1·7	1·2	0·59	0·83
Westendorp	1·4	1·3	1·6	0·77	0·63
R. Jahr	1·4	1·4	1·2	0·71	0·83
Eisenberger	1·7	3·1	1·9	0·32	0·53
Perutz portrait	1·7	1·4	1·8	0·71	0·56
Lumière »Sigma«	1·7	1·2	1·2	0·83	0·83
Agfa extra rapid	1·7	1·7	1·4	0·59	0·71
Guilleminot	1·7	1·4	1·7	0·71	0·59
Hauff extra rapid	2·5	1·0	0·9	1·00	1·11
Hauff ortochrom.	3·0	1·6	1·1	0·62	0·91
Agfa röntgen.	3·3	1·8	—	0·56	—
Viliers ultra	3·6	1·3	—	0·77	—
Fotochema portrait	4·4	2·7	1·7	0·37	0·59
Herzka diapositiv.	33·4	—	5·4	—	0·19
»Graphos«	40·2	—	3·4	—	0·29

Z výsledků uvedených měření je v prvé řadě patrno, že neplatí všeobecně, že deska pro obyčejné světlo dle obyčejných metod sensitometrických citlivější, je také citlivější pro X-spektra. Tak na př. deska Lumière extrême o poměru citlivosti 1·0 a gradaci 47^0 [1]) je v oboru hustot 0·3—1·00 méně citlivá než Hauff ultra rapid o menší citlivosti 1·2 a menší gradaci 33^0. Nebo: Guilleminot a Perutz, desky téže citlivosti a téže gradace 49^0; druhá z nich je však citlivější pro X-záření. Zajímavé srovnání poskytuje deska Hauff ortochromatická extra rapid (citlivost 3·0) a Lumière »Sigma« (citlivost 1·7). První deska přes to, že by měla ve skutečnosti míti menší citlivost, poněvadž se jedná o desku ortochromatickou, jejíž citlivost byla zkoušena zdrojem, kde převládají paprsky žluté, vykazuje při menší gradaci 54^0 proti 55^0 desky druhé citlivost větší. Desky Jahr a Hauff extra-rapid ukazují dle grafu poměrů stejné stoupání poměrů hustot, přes to, že Hauff extra pro světlo obyčejné má gradaci 57^0 proti 43^0 gradace desky Jahr a při menší citlivosti (2·5 Hauff extra, 1·4 Jahr) poměry v X-spektrech menší, tedy citlivost

[1]) Křivky gradační získané densografem Goldbergovým publikovány budou v práci příští.

(hustoty) větší. Bude se tedy pravděpodobně vedle změny citlivosti jednati také o změnu gradace.

Pro desky malé citlivosti, jako diapositivní neb fotomechanické plyne důležitý poznatek již ze srovnání poměrů pro linie optického spektra 4047 Å a 4078 Å. Agfa diapositivní při hustotě pro desku Eclipse 1·48 má hustotu 0·02, tedy poměr 74·0. Pro tutéž hustotu v X-spektrech je poměr pro Agfa diap. 16·1. Pro hustotu Eclipse pro linii 4078 Å 0·77 není linie na desce Agfa diap. vůbec vidět, kdežto v X-spektrech nastává okem viditelná redukce bromidu na Agfa diap. ještě při hustotě Eclipse 0·35. Podobné poměry jsou u desek Graphos a Herzka diap., jak viděti z této tabulky:

		4047	4078	X-spektra	
Graphos	H	0·30	—	0·68	0·27
	H_e	1·50	0·93	1·50	0·93
	$H_e : H$	5·0	—	2·2	3·5
Herzka diap.	H	0·03	*	—	0·12
	H_e	1·42	0·80	1·42	0·80
	$H_e : H$	47·3	—	—	6·5

U desky Graphos dá se okem sledovati hustota až pro hustotu Eclipse 0·07 a 0·04. Z výsledků dále je patrno, že rozdíl poměrů hustot pro spektrum viditelné (linie 4047 a 4078 Å) a pro X-spektra je veliký právě pro desky malé citlivosti a to v tom smyslu, že desky malé citlivosti (malé — pro světlo obyčejné) v poměru k deskám vysoké citlivosti jsou pro X-záření mnohem citlivější.

Vliv délky vlnité na citlivost, pokud bylo pracováno s různými délkami X-záření, se nedá, jak je zřejmo z výsledků, konstatovati, neboť odchylky jsou pouze v oboru chyb pozorovacích. Snad rozšířením oboru délek vlnitých a to, jak se zdá, zvláště pro delší vlny, kde při měkkém záření jistě ve větší míře než při kratších λ bude se jednati o absorpční vlastnosti gelatýny a pod., bude možno snáze vliv délky vlnité na citlivost zjistiti.

Toto rozšíření oboru délek vlnitých röntgenového záření v měření citlivosti, jakož i podobné proměření týchže druhů desek pro jednotlivé délky spektra viditelného, jest úkolem práce další.

Ku konci jest mi milou povinností poděkovati p. prof. dru V. Vojtěchovi, řediteli oddělení fysikálního ústavu pro fotochemii a vědeckou fotografii a Čsl. státního pokusného ústavu grafického, za veškerou podporu a zájem, který věnoval mé práci, jakož i soukr. doc. dru V. Dolejškovi, za všechny pokyny a rady, jichž se mi během práce dostalo.

Résumé.

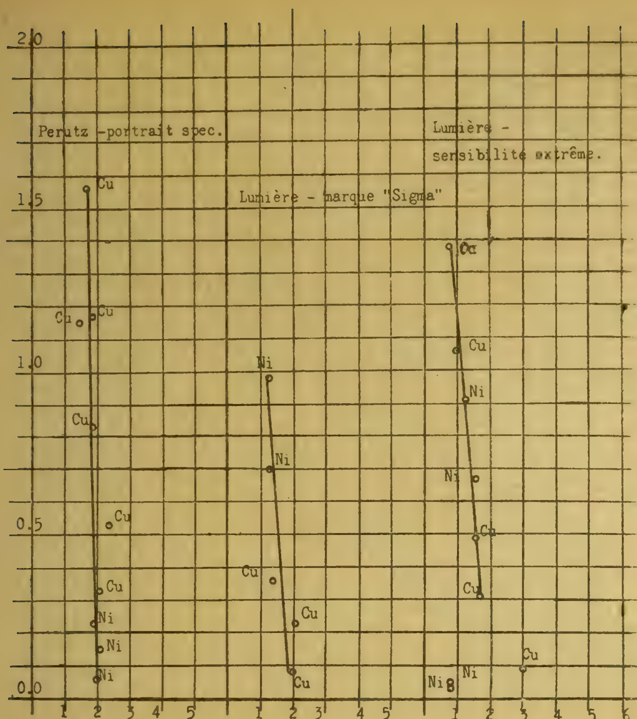
Dans ce travail, on mesure la sensibilité des plaques au gélatino-bromure d'argent pour les diverses longueurs d'onde dans les spectres X. La densité de l'image röntgenographique sur les diverses émulsions a été comparée avec la densité de la plaque fondamentale témoin, qui a été exposée simultanément avec la plaque étudiée à la lumière monochromatique, fixée de la même manière, etc. Le résultat est figuré par des courbes, ayant pour abscisses les rapports entre les densités des plaques étudiées et celles de la plaque témoin dans les divers intervalles de gradation, et pour ordonnées les densités de la plaque témoin. Pour comparer les résultats obtenus avec les densités dans le spectre visible, on a exposé les lignes 4047 Å et 4078 Å du spectre du mercure. On a mesuré, en outre, la sensibilité relative avec le sensitomètre d'Eder-Hecht, et construit la courbe de gradation à l'aide du densographe de Goldberg.

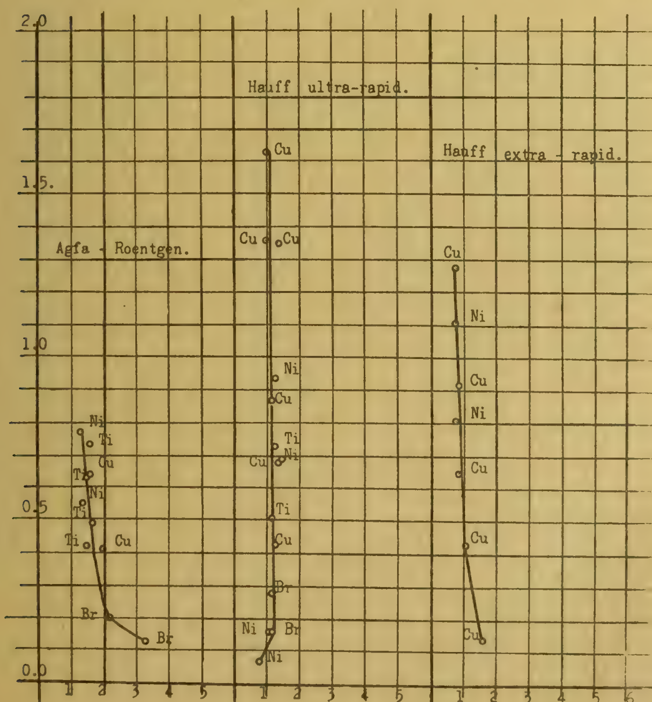
Des résultats préliminaires ainsi obtenus, il résulte qu'en règle génerale une plaque plus sensible à la lumière ordinaire, d'après les méthodes sensitométriques usuelles, n'est pas plus sensible pour les spectres X. Il semble qu'il s'agisse ici, outre une variation de sensibilité, encore d'une variation de gradation.

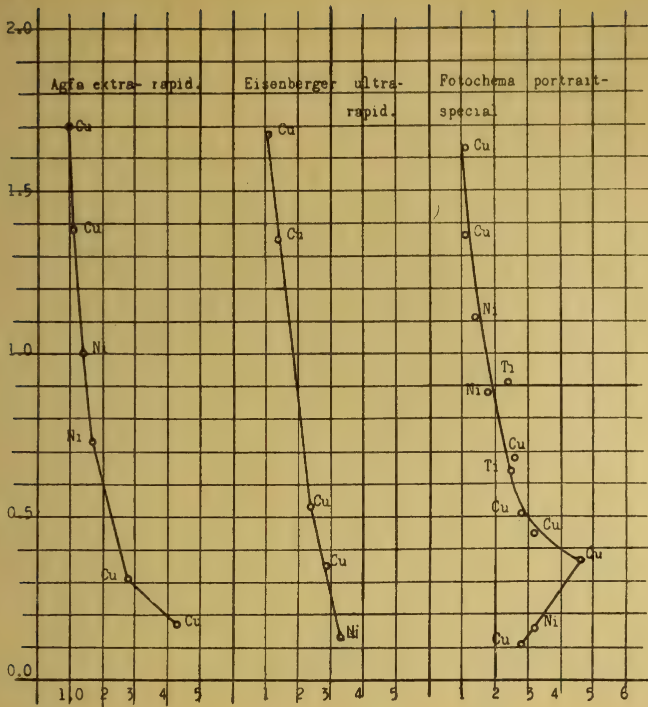
En ce qui concerne les plaques de faible sensibilité, il en résulte la notion importante qui suit: La différence entre les rapports des densités dans le spectre visible (lignes 4047 et 4078 Å) et ceux des densités dans le spectre des rayons X est considérable présisément pour les plaques de faible sensibilité, et cela pour cette raison que les plaques de faible sensibilité (faible pour la lumière ordinaire) sont relativement plus sensibles aux rayons X que les plaques de grande sensibilité.

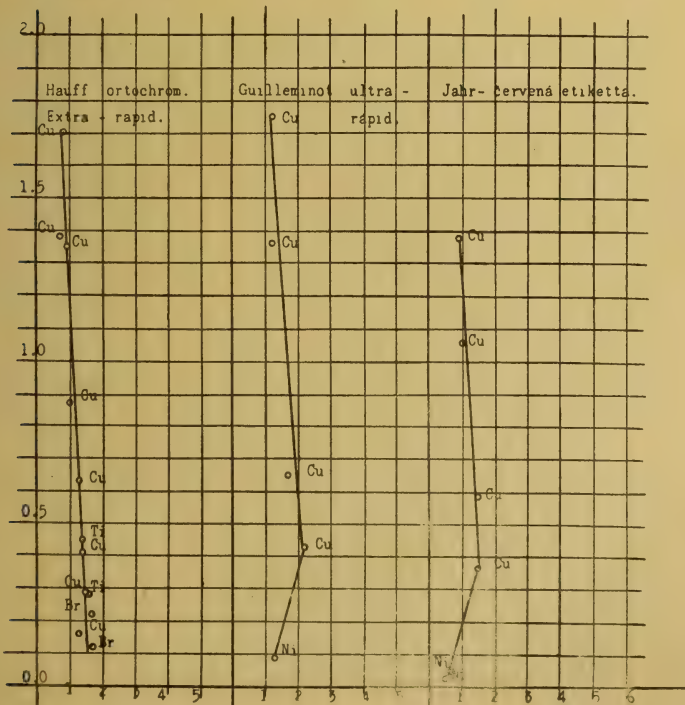
Dans les limites où l'on a opéré avec les diverses longueurs d'onde des rayons X, une influence de la longueur d'onde sur la sensibilité n'a pu être constatée, les différences observées étant de l'ordre des erreurs d'observation. Peut-être, pourra-t-on, constater une influence de la longueur d'onde en étudiant un champ plus étendu, et cela, comme il nous semble, surtout pour les ondes plus longues, où alors il s'agira certainement plus de la lumière molle des propriétés d'absorption de la gélatine.

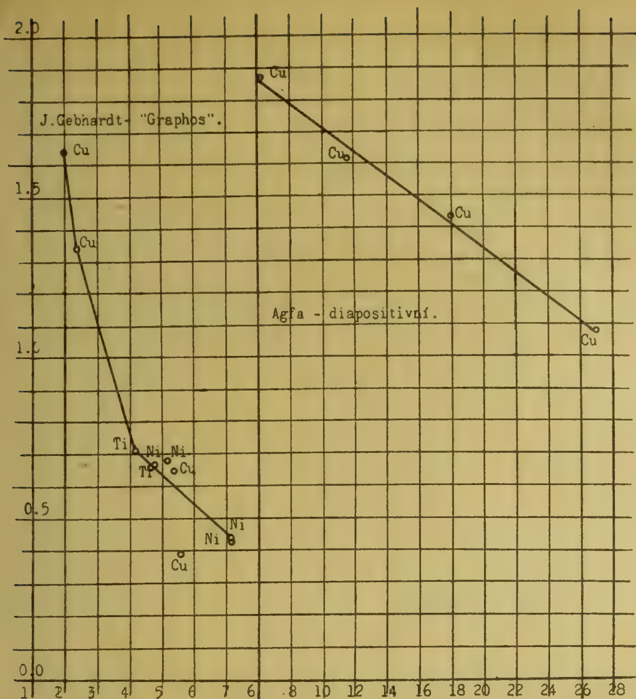
L'extension de nos recherches aux grandes longueurs d'onde de rayons X, ainsi que des mesures analogues avec les mêmes sortes de plaques pour les longueurs d'onde du spectre visible, feront l'objet d'un travail ultérieur.

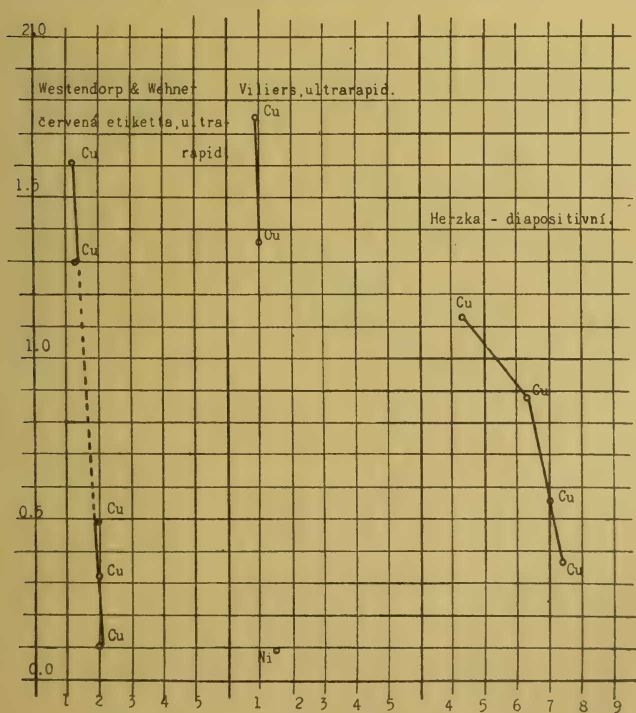

Perutz - portrait spec.
Lumière - marque "Sigma"
Lumière - sensibilité extrême.
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Cu
Ni
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6


Agfa - Roentgen.
Hauff ultra-rapid.
Hauff extra - rapid.
2.0
1.5.
1.0
0.5
0.0
Cu
Ni
Ti
Br
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Agfa extra-rapid.
Eisenberger ultra-rapid.
Fotochema portrait-special
Cu
Ni
Tl
1
2
3
4
5
6


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Hauff ortochrom. Extra-rapid.
Guillemino ultra-rapid.
Jahr-červená etiketta.
Cu
Ni
Ti
Br
1
2
3
4
5
6


J.Gebhardt- "Graphos".
Agfa - diapositivní.
Cu
Ti
Ni
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
1 2 3 4 5 6 7 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28


Westendorp & Wehner
červená etiketa, ultra-
rapid
Viliers, ultrarapid.
Herzka - diapositivní.
Cu
Ni
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 4 5 6 7 8 9

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 27.

Dr. BOH. MACHYTKA:

O jistých grupách Jonquièrových rovinných involucí.

Certains groupes d'involutions planes de Jonquière.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 27.

Dr. BOH. MACHYTKA:

O jistých grupách Jonquièrových rovinných involucí.

Certains groupes d'involutions planes de Jonquière.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dr. B. Machytka:

O jistých grupách Jonquièrových rovinných involucí.
(Certains groupes d'involutions planes de Jonquière.)

Na kubické křivce rovinné lze, jak známo,[1]) každou biracionální korespondenci vytvořiti nekonečně mnoha kvadratickými rovinnými transformacemi Cremonovými. Ježto každou jednoznačnou korespondenci neinvolutorní (tedy druhého druhu) lze na obecné křivce eliptické vytvořiti co součin dvou involutorních korespondencí prvého druhu, můžeme se při studiu kvadratických transformací, reprodukujících danou obecnou kubickou křivku rovinnou, omeziti, jak snadno se nahlédne, na kvadratické rovinné involuce obou druhů. Hlavním úkolem této práce jest tudíž cestou ryze geometrickou nalézti charakteristické vlastnosti kvadratických rovinných involucí, které reprodukují danou obecnou křivku C^3, doplniti vlastnosti známé a ukázati některé grupy rovinných involucí, k nimž vedou kvadratické rovinné involuce třídy prvé. Zvláště chci upozorniti na jistou grupu 16. stupně G_{16} Jonquièrových involucí, jež jest charakterisována skupinou pěti bodů v rovině obecně položených, a jejíž transformace reprodukují pět obecných kubických křivek rovinných touto skupinou bodovou jistým způsobem dokonale určených. Tato grupa G_{16} jest totiž tím význačna, že transformace její reprodukují ∞^r křivek stupně $6n$, které mají společných pět bodů $2n$-násobných a tvoří jistý lineární systém Σ_r^{6n} o $r = \dfrac{n(n+3)}{2}$ dimensích. Grupa G_{16} reprodukuje tedy, pro $n=1$, ∞^2 křivek 6. stupně o společných pěti bodech dvojnásobných, — tedy křivky obecně rodu 5, — které tvoří jistou síť Σ_2^6, čímž jeví tato grupa obdobu

[1])C. Segre: Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche. Torino Atti 24. (1889.) — K. Doehlemann: Ueber die involutorischen Gebilde, welche eine ebene Cremona-Transformation, speziell die quadratische enthalten kann. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 36. (1891.) — V. Martinetti: Ricerche sulle curve piane del terzo ordine. Giornale di mat. 23. (1885.) — Viz též zevšeobecnění této vlastnosti pro normální křivky eliptické v prostoru n-rozměrném, které podal prof. B. Bydžovský: Příspěvek k teorii eliptické křivky normální. Rozpravy akad. XXIII., čís. 39. (1914.)

s grupou G_8 kvadratických transformací, které reprodukují křivky bikvadratické se společnými dvěma dvojnými body jisté sítě Σ_2^4. Analogie těchto dvou grup je tím význačnější, ježto i grupa G_8 reprodukuje, jak v další své práci ukáži, i křivky obecnější, a sice ∞^r křivek stupně $4n$ o společných dvou bodech $2n$-násobných, jež tvoří jistý lineární systém Σ_r^{4n}. Posléze zabývám se otázkou, kterak se grupa G_{16} redukuje při zvláštních polohách základních pěti bodů.

I. Některé vlastnosti kvadratické rovinné involuce třídy prvé a obecné kubické křivky rovinné C^3.

1. V rovině zvolme kvadratickou involuci $T^{(2)}(\alpha, \beta, \gamma)$ třídy prvé, (neperspektivní), která má hlavní body α, β, γ a v níž dvěma obecně zvoleným bodům P, Q odpovídají body P', Q'. Snadno seznáme, že bodu $X \equiv (\overline{PQ} \,.\, \overline{P'Q'})$ odpovídá v této transformaci bod $X' \equiv (\overline{PQ'} \,.\, \overline{P'Q})$. Hledaný bod X' jest zřejmě čtvrtým průsečným bodem kuželoseček a' (α, β, γ, P', Q') a b' (α, β, γ, P, Q), jěž odpovídají přímkám $a \equiv \overline{PQ}$ resp. $b \equiv \overline{P'Q'}$. Vezmeme-li zřetel k tomu, že přímka a seče kuželosečku a' v bodech M, M', které si navzájem odpovídají, můžeme psáti přímo tyto projektivní vztahy paprskových svazků:

$$1. \qquad P'(PQXMM'\ldots)\ \pi\ a\,(PQXMM'\ldots)\ \pi\ a\,(P'Q'X'M'M\ldots)\ \pi\ P'(P'Q'X'M'M\ldots),$$

při čemž $\overline{P'P'}$ značí tečnu v bodě P' ke kuželosečce a'. Tím dospěli jsme k projektivnosti

$$P'(PQXMM'\ldots)\ \pi\ P'(P'Q'X'M'M\ldots),$$

která jest zřejmě involucí a v níž paprsku $\overline{P'X} \equiv \overline{P'Q'}$ odpovídá nutně paprsek $\overline{P'X'} \equiv \overline{P'Q}$. Leží tedy bod X' na spojnici $\overline{P'Q}$.

Vezmeme-li v relaci 1) na místo bodu P' za vrchol svazku bod Q', seznáme analogicky, že bod X' nutně leží na spojnici $\overline{Q'P}$, čímž tvrzení prokázáno. Můžeme tedy vysloviti větu:

1. *Všechny kvadratické rovinné involuce třídy prvé, které mají společné dva bodové páry P_1, P'_1; P_2, P'_2, — jest jich ∞^4, — mají společný též třetí bodový pár X_{12}, X'_{12}, při čemž jest $X_{12} \equiv (\overline{P_1P_2} \,.\, \overline{P'_1P'_2})$ a $X'_{12} \equiv (\overline{P_1P'_2} \,.\, \overline{P'_1P_2})$.*

Vezmeme-li mimo to zřetel k tomu, že P' jest obecný bod kuželosečky a', můžeme vysloviti vlastnost:

---

[2]) Rovinná involuce jest třídy n, jestliže na obecně zvolené přímce roviny leží n korespondenčních bodových párů této transformace.

2. *Přímá řada bodová na přímce a a řada bodová jí odpovídající kvadratickou rovinnou involucí třídy prvé na kuželosečce a′ se promítají z kteréhokoliv bodu kuželosečky a′ paprskovou involucí.*

2. V rovině zvolme tři bodové páry (P_i, P'_i) kde $i = 1, 2, 3$, a sestrojme další tři body $X_i \equiv (\overline{P_k P'_l} . \overline{P'_k P_l})$, kde i, k, l jsou tři čísla navzájem různá, probíhající hodnotami 1, 2, 3. Skupina těchto devíti bodů (P_i, P'_i, X_i) tvoří bási svazku kubických křivek, neboť body těmi procházejí tyto dvě kubické křivky složené z přímek: C^3_1 $(\overline{P_1P'_2X_3}, \overline{P_2P'_3X_1}, \overline{P_3P'_1X_2})$ a C^3_2 $(\overline{P'_1P_2X_3}, \overline{P'_2P_3X_1}, \overline{P'_3P_1X_2})$.

Na libovolné obecné kubické křivce C^3 tohoto svazku určuje bodový pár P_1, P'_1 jednojednoznačnou korespondenci druhého druhu E (P_1, P'_1), která bodu P_2 přiřazuje bod P'_2, neboť $X_3 \equiv (\overline{P'_1P_2} . \overline{P_1P'_2})$ leží na křivce; podobně vzhledem k poloze bodu X_2 odpovídá bodu P_3 bod P'_3.

3. *Lze tedy třemi bodovými páry (P_i, P'_i) v rovině vésti svazek kubických křivek S^3_1 (P_i, P'_i, X_i) té vlastnosti, že na každé křivce svazku tvoří bodové páry (P_i, P'_i) tři bodové páry téže jednoznačné korespondence druhého druhu.*

V rovině určeme další tři body $X'_i \equiv (\overline{P_k P_l} . \overline{P'_k P'_l})$ a vytkněme ve svazku S^3_1 tu kubickou křivku C^3_0 která prochází bodem X'_3. Vzhledem k známým vlastnostem jednoznačných korespondencí druhého druhu na obecné kubické křivce rovinné,[3]) přiřazuje na křivce C^3_0 korespondence E $(P_1P'_1) \equiv E$ $(P_2P'_2)$ bodu P'_2 bod P_2, takže tato korespondence stává se binárně cyklickou (involutorní); odpovídají si tedy na křivce C^3_0 též body P_3, P'_3 v téže korespondenci involutorně, takže křivka C^3_0 musí procházeti též body X'_1 a X'_2. Zároveň jest zřejmo, že body X_i, X'_i jsou též na křivce C^3_0 konjugovány (t. j. mají společný tečnový bod), neboť si odpovídají v téže binárně cyklické korespondenci $E^{(2)}$ (P_i, P'_i).

4. *Leží tedy skupina 12bodová, složená ze tří libovolně zvolených bodových párů (P_i, P'_i) a tří párů z nich odvozených (X_i, X'_i) na téže kubické křivce C^3, při čemž tyto bodové páry náležejí téže binárně cyklické korespondenci druhého druhu. Vezmeme-li nyní kterýkoliv bodový pár P_i, P'_i a příslušný pár X_i, X'_i a opakujeme-li předchozí konstrukci tak, že určíme body $Z'_i \equiv (\overline{P_i X_i} . \overline{P'_i X'_i})$ a $Z_i \equiv (\overline{P_i X'_i} . \overline{P'_i X_i})$, obdržíme další bodové páry křivky C^3_0 a sice bodové páry vytknuté binárně cyklické korespondence $E^{(2)}$ (P_i, P'_i); opakování tohoto postupu dává tudíž jednoduchou lineární konstrukci bodových párů této korespondence a tudíž i konstrukci křivky C^3_0.*

---

[3]) Viz Emil Weyr: Ueber eindeutige Beziehungen auf einer Kurve dritter Ordnung. Wiener Berichte. Bd. 87, 1883.

Avšak vzhledem k předchozímu (viz kap. 1.) seznáváme, že každá kvadratická rovinná involuce třídy prvé, která má tři bodové páry (P_i, P'_i), má i bodové páry (X_i, X'_i), (Z_i, Z'_i)..., takže křivku C^3_0 převádí samu v sebe.

Hlavní body (α, β, γ) všech těchto transformací leží tudíž na křivce C^3_0. Vskutku promítají se bodové páry každé binárně cyklické korespondence druhého druhu na obecné kubické křivce rovinné z kteréhokoliv bodu této křivky, — tedy i páry (P_i, P'_i), (X_i, X'_i)... z každého bodu křivky C^3_0, — paprskovou involucí. Snadno seznáme, že hlavní body (α, β, γ) těchto kvadratických rovinných involucí tvoří na křivce C^3_0 racionální involuci (lineární soustavu bodovou) g^2_3. Můžeme totiž libovolné dva body křivky C^3_0 zvoliti za hlavní body α, β, načež třetí γ jest jimi jednoznačně určen. Spojnice $\overline{\alpha\beta}$ seče totiž křivku C^3_0 v bodě γ', jemuž binárně cyklickou korespondencí $E^{(2)}(P_i, P'_i)$ odpovídá třetí hlavní bod γ. Poněvadž dvojice »sdružených« bodů promítá se z libovolného bodu křivky na tuto opět v body »sdružené«, protíná při této poloze bodů α, β, γ strana $\overline{\beta\gamma}$ křivku C^3_0 v bodě α' a strana $\alpha\gamma$ v bodě β', t. j. v bodech, které v této korespondenci $E^{(2)}$ odpovídají bodům α resp. β, čímž nutným a postačujícím podmínkám jest vyhověno.

Involuce g^2_3, vytvořená na křivce C^3_0 trojicemi hlavních bodů (α, β, γ) všech kvadratických rovinných involucí, jež křivku C^3_0 reprodukují, vytvořujíce na ní svými bodovými páry touž binárně cyklickou korespondenci druhého druhu $E^{(2)}(P_i\, P'_i)$, jest charakterisována [4]) právě touto korespondencí $E^{(2)}$ a *jest tudiž sama k sobě residuální.* Plyne to ostatně bezprostředně, vyjádříme-li tuto lineární soustavu g^2_3 užitím eliptických parametrů. Parametry π, π' bodů P, P', jež si odpovídají v binárně cyklické korespondenci $E^{(2)}$ $(P_i\, P'_i)$ hoví relaci

1. $\pi - \pi' \equiv \frac{w}{2} \equiv \pi_i - \pi'_i$ (mod ω, ω'), kde w značí periodu.

Z konstrukce plyne, že pro parametry α, β, γ hlavních bodů platí:

$$\alpha + \beta + \gamma' \equiv \theta$$

$$\gamma - \gamma' \equiv \frac{w}{2}$$ odkud sečtením plyne přímo hledaná relace

2. $$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2},$$

jež vyjadřuje nalezenou soustavu g^2_3.

---

[4]) Bodové skupiny této involuce g^2_3 lze totiž vytvořiti pomocí korespondence $E^{(2)}$, jak ostatně jest zřejmo z konstrukce bodu γ ze zvolených bodů α, β. Viz ostatně Emil Weyr: Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Kurven vom Geschlechte 1. Wiener Berichte, Bd. 88, 1883.

Z ní seznáváme, že každá kuželosečka, jež prochází jednou skupinou bodovou této soustavy g_3^2, seče křivku C_0^3 v trojici bodové, jež náleží opět této soustavě; kterékoliv dvě skupiny bodové této soustavy leží vždy na kuželosečce.

Můžeme tedy hlavní výsledky shrnouti ve věty:

5. *Třemi v rovině obecně zvolenými bodovými páry* (P_i, P'_i), *kde* $i = 1, 2, 3$, *jest určeno* ∞^2 *rovinných kvadratických involucí třídy prvé. Všechny tyto transformace mají* ∞^1 *společných bodových párů. Reprodukují totiž touž rovinnou křivku kubickou* C_0^3 (P_i, P'_i, X_i, X'_i), *vytvořujíce na ní svými bodovými páry touž binárně cyklickou korespondenci druhého druhu* $E^{(2)}(P_i, P'_i) \equiv E^{(2)}(X_i X'_i)$. *Hlavní body* (α, β, γ) *všech těchto transformací leží na této křivce a tvoří na ní involuci* g_3^2, *která jest sama k sobě residuální a kterou lze užitím eliptických parametrů vyjádřiti kongruencí*

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2} \equiv \pi_i - \pi'_i, \qquad (\mathrm{mod}\ \omega, \omega'),$$

kde w *značí periodu a* π_i, π'_i *parametry bodů* P_i, P'_i.

6. *Vytvoříme-li na obecné kubické křivce rovinné* C^3 *všechny tři existující racionální involuce* $(g_3^2)_i$ *dané relací* $\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2}$, (*kde* $\frac{w}{2}$ *značí kteroukoliv ze tří základních poloperiod*), *z nichž každá jest sama k sobě residuální a jest tedy charakterisována jednou k ní příslušící binárně cyklickou korespondencí druhého druhu* $E_i^{(2)}: u - u' \equiv \frac{w}{2}$, *pak každá skupina bodová* (α, β, γ) *kterékoliv této involuce* g_i *dává hlavní body kvadratické involuce, která křivku* C^3 *reprodukuje a vytvořuje na ní svými bodovými páry příslušnou binárně cyklickou korespondenci* $E_i^{(2)}$.

Zároveň dospěli jsme tím k větě odjinud známé,[5]) jež dává řešení zvláštního případu problému projektivnosti:

7. *Geometrickým místem bodů, z nichž se promítají v rovině obecně zvolené tři bodové páry* (P_i, P'_i) *paprskovou involucí, jest kubická křivka rovinná* C^3 $(P_i P'_i X_i X'_i)$.

Věta 2. kap. 1. jest tedy zvláštním případem této věty.

3. Čtyřmi v rovině obecně položenými bodovými páry (P_i, P'_i) kde $i = 1, 2, 3, 4$, jest určena jednoznačně kvadratická rovinná involuce třídy prvé $T^{(2)}$. Každé dva bodové páry P_i, P'_i; P_k, P'_k vedou k dalšímu páru $X_{ik} \equiv (\overline{P_i P_k} \cdot \overline{P'_i P'_k}), X'_{ik} \equiv (\overline{P_i P'_k} \cdot \overline{P'_i P_k})$ této transformace. Postupným spojováním bodových párů $(P_l\, P'_l)$ a $(X_{ik}, X'_{ik}) \ldots$ a t. d. ob-

[5]) Viz na př. R. Sturm: Die Lehre von den geom. Verwandtschaften, I., str. 351.

držíme libovolné množství bodových dvojic transformace $T^{(2)}$, vyplňujících celou rovinu.

Každé tři bodové páry P_k, P'_k; P_l, P'_l; P_m, P'_m vedou k jedné kubické křivce C^3_i, jež jest transformací reprodukována; při tom nechť značí i, k, l, m čtyři čísla navzájem různá, probíhající hodnotami 1, 2, 3, 4. Hlavní body α, β, γ této transformace jsou tudíž průsečnými body dvou takovýchto kubických křivek, na příklad křivek C^3_4 a C^3_3. Tyto křivky mají 6 společných bodů: P_1, P'_1; P_2, P'_2 a z nich odvozené body X_{12}, X'_{12}; protínají se tedy v dalších třech bodech α, β, γ. Že tyto tři body jsou vskutku hlavními vrcholy transformace $T^{(2)}$, t. j. že vyhovují svrchu nalezené nutné a postačující podmínce, přesvědčíme se snadno.

Skupina 9 bodů, jež jsou společné oběma křivkám C^3_4 a C^3_3 obsahuje tři body P'_1, P'_2, X_{12} ležící v přímce; leží tedy zbývajících šest na kuželosečce. Avšak tři z nich, totiž body P_1, P_2, X'_{12} jsou dle vlastností křivky C^3_4 vytvořeny užitím binárně cyklické korespondence $E^{(2)}(P_i\, P'_i)$, takže tvoří trojici bodovou involuce g^2_3, která jest sama k sobě residuální a která má tudíž za skupinu bodovou i trojici α, β, γ.[6])

Úloha určiti hlavní body kvadratické rovinné involuce třídy prvé, jež jest dána čtyřmi svými obecně zvolenými bodovými páry, přechází tedy v kubickou úlohu určiti tři průsečíky dvou kubických křivek o společných šesti bodech.

II. Grupa G_4.

1. V rovině zvolme obecnou kubickou křivku C^3 a vytkněme na ní jednu ze tří existujících binárně cyklických korespondencí druhého druhu $E^{(2)}_0: u - u' \equiv \frac{w}{2}$ a příslušející k ní involuci $g_0{}^2_3$: $\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2}$, kde w značí tutéž periodu.

Seznali jsme, že každá skupina bodová (α, β, γ) této involuce g_0 vede jakožto skupina hlavních bodů k jedné rovinné kvadratické involutorní transformaci $T^{(2)}$, jež křivku C^3 reprodukuje a vytvořuje na ní

6) Ostatně plyne to přímo analyticky, vyjádříme-li body křivky C^3_4 pomocí eliptických parametrů: Parametry průsečných bodů křivek C^3_4 a C^3_3 hoví podmínce:

$$\pi_1 + \pi'_1 + \pi_2 + \pi'_2 + \xi_{12} + \xi'_{12} + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0.$$

Avšak z konstrukce bodů X_{12}, X'_{12} plynou vztahy:

$$\pi_1 + \pi_2 + \xi_{12} \equiv 0, \quad \pi'_1 + \pi'_2 + \xi_{12} \equiv 0, \quad \xi_{12} - \xi'_{12} \equiv \frac{w}{2}.$$

Odečteme-li od součtu prvé a poslední kongruence zbývající dvě, obdržíme $\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2}$, což jest svrchu nalezený vztah, který charakterisuje hlavní body transformace.

svými bodovými páry vytknutou binárně cyklickou korespondenci $E_0^{(2)}$; k určení transformace $T^{(2)}$ potom stačí, zvolíme-li libovolný bodový pár P, P' této korespondence za dvojici korespondenčních bodů.

Součin $T_1 . T_2$ dvou takovýchto rovinných kvadratických involucí $T_1^{(2)}$ (α, β, γ) a $T_2^{(2)}$ (a, b, c), kde hlavní body (α, β, γ) a (a, b, c) jsou dvě různé bodové skupiny vytknuté soustavy bodové g_0, jest obecně Cremonova transformace 4. stupně $T^{(4)}$, ovšem neinvolutorní, pro níž jest křivka C^3 geom. místem bodů samodružných.

Tato transformace $T^{(4)}$ má v každém rovinném poli, jak snadno se zjistí, tři hlavní body kvadratické a tři lineární. Jsou to v prvé rovině body: α^2, β^2, γ^2; a', b', c', v druhé rovině: a^2, b^2, c^2; α', β', γ', při čemž znak α^2 znamená, že bod α jest hl. bodem kvadratickým, a t. d., kdežto body a', b' c', odpovídající v obou transformacích T_1 a T_2 bodům $a, b, c,$ jsou hlavními body prvého stupně. Podobně nalezneme hlavní křivky v prvém rovinném poli: C_a^2 $(\alpha, \beta, \gamma, b'\, c')$, C_b^2 $(\alpha, \beta, \gamma, a', c')$, — ; $C_{\alpha'}^1 \equiv \overline{\beta\gamma}$, $C_{\beta'}^1 \equiv \overline{\alpha\gamma}$ — a v druhé rovině: C_α^2 $(a, b, c, \beta', \gamma')$, —, —; $C_{a'}^1 \equiv \overline{bc}$, —, $C_{c'}^1 \equiv \overline{ab}$.

Vezměme nyní v úvahu zvláštní případ, kdy jest $\alpha \equiv a$ a ostatní hlavní body transformací T_1 a T_2 se různí. Pak dává součin těchto dvou transformací Cremonovu transformaci kubickou $T^{(3)} \equiv T_1 . T_2$, jejíž hlavní body a hlavní křivky plynou ze vztahů:

$a \ldots T_1 \ldots \overline{\beta\gamma} \ldots T_2 \ldots C^2\ (a, b, c, \beta', \gamma')$,	$a \ldots T_2 \ldots \overline{bc} \ldots T_1 \ldots C^2\ (\alpha\beta\gamma b' c')$,
$\beta \ldots T_1 \ldots \overline{\gamma a} \ldots T_2 \ldots \overline{a\gamma'}$,	$b \ldots T_2 \ldots \overline{ac} \ldots T_1 \ldots \overline{ac'}$,
$\gamma \ldots T_1 \ldots \overline{a\beta} \ldots T_2 \ldots \overline{a\beta'}$,	$c \ldots T_2 \ldots \overline{ab} \ldots T_1 \ldots \overline{ab'}$
$b' \ldots T_1 \ldots b \ldots T_2 \ldots \overline{ac}$,	$\beta' \ldots T_2 \ldots \beta \ldots T_1 \ldots \overline{a\gamma}$,
$c' \ldots T_1 \ldots c \ldots T_2 \ldots \overline{ab}$.	$\gamma' \ldots T_2 \ldots \gamma \ldots T_1 \ldots \overline{a\beta}$.

Kubická transformace $T^{(3)} \equiv T_1 T_2$ má v každé rovině jeden hlavní bod kvadratický a čtyři body lineární. *Jest zřejmě neinvolutorní,* neboť skupiny hlavních bodů prvého stupně jsou obecně různé.

Nabízí se přirozeně otázka, zda jest možno voliti obě involuce T_1 a T_2, — totiž skupiny hlavních bodů jejich, — tak, aby součinem $T_1 . T_2$ vzniklá kubická transformace byla involutorní. Všimněme si především, že skupiny hlavních bodů lineárních transformace $T^{(3)}$, t. j. skupiny (β, γ, b', c') a (β', γ', b, c), mají tu vlastnost, že vytčená binárně cyklická korespondence $E_0^{(2)}$ převádí jednu tuto skupinu v druhou. Mají-li býti tyto ***čtyřbodové*** skupiny totožné, — a to jest nutné, má-li býti transformace $T^{(3)}$ involutorní, — musí se skládati ze dvou bodových párů binárně cyklické korespondence $E_0^{(2)}$. Případ ten nastane toliko tehdy, jsou-li splněny podmínky: $\beta \equiv \gamma'$ a $b' \equiv c$. Pak jest ovšem nutně též

$\beta' \equiv \gamma$ a $b \equiv c'$. Hlavní body β, γ transformace T_1 tvoří v tomto případě bodový pár binárně cyklické korespondence $E_0^{(2)}$ a hoví tedy relaci $\beta - \equiv \frac{w}{2}$; ježto musí býti mimo to též $\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2}$, platí vztah $\alpha + 2\beta \equiv 0$ Bod α jest tedy společným tečnovým bodem bodů β a γ. Totéž platí též pro hlavní body a, b, c transformace T_2.

Tvoří tedy v tomto případě hlavní body β, γ; b, c obou transformací T_1 a T_2 na křivce C^3 »čtveřinu bodů sdružených« (konjugovaných), jichž společný tečnový bod α jest společným třetím hlavním bodem obou transformací T_1 a T_2.

2. Abychom tento případ zvlášť vyšetřili, vytkněme na dané kubické křivce C^3 libovolnou čtveřinu bodů sdružených β, γ, b, c o společném tečnovém bodě α. Tím určeny jsou dvě kvadratické rovinné involuce T_1 (α, β, γ) a T_2 (a, b, c), které křivku C^3 reprodukují, vytvořujíce na ní svými bodovými páry binárně cyklickou korespondenci

$$E_0^{(2)} \equiv E\,(\beta, \gamma) \equiv E\,(b, c).$$

Součin $T_1\,T_2 \equiv T^{(3)}$ jest zřejmě kubická transformace Cremonova, pro níž jest křivka C^3 geom. místem bodů samodružných.

Ze vztahů kap. 1. seznáme, — učiníme-li v nich $\beta' \equiv \gamma$, $\gamma' \equiv \beta$ $b' \equiv c$ a $c' \equiv b$, — že hlavní body a hlavní křivky této transformace v obou rovinách jsou totožné. Nalezneme, že *kubická transformace $T^{(3)} \equiv T_1\,T_2$ má jeden hlavní bod kvadratický α a čtyři hlavní body lineární β, γ, b, c; značme ji tedy $T_\alpha^{(3)}\,(\alpha^2, \beta, \gamma, b, c)$. Hlavnímu bodu α odpovídá hlavní kuželosečka C_α^2 $(\alpha, \beta, \gamma, b, c)$, určená všemi pěti hlavními body, kterémukoliv hlavnímu bodu prvého stupně přísluší hlavní přímka spojující tento bod s bodem α, tedy tečna křivky C^3 v tomto hlavním bodě lineárním. Hlavní kuželosečka C_α^2* prochází čtveřinou sdružených bodů křivky C^3 a jejich společným bodem tečnovým α, — *jest tedy konickou polárou bodu α vzhledem ke křivce C^3* a dotýká se tudíž v tomto bodě této křivky.

Transformace $T_\alpha^{(3)}$ jest kubickou »perspektivní« Jonquièrovou involucí. Libovolnému bodu roviny M odpovídá totiž touto transformací bod M_0, který leží na paprsku $\overline{\alpha M}$, neboť obě transformace T_1 i T_2 vytvoří ve svazku paprskovém o středu α touž involuci paprskovou J_α, totiž tu involuci, kterou se promítají z bodu α bodové páry binárně cyklické korespondence $E_0^{(2)}$ Všimněme si nyní svazku kuželoseček S_1^2 (β, γ, b, c) o základních bodech β, γ, b, c. Poněvadž libovolnému bodu P křivky C^3 přiřazuje transformace T_1, jakož i transformace T_2 týž bod P′ křivky C^3, převádějí obě tyto transformace T_1 i T_2 kuželosečku K (β, γ, b, c, P) v touž kuželosečku K' $(\beta, \gamma, b, c, P')$. Ve svazku S_1^2 (β, γ, b, c) vytvoří

tedy transformace T_1 korespondenčními kuželosečkami touž involuci co transformace T_2. *Jest tedy každá kuželosečka K svazku* S_1^2 (β, γ, b, c) *kubickou transformací* $T_\alpha^{(3)} \equiv T_1 T_2$ *reprodukována; pespektivní transformace* $T_\alpha^{(3)}$ *vytvoří na ní svými bodovými páry involuci o středu* α, *jejíž samodružné body* ξ, η, — *dotyčné body tečen vedených z bodu* α *ke kuželosečce K, — leží ovšem na* C^3. *Tím dána jest tedy jednoduchá lineární konstrukce bodových páru kubické perspektivní involuce* $T_\alpha^{(3)}$ *V rovině obecně zvolenému bodu X odpovídá další průsečík* X_0 *paprsku* $\overline{\alpha X}$ *s kuželosečkou* (β, γ, b, c, X).

Na libovolném paprsku p jdoucím bodem α vzniká transformací $T_\alpha^{(3)}$ bodová involuce (X, X_0), jež jest na přímce p vyťata svazkem kuželoseček S_1^2 (β, γ, b, c). Ve svazku tom existují dvě kuželosečky, které se přímky p dotýkají; dotyčné body jejich U, U^* jsou samodružnými body této involuce a leží tedy na C^3. Platí tedy vztah $(UU^*XX_0) = -1$. *Tím máme nový způsob vytvoření transformace* $T^{(3)}$, která jest dokonale určena skupinou pěti svých hlavních bodů $(\alpha^2, \beta, \gamma, b, c)$, anebo, což jest totéž, středem α a křivkou C^3 jakožto místem bodů samodružných: *K libovolnému bodu X určíme korespondenční bod* X_0 *na paprsku* $p \equiv \overline{\alpha X}$ *tak, že platí* $(UU^*XX_0) = -1$, *při čemž U a* U^* *jsou proměnné průsečíky paprsku p s křivkou* C^3. *Perspektivní Jonquièrova kubická involutorní transformace* $T_\alpha^{(3)}$ *jest známou transformací Saltelovou.*[7])

Přihlédněme ještě k některým vlastnostem křivky C^3 a některým vztahům mezi oběma transformacemi T_1 a T_2.

Za tím účelem sestrojme nejprve diagonálné vrcholy čtyřrohu $\beta\gamma bc$. Označme je: $\alpha' \equiv (\overline{\beta\gamma} \,.\, \overline{bc})$, $\mu \equiv (\overline{\beta b} \,.\, \overline{\gamma c})$ a $\mu' \equiv (\overline{\beta c} \,.\, \overline{\gamma b})$. Poněvadž bodové páry každé bin. cyklické korespondence druhého druhu na kubické křivce rovinné se promítají z každého bodu křivky na tuto opět v bodové páry téže korespondence, plyne z konstrukce diagonálných vrcholů, že tyto body leží opět na křivce a vyhovují vztahům: $E_0^{(2)} \equiv E(\beta\gamma) \equiv E(\alpha\alpha') \equiv$ $\equiv E(\mu\mu')$; $E^{(2)}(\beta b) \equiv E(\alpha\mu) \equiv E(\alpha'\mu')$; $E^{(2)}(\beta c) \equiv E(\alpha\mu') \equiv E(\alpha'\mu)$. *Tvoří tedy body* $\alpha\alpha'\mu\mu'$ *na křivce* C^3 *novou čtveřinu bodů konjugovaných.*

Obě transformace T_1 i T_2 vytvořují v paprskovém svazku o středu α touž involuci J_α jejíž samodružné paprsky buďtež r, s. Podobně jsme seznali, že vytvoří touž involuci ve svazku kuželoseček S_1^2 $(\beta\gamma bc)$; kuželosečky R, S buďtež samodružné elementy této involuce. Buďtež dále $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ samodružné body transformace T_1 a $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, \overline{\sigma}_4$ samodružné

---

[7]) Saltel: Sur l'application de la transformation Arguesienne à la génération des courbes et surfaces géométriques. Mémoires publiés par l'académie royale de Belgique. Tome 22. 1872. Viz též K. Doehlemann: Geometrische Transformationen. II., str. 168. (Sammlung Schubert XXVIII.)

body transformace T_2. Všimněme si především, že *křivka C^3 nemůže procházeti žádným samodružným bodem transformace T_1 nebo T_2*, neboť tyto transformace na ní vytvořují svými bodovými páry binárně cyklickou korespondenci druhého druhu a ta nemá žádných bodů samodružných: *Transformace T_1 a T_2 nemohou tudíž míti žádný společný bod samodružný.*

Všimněme si nyní samodružných bodů (σ_i) transformace T_1. Dva z těchto bodů, třeba σ_1, σ_2, musí ležeti na samodružné přímce r, zbývající dva σ_3, σ_4 leží potom na s. Jsou to zřejmě samodružné body involucí bodových na r a s vytvořených transformací T_1. Avšak z týchž důvodů musí též dva body ze skupiny (σ_i) ležeti na samodružné kuželosečce R a zbývající na S. Zvolme označení tak, že kuželosečka R prochází bodem σ_1 přímky r. Poněvadž kuželosečka R se nemůže v bodě σ_1 přímky r dotýkati, — neboť pak by ležel samodružný bod σ_1 na křivce C^3, což je vyloučeno, — protíná ji nutně v druhém samodružném bodě σ_2. Druhá samodružná kuželosečka S protíná tedy přímku s v dalších dvou samodružných bodech σ_3 a σ_4. Bodové páry σ_1, σ_2; σ_3, σ_4, ležící na kuželosečkách svazku S^2 $(\beta\gamma bc)$, jsou nutně bodovými páry kubické involuce T_α. Převádí tedy transformace T_2 bod σ_1 v σ_2 a bod σ_3 v σ_4.

Podobně tomu jest se skupinou samodružných bodů $(\bar{\sigma}_i)$ transformace T_2. Nyní jest zřejmě nutná tato konfigurace. Kuželosečka S seče přímku r v samodružných bodech σ_1, $\bar{\sigma}_2$ a kuželosečka R přímku s v bodech σ_3, σ_4. Transformace T_1 převádí tedy bod $\bar{\sigma}_1$ v $\bar{\sigma}_2$ a bod $\bar{\sigma}_3$ v $\bar{\sigma}_4$.

Konstruktivní určení bodových skupin (σ_i) a $(\bar{\sigma}_i)$ jest zřejmé. Určíme nejprve paprsky r a s. Involuce J_α vytíná na kuželosečce C_α^2 bodovou involuci $(\beta\gamma; bc)$, jejímž centrem jest diagonálný vrchol a' a direkční osou $\varDelta$ protější diagonálná strana $\mu\mu'$. Přímka $\varDelta$ seče C_α^2 v bodech, kterými procházejí samodružné paprsky r, s. Podobně vytvoří transformace T_1 v paprskovém svazku o středu β involuci β $(a, \gamma; b, c)$; samodružné paprsky této involuce — určíme je analogicky — sečou přímku r v hledaných bodech σ_1, σ_2 a přímku s v bodech σ_3, σ_4. Tím jsou již určeny samodružné kuželosečky R a S a tudíž i samodružné body $(\bar{\sigma}_i)$ transformace T_2.

3. Předcházející úvahy vedou nás k některým vztahům dalším. Seznali jsme, že křivka C^3 jest geometrickým místem dotyčných bodů ξ, η tečen vedených z bodu a ke kuželosečkám svazku S_1^2 $(\beta\gamma bc)$. Všimněme si nyní těchto bodů ξ, η. Body ty tvoří jakožto průsečíky proměnné kuželosečky K svazku S_1^2 s křivkou C^3 centrickou involuci g_2^1. Na druhé straně jsou to dotyčné body tečen vedených z bodu a k proměnné kuželosečce K svazku S_1^2, takže spojnice jejich jest polárou bodu a vzhledem ke K a prochází tudíž pevným bodem a^*, který jest sdruženým pólem k bodu a

vzhledem ke svazku S_1^2. Jest tedy tento bod α^* centrem involuce g_2^1 vyťaté na C^3 svazkem kuželoseček S_1^2, čili »protějším bodem« (korresiduálným bodem) ke čtveřině bodové β, γ, b, c.

Spojnice $\overline{\alpha\alpha^*}$ jest polárou bodu α vzhledem k C_α^2 a dotýká se tedy kuželosečky C_α^2 a tedy i křivky C^3 v bodě α. Involuce g_2^1 má zřejmě za dvojné body bod α a diagonálné vrcholy α' μ, μ' čtyřrohu $\beta\gamma bc$. Bod α^* jest tedy tečnovým bodem čtveřiny α, α', μ, μ' a tudíž druhým tečnovým bodem čtveřiny β, γ, b, c. Tak dospěli jsme k těmto známým větám:[8])

»Vytkneme-li na obecné kubické křivce rovinné C^3 čtveřinu konjugovaných bodů A_1, A_2, A_3, A_4 o společném tečnovém bodě B_1, pak tvoří diagonálné vrcholy B_2, B_3, B_4 čtyřrohu (A_i) s bodem B_1 opět čtveřinu konjugovaných bodů o společném tečnovém bodě C_1. Bod C_1 jest druhým tečnovým bodem konjugované čtveřiny (A_i) a zároveň jest »protějším bodem« (korresiduálným bodem) této čtveřiny. Body B_1 a C_1 jsou konjugované póly vzhledem ke svazku kuželoseček $S_1^2(A_i)$. Každá kuželosečka K tohoto svazku seče křivku C^3 ve dvou bodech ξ, η tak položených, že spojnice $\overline{B_1\xi}$ a $\overline{B_1\eta}$ se dotýkají kuželosečky K v bodech ξ, η. Jest tedy geom. místem dotyčných bodů tečen vedených z bodu B_1 ke svazku kuželoseček S_1^2 (A_1, A_2, A_3, A_4) kubická křivka, která má čtveřinu bodovou A_i za čtveřinu bodů konjugovaných, jichž společným tečnovým bodem jest bod B_1.«

4. Seznali jsme, že libovolná čtveřina konjugovaných bodů A_1, A_2, A_3, A_4 na obecné rovinné křivce kubické C^3 o společném tečnovém bodu α vede ke kvadratickým rovinným involucím $T_{1,2}^{(2)}(\alpha, A_1, A_2)$ a $T_{3,4}^{(2)}(\alpha, A_3, A_4)$, které křivku reprodukují, vytvořujíce na ní svými bodovými páry touž binárně cyklickou korespondenci $E_{1,2}^{(2)} \equiv E\,(A_1\ \ A_2) \equiv E\,(A_3\ A_4)$, a ke kubické perspektivní involuci $T_\alpha^{(3)}(\alpha^2; A_i) \equiv T_{1,2} \,.\, T_{3,4}$, pro níž jest křivka C^3 geom. místem bodů samodružných. Ježto tyto transformace jsou involutorní, plynou ze vztahu $T_\alpha \equiv T_{1,2} \,.\, T_{3,4}$ ihned důsledky $T_\alpha \equiv T_\alpha^{-1} \equiv$ $\equiv T_{3,4}^{-1} \,.\, T_{1,2}^{-1} \equiv T_{3,4} \,.\, T_{1,2}$; $T_{1,2} \equiv T_\alpha \,.\, T_{3,4} \equiv T_{3,4} \,.\, T_\alpha$; $T_{3,4} \equiv T_{1,2}\ T_\alpha \equiv$ $\equiv T_\alpha\ T_{1,2}$.

Tak jsme dospěli ke grupě čtvrtého stupně G_4 involutorních, komutativních Jonquièrových transformací

$$1,\ T_{1,2}^{(2)}\ (\alpha, A_1, A_2),\ T_{3,4}^{(2)}\ (\alpha, A_3, A_4)\ T_\alpha^{(3)}\ (\alpha^2, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

složené ze dvou kvadratických rovinných involucí třídy prvé a z kubické perspektivní Saltelovy involuce.

---

[8]) Odvozuji tyto věty, ovšem jiným způsobem, ježto z předchozího přímo vyplývají a v dalším budu se jich dovolávati. (IV. 1. a VIII.)

Nahradíme-li v předchozím na křivce C^3 binárně cyklickou korespondenci $E^{(2)}_{1,2}$ korespondencí $E^{(2)}_{1,3} \equiv E\,(A_1 A_3) \equiv E\,(A_2 A_4)$, obdržíme podobně kvadratické involuce $T^{(2)}_{1,3}\,(\alpha,\ A_1,\ A_3)$ a $T^{(2)}_{2,4}\,(\alpha,\ A_2,\ A_4)$, jichž součin dává touž kubickou involuci $T^{(3)}_{\alpha}$. Tak máme druhou grupu druhu G_4:

$$1,\ T^{(2)}_{1,3}\,(\alpha,\ A_1,\ A_3),\ T^{(2)}_{2,4}\,(\alpha,\ A_2,\ A_4),\ T^{(3)}_{\alpha}\,(\alpha^2,\ A_i).$$

Posléze vede třetí možná binárně cyklická korespondence $E^{(2)}_{1,4} \equiv E\,(A_1, A_4)$ ke třetí grupě

$$1.\ T^{(2)}_{1,4}\,(\alpha,\ A_1,\ A_4),\ T^{(2)}_{2,3}\,(\alpha,\ A_2\ A_3),\ T^{(3)}_{\alpha}\,(\alpha^2,\ A_i).$$

Vede tedy každá na obecné kubické křivce rovinné C^3 zvolená skupina čtyř sdružených bodu (A_i) o společném tečnovém bodu α ke třem grupám 4. stupně G_4 komutativních rovinných involucí:

$$1,\ T^{(2)}_{h,k}\,(\alpha,\ A_h,\ A_k),\ T^{(2)}_{l,m}\,(\alpha,\ A_l,\ A_m),\ T^{(3)}_{\alpha}\,(\alpha^2,\ A_i),$$

(kde indexy $h, k, l, m,$ se navzájem různí a probíhají hodnotami 1, 2, 3, 4), *z nichž každá přísluší k jedné ze tří existujících binárně cyklických korespondencí druhého druhu $E^{(2)}_{h,k} \equiv E\,(A_h A_k) \equiv E\,(A_l A_m)$.*

III. Grupa G_8.

Vezměme nyní v úvahu dvě kvadratické rovinné involuce $T^{(2)}_{hk}$ a $T^{(2)}_{hl}$, které patří dvěma různým grupám G_4 vytvořeným pomocí téže čtveřiny sdružených bodů (A_i). Tyto transformace mají dva společné hlavní body α, A_h. Součin jejich jest tudíž kvadratická transformace, která křivku C^3 reprodukuje a vytvořuje na ní korespondenci $E^{(2)}_{hk} \cdot E^{(2)}_{hl} \equiv E^{(2)}_{kl} \equiv E^{(2)}_{hm}$. Poněvadž transformace takto vzniklá má hlavní body α, A_h, A_m, platí vztah:

$$T^{(2)}_{hk} \cdot T^{(2)}_{hl} \equiv T^{(2)}_{hm}.$$

Vzniká kvadratická involuce třetí grupy G_4 příslušející ke čtveřině (A_i) Tím dospěli jsme ke grupě G_8 komutativních Jonquièrových transformací, složené ze šesti kvadratických rovinných involucí $T^{(2)}_{hk}\,(\alpha, A_h, A_k)$ a kubické perspektivní involuce $T^{(3)}_{\alpha}$. Komutativní součiny elementů této grupy řídí se zákony:

$$1)\quad T^{(2)}_{hk} \cdot T^{(2)}_{lm} \equiv T^{(3)}_{\alpha},$$
$$2)\quad T^{(2)}_{hk} \cdot T^{(2)}_{hl} \equiv T^{(2)}_{hm},$$
$$3)\quad T^{(2)}_{hk} \cdot T^{(3)}_{\alpha} \equiv T^{(2)}_{lm}.$$

Můžeme tedy vysloviti větu:

Ke každé obecné kubické křivce rovinné C_3 lze sestrojiti ∞^1 komutativních grup osmého stupně G_8 složených kromě identity ze 6 kvadratických involucí třídy prvé a z jedné kubické involuce, které křivku C^3

reprodukují. Každá čtveřina konjugovaných bodu křivky C^3 vede k jedné takové grupě G_8. Je-li (A_i) jedna taková čtveřina konjugovaných bodů o společném tečnovém bodě α, pak grupa G_8 k ní příslušející má tvar

$$1,\ T^{(2)}_{hk}\ (\alpha, A_h, A_k),\ T^{(3)}_{\alpha}\ (\alpha^2, A_i),$$

kde hk probíhá všech 6 kombinací druhé třídy z prvků 1, 2, 3, 4. Skládá se tedy ze 6 kvadratických involucí $T^{(2)}_{hk}$, které křivku C^3 reprodukují, vytvořujíce na ní binárně cyklické korespondence druhého druhu $E^{(2)}(A_h A_k)$ a z kubické perspektivní involuce $T^{(3)}_{\alpha}$, která má křivku C^3 za geom. místo bodů samodružných. Grupa G_8 má tři podgrupy čtvrtého stupně G_4

$$1,\ T^{(2)}_{hk},\ T^{(2)}_{lm},\ T^{(3)}_{\alpha},$$

složené z kubické involuce a z těch dvou kvadratických involucí grupy, které na křivce C^3 vytvořují tutéž korespondenci $E^{(2)}$.

Mimo to obsahuje grupa G_8 další 4 podgrupy čtvrtého stupně G_4, *které mají tvar*

$$1,\ T^{(2)}_{hk},\ T^{(2)}_{hl},\ T^{(2)}_{hm},$$

a z nichž každá jest složena ze tří kvadratických involucí třídy prvé, jichž hlavní trojúhelníky mají společné dva vrcholy, kdežto zbývající vrcholy třetí kterýchkoli dvou z nich tvoří bodový pár v involuci třetí. Transformace každé této podgrupy G_4 *vytvoří na křivce C^3 všechny tři možné korespondence $E^{(2)}$.*

IV. Grupa G_{16}.

1. Dosud zabývali jsme se rovinnými kvadratickými involucemi, které reprodukují danou kubickou křivku vytvořujíce na ní svými bodovými páry binárně cyklické korespondence druhého druhu. *Avšak z předchozích úvah snadno seznáme, že obecná kubická křivka rovinná C^3 muže býti též reprodukována kvadratickými involucemi třídy prvé, které na křivce C^3 vytvoří centrické involuce g^1_2.* Seznali jsme, (viz čl. II., kap. 2. a 3.), že každý paprsek p vedený bodem α, — kde α jest společný tečnový bod kterékoliv konjugované čtveřiny bodové (A_i) vytčené na křivce C^3,— seče C^3 ve dvou dalších bodech U, U^*, které jsou samodružnými body involuce vyťaté na p svazkem kuželoseček $S^2_1(A_i)$, takže tyto dva body jsou konjugovanými póly vzhledem k tomuto svazku. Body U, U^* odpovídají si tedy v kvadratické rovinné involuci touto polaritou definované, t. j. v involuci $\tau^{(2)}$, která má na křivce C^3 čtveřinu samodružných bodů (A_i) a za hlavní body diagonálné vrcholy α', μ, μ' čtyřrohu (A_i). Reprodukuje tedy tato kvadratická involuce křivku C^3 a vytvořuje na ní svými bodovými páry centrickou involuci g^1_2 o středu α. Můžeme tedy vysloviti větu:

Existuje ∞^1 *kvadratických rovinných involucí třídy prvé* $\tau^{(2)}$, *které reprodukují danou kubickou křivku* C^3, *vytvořujíce na ní svými bodovými páry centrické involuce* g_2^1. *Každá čtveřina konjugovaných bodů* (A_i) *křivky* C^3 *o společném tečnovém bodě* a, *vzata za čtveřinu bodů samodružných, dokonale určuje jednu takovou kvadratickou rovinnou involuci* $\tau^{(2)}$; *ta křivku* C^3 *reprodukuje vytvořujíc na ní centrickou involuci* g_2^1 *o středu* a. *Hlavní body této involuce jsou diagonálnými vrcholy čtyřrohu* (A_i) *a tvoří tedy s bodem* a *opět konjugovanou čtveřinu křivky* C^3. A opačně: *Každá trojice bodová* A_h, A_k, A_l *obsažená v konjugované čtveřině bodové* (A_i) *vede jakožto trojice hlavních bodů k jedné takové kvadratické involuci* $\tau_m^{(2)}$. $(A_h\ A_k\ A_l)$, *která reprodukuje křivku , vytvořujíc na ní centrickou involuci* g_2^1 (A_m), *jejímž středem jest zbývající čtvrtý bod* A_m. *Vede tedy v tomto smyslu každá konjugovaná čtveřina bodová* (A_i) *ke čtyřem takovým involucím.*

2. Vezměme nyní v úvahu transformace svrchu sestrojené grupy G_8, která je určena konjugovanou čtveřinou bodovou (A_i) o společném tečnovém bodě a, a připojme k nim nové kvadratické rovinné involuce

$$\tau_1^{(2)}\ (A_2\ A_3\ A_4),\ \tau_2^{(2)}\ (A_1\ A_3\ A_4),\ \tau_3^{(2)}\ (A_1\ A_2\ A_4),\ \tau_4^{(2)}\ (A_1\ A_2\ A_3),$$

které křivku C^3 reprodukují tak, že transformace $\tau_m^{(2)}$ vytvoří na ní centrickou involuci g_2^1 (A_m) o středu A_m

Především snadno seznáme, že součin dvou takovýchto nových transformací $\tau_h^{(2)}$ a $\tau_k^{(2)}$ dává kvadratickou involuci o hlavních bodech a, A_l, A_m, která křivku C^3 reprodukuje a vytvoří na ní korespondenci $g_2^1\ (A_h)\ .\ g_2^1\ (A_k) \equiv E^{(2)}\ (A_h\ A_k)$.[9])

Platí tedy

1. $$\tau_h^{(2)}\ .\ \tau_k^{(2)} \equiv T_{lm}^{(2)},$$

odkud jest zároveň zřejmo, že součin tento jest komutativní.

Může býti tudíž každá kvadratická transformace grupy G_8 vytvořena co součin dvou transformací druhu $\tau^{(2)}$ a sice jen jediným způsobem.

Vyšetříme nyní vztah mezi transformacemi $\tau^{(2)}$ a kvadratickými involucemi grupy G_8. Tu mohou nastati toliko dva v podstatě různé případy; v prvém případě mají dvě takové transformace dva hlavní body společné, součin jejich jest tedy opět kvadratická transformace, kdežto v druhém případě mají jen jeden hlavní bod společný, takže součin jejich dává kubickou transformaci.

Z rov. 1. plyne ihned pro prvý případ zákon multiplikační:

2. $$T_{lm}^{(2)}\ .\ \tau_k^{(2)} \equiv \tau_h^{(2)} \equiv \tau_k^{(2)}\ .\ T_{lm}^{(2)}.$$

---

[9]) Platí totiž $A_h \ldots g_2^1\ (A_h) \ldots a \ldots g_2^1\ (A_k) \ldots A_k$.

Každou transformaci $\tau_h^{(2)}$ lze tedy vytvořiti trojím způsobem co součin kterékoliv transformace $\tau_k^{(2)}$ $(k \gtrless h)$ s příslušnou jednou kvadratickou involucí grupy G_8.

V druhém případě jde o součin $\tau_h^{(2)} \cdot T_{hk}^{(2)}$, který dává kubickou transformaci, která má, jak známým způsobem snadno zjistíme, v obou rovinách tytéž hlavní body a hlavní křivky, a sice hlavní bod kvadratický A_k a čtyři hlavní body lineární α, A_h, A_l, A_m. Hlavnímu bodu A_k odpovídá kuželosečka všemi pěti hlavními body určená a hlavnímu bodu prvého stupně přísluší přímka tento bod spojující s bodem A_k. Vezmeme-li zřetel k tomu, že obě transformace $\tau_h^{(2)}$ a $T_{hk}^{(2)}$ vytvořují v paprskovém svazku o středu A_k touž paprskovou involuci, neboť paprsky $\overline{A_k A_h}$, $\overline{A_k \alpha}$ a $\overline{A_k A_m}$, $\overline{A_k A_l}$ si odpovídají v obou transformacích, pak seznáme přímo, že součin $\tau_h^{(2)} \cdot T_{hk}^{(2)}$ jest kubická perspektivní involuce Jonquièrova,[10]) která jest charakterisována bodem A_k a čtveřinou α, A_h, A_l, A_m právě tak, jako involuce $T_\alpha^{(3)}$ byla vyznačena bodem α a čtveřinou (A_i). Můžeme tudíž psáti

3) $\tau_h^{(2)}(A_k, A_l, A_m) \cdot T_{hk}^{(2)}(\alpha, A_h, A_k) \equiv T_k^{(3)}(A_k^2;\ \alpha, A_h, A_l, A_m) \equiv T_{hk}^{(2)} \cdot \tau_h^{(2)}$

Tato kubická perspektivní involuce $T_k^{(3)}$ reprodukuje základní kubickou křivku C^3 a vytvoří na ní centrickou involuci $g_2^1(A_k)$, jež jest vskutku vyjádřena součinem $g_2^1(A_h) \cdot E^{(2)}(A_h A_k)$, který jest v tomto případě komutativní.[11])

Geometrickým místem samodružných bodů kubické involuce $T_k^{(3)}$ jest ovšem jiná kubická křivka $C_k^{(3)}$, která jest jednoznačně určena čtveřinou konjugovaných bodů α, A_h, A_l, A_m, jichž společným tečnovým bodem jest pátý bod zbývající A_k.

Tak obdrželi jsme celkem čtyři další nové kubické Jonquièrovy involuce $T_k^{(3)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, — a sice každou z nich lze dle relace 3) vytvořiti třemi různými způsoby co komutativní součin dvou kvadratických involucí — a čtyři další kubické křivky C_k^3, z nichž každá jest geom. místem samodružných bodů pro jednu k ní příslušící kubickou involuci; ostatní transformace tyto křivky reprodukují. Že tomu tak jest, stačí ukázati pro transformace kvadratické.

Především jest zřejmo, že skupina těchto pěti kubických křivek jest z dané skupiny pětibodové vytvořena symetrickým způsobem, takže

---

[10]) Jest to ostatně zřejmo bezprostředně, neboť kvadratické involuce τ_h a T_{hk} jsou v témž vzájemném poměru jako involuce, jichž součinem byla transformace $T_\alpha^{(3)}$; mají společný jeden hlavní vrchol a zbývající dva vrcholy hlavní kterékoliv jedné z nich tvoří bodový pár involuce druhé.

[11]) Součin $g^1_2 \cdot E$ dává nutně involuci centrickou. V případě našem jest:

$$\alpha \ldots g_2^1(A_h) \ldots A_h \ldots E(A_h A_k) \ldots A_k.$$

žádná z nich vzhledem k souhrnu těchto transformací nehraje nějakou zvláštní roli. Abychom tudíž dosáhli i formální symetrie, označme vytknuté body číslicemi 1, 2, 3, 4, 5 a příslušné kubické křivky znaky C^3_1, C^3_2, . . . C^3_5, při čemž křivka C^3_i má bod i za tečnový bod ostatních čtyř bodů. Kterákoliv z uvažovaných kvadratických involucí má tři vrcholy z těchto pěti za hlavní a zbývající dva si v ní navzájem odpovídají. Vytkněme na příklad transformaci $T^{(2)}$ (1, 2, 3), která má hl. body 1, 2, 3 a v níž bodu 4 odpovídá bod 5. Kubické křivky C^3_1, C^3_2, C^3_3 mají k této transformaci polohu vytčenou v čl. II. a III., takže transformace je reprodukuje, vytvořujíc na nich binárně cyklické korespondence, kdežto křivky C^3_4 a C^3_5 mají k ní touž polohu, jako v dřívějším označení základní křivka C^3 k transformacím $\tau^{(2)}$, takže jsou reprodukovány tak, že transformace tato vytvoří na nich centrické involuce; na křivce C^3_4 involuci g^1_2 (5) a na C^3_5 involuci g^1_2 (4).

Každá ze svrchu vytčených desíti kvadratických transformací vytvoří tedy na třech kubických křivkách korespondence binárně cyklické druhého druhu, na dvou křivkách centrické involuce g^1_2. Opačně vytvoří na každé této kubické křivce šest kvadratických transformací binárně cyklické korespondence $E^{(2)}$, (vždy dvě transformace vytvoří touž korespondenci) a čtyři vytvoří na ní centrické involuce g^1_2. Každá z pěti nalezených kubických perspektivných involucí $T^{(3)}$ má jednu křivku $C^{(3)}_i$ za geom. místo bodů samodružných, kdežto na ostatních čtyřech křivkách C^3_h $(h \gtrless i)$ vytvoří centrické involuce g^1_2 (i), jejichž středem jest kvadratický hlavní bod i. A opačně. Všimněme si dvou těchto křivek, třeba křivek C^3_i a C^3_h. Tyto se protínají v dalších čtyřech bodech; body ty jsou samodružnými body centrické involuce $g^1_2\,(h)$, kterou na C^3_i vytvoří transformace $T^{(3)}_h$ a podobně jsou samodružnými body involuce $g^1_2(i)$, kterou transformace $T^{(3)}_i$ vytvoří na C^3_h. Protínají se tedy každé dvě kubické křivky C^3_i a C^3_h v dalších čtyřech bodech, které tvoří na každé této křivce čtveřinu bodů konjugovaných, jichž společným tečnovým bodem pro křivku C^3_h jest bod i a pro křivku C^3_i bod h.

Všimněme si ještě vztahů mezi nalezenými kubickými involucemi a involucemi kvadratickými. Vrátíme-li se k původní nesymetrické symbolice, zbývá nám, ovšem *toliko se zřetele formálního*, ještě určiti hodnotu těchto součinů:

$$\tau^{(2)}_k . T^{(3)}_\alpha;\; \tau^{(2)}_k . T^{(3)}_k;\; \tau^{(2)}_k . T^{(3)}_h;\; T^{(2)}_{hk} . T^{(3)}_k;\; T^{(2)}_{hk}\, T^{(3)}_l,$$

z nichž však jen prvý má nový obsah.

Z relace 3) a 1) plyne přímo:

4. $$\tau^{(2)}_k . T^{(3)}_k \equiv \tau^{(2)}_k . \tau^{(2)}_h . T^{(2)}_{hk} \equiv T^{(2)}_{lm} . T^{(2)}_{hk} \equiv T^{(3)}_\alpha,$$

kterýžto vztah, obsahem nový, můžeme ostatně též přímo lehce odvoditi. Komutativnost jest zřejmá.

Prostou formální obměnou této relace jsou zřejmě vztahy:

$$T_k^{(2)}\, T_\alpha^{(3)} \equiv T_k^{(3)}; \qquad T_{hk}^{(2)} \cdot T_l^{(3)} \equiv T_m^{(3)}.$$

Z obsahu relace 3) v čl. III. plynou přímo součiny:

$$T_k^{(2)}\, T_h^{(3)} \equiv T_{hk}^{(2)} \quad \text{a} \quad T_{hk}^{(2)} \cdot T_k^{(3)} \equiv T_h^{(2)}.$$

Zbývá tedy ještě určiti součiny kubických involucí. Z relace 4) plyne přímo

5. $$T_\alpha^{(3)} \cdot T_k^{(3)} \equiv T_k^{(2)}.$$

Týž obsah má posléze relace

$$T_k^{(3)} \cdot T_m^{(3)} \equiv T_{hl}^{(2)},$$

kterouž ostatně lze lehce přímo odvoditi.

Tím jsme seznali, že nalezené kvadratické a kubické involuce tvoří grupu 16. stupně G_{16} komutativných Jonquièrových involucí, které reprodukují pět kubických křivek, jež polohou pěti obecně v rovině zvolených bodů jsou dokonale určeny.

3. Zavedeme-li poněkud odchylné symetrické označení, můžeme výsledek takto vyjádřiti:

Je-li v rovině dáno 5 obecně položených bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, z nichž tedy žádné tři neleží v přímce, jest jimi určena dokonale komutativní grupa šestnáctého stupně G_{16} involutorních transformací Jonquièrových, které reprodukují pět kubických rovinných křivek C_i^3 $(i = 1, 2, \ldots 5)$ těmito body procházejících, jež jsou tím dokonale určeny, že na každé z nich tvoří čtyři body ze skupiny (A_i) čtveřinu bodů konjugovaných, jichž společným bodem tečnovým jest zbývající bod pátý. Grupa G_{16} skládá se z pěti kubických perspektivních Jonquièrových involucí $T_i^{(3)}$, z nichž každá má jeden z daných bodů (A_i) za kvadratický bod hlavní a ostatní čtyři za hlavní body prvého stupně, a z desíti kvadratických involucí prvé třídy $T_{hk}^{(2)}$, (kde hk probíhá všechny kombinace druhé třídy z prvků 1, 2, … 5), z nichž každá má tři body ze skupiny (A_i) za hlavní a zbývající dva tvoří její korespondenční bodový pár. Zavedeme-li označení tak, že C_i^3 značí kubickou křivku, která má bod A_i za společný tečnový bod zbývajících čtyř bodů, značí-li dále $T_i^{(3)}$ kubickou perspektivní involuci, která má bod A_i za kvadratický bod hlavní a ostatní čtyři za hlavní body lineární, a značí-li posléze $T_{hk}^{(2)}$ kvadratickou involuci, v níž body A_h, A_k si navzájem odpovídají a zbývající tři body ze skupiny (A_i) tvoří její hlavní body, pak můžeme vlastnosti grupy G_{16} takto vyjádřiti:

Každá kubická křivka $C_i^{(3)}$ jest geometrickým místem samodružných bodů jedné kubické involuce a sice involuce $T_i^{(3)}$, kdežto každá ze zbývajících čtyř perspektivných kubických involucí $T_h^{(3)}$ ($h \not\equiv i$) vytvoří na ní centrickou involuci g_2^1, jejímž středem jest příslušný hlavní bod kvadratický A_h.

Na každé křivce C_i^3 vytvoří šest kvadratických involucí grupy G_{16} korespondence binárně cyklické druhého druhu a sice vždy dvě transformace $T_{hk}^{(2)}$ a $T_{lm}^{(2)}$ tutéž binárně cyklickou korespondenci $E(A_h A_k) \equiv \equiv E(A_l A_m)$, ($i, h, k, l, m$ jsou čísla navzájem různá a mají některou z hodnot 1, 2, ... 5), *kdežto každá ze zbývajících čtyř kvadratických involucí $T_{ik}^{(2)}$, kde i jest pevné a k se mění, vytvoří na C_i^3 centrickou involuci g_2^1 o středu A_k. Opačně vytvoří každá kvadratická involuce $T_{hk}^{(2)}$ grupy G_{16} na třech kubických křivkách C_i^3, C_l^3, C_m^3 binárně cyklické korespondence, kdežto na zbývajících dvou křivkách C_h^3* a *C_k^3 vytvoří centrické involuce g_2^1 a sice na první o středu A_k a na druhé o středu A_h; dvojné body těchto centrických involucí jsou společné, neboť jsou to samodružné body transformace $T_{hk}^{(2)}$. Protínají se tedy každé dvě kubické křivky C_h^3* a *C_k^3 mimo body (A) ještě v dalších čtyřech bodech, samodružných bodech transformace $T_{hk}^{(2)}$, které tvoří na obou těchto křivkách čtveřinu konjugovaných bodů, jichž společný tečnový bod pro křivku C_h^3 jest bod A_k a pro křivku C_k^3 bod A_h.*

Komutativní násobení elementů grupy G_{16} řídí se zákony:

$$T_{hk}^{(2)} \cdot T_{hl}^{(2)} \equiv T_{kl}^{(2)};$$

$$T_{hk}^{(2)} \cdot T_{lm}^{(2)} \equiv T_i^{(3)}, \qquad T_{hk}^{(2)} \cdot T_h^{(3)} \equiv T_k^{(3)},$$

$$T_{hk}^{(2)} \cdot T_i^{(3)} \equiv T_{lm}^{(2)}; \qquad T_k^{(3)} \cdot T_h^{(3)} \equiv T_{hk}^{(2)}.$$

Každé dvě transformace grupy G_{16} vedou k jedné podgrupě čtvrtého stupně. Grupa G_{16} obsahuje tedy 35 podgrup čtvrtého stupně; tyto jsou trojího druhu. Jest to především 10 podgrup $G_4^{(im)}$

$$1, \quad T_{hk}^{(2)}, \quad T_{hl}^{(2)}, \quad T_{kl}^{(2)},$$

z nichž každá jest složena ze tří kvadratických involucí, jichž hlavní trojúhelníky mají společné dva vrcholy, takže ke každé straně základního pětirohu přísluší jedna taková podgrupa G_4. Dále jest to 15 podgrup G_4

$$1, \quad T_i^{(3)}, \quad T_{hk}^{(2)}, \quad T_{lm}^{(2)},$$

z nichž každá obsahuje jednu kubickou involuci a ty dvě kvadratické transformace, které na příslušné základní kubické křivce vytvořují tutéž binárně cyklickou korespondenci druhého druhu $E^{(2)}$, takže ke každé základní kubické křivce přísluší tři takové grupy G_4. Posléze jest 10 podgrup Q_4

$$1, \quad T_h^{(3)}, \quad T_k^{(3)}, \quad T_{hk}^{(2)},$$

z nichž každá obsahuje dvě kubické involuce a jednu kvadratickou. Grupa G_{16} *obsahuje 15 podgrup osmého stupně. Jest to především 5 podgrup* $G_8^{(i)}$, *z nichž každá jest charakterisována jednou kubickou křivkou* C_i^3, *obsahuje k ní příslušející kubickou involuci* $T_i^{(3)}$ *a šest kvadratických involucí, které na této křivce vytvořují korespondence* $E^{(2)}$. *Podgrupa* $G_8^{(i)}$ *má tedy tvar*

$$1,\ T_i^{(3)},\ T_{hk}^{(2)},$$

kde při pevném i probíhá hk všechny možné kombinace druhé třídy ze zbývajících čtyř prvků. Složení této podgrupy bylo již uvedeno.

Dále jest to 10 podgrup $\mathbf{G}_8^{(im)}$

$$1,\ T_h^{(3)},\ T_k^{(3)},\ T_l^{(3)},\ T_{hk}^{(2)},\ T_{hl}^{(2)},\ T_{kl}^{(2)},\ T_{im}^{(2)},$$

z nichž každá obsahuje tři kubické involuce a čtyři kvadratické. Ke každé straně $\overline{A_i A_m}$ *základního pětirohu přísluší jedna takováto podgrupa* $\mathbf{G}_8^{(im)}$; *obsahuje ke straně té patřící podgrupu* $\mathbf{G}_4^{(im)}$, *další kvadratickou involuci* $T_{im}^{(2)}$ *a ty tři kubické involuce, jichž kvadratické hlavní body neleží na této straně. Každá tato podgrupa* $\mathbf{G}_8^{(im)}$ *obsahuje vedle podgrupy* $\mathbf{G}_4^{(im)}$ *ještě tři další podgrupy* Q_4.

V. Podgrupy $\mathbf{G}_4$, $\mathbf{G}_8$, G_4, G_8, Q_4.

Skupiny bodové.

1. V předchozím jsme poznali *grupu čtvrtého stupně* $\mathbf{G}_4$, *složenou z identity a tří kvadratických involucí třídy prvé. Grupa ta jest charakterisována tím, že hlavní trojúhelníky těchto tří transformací mají dva vrcholy společné,* — značme je v dalším α, β, — *kdežto zbývající hlavní vrcholy kterýchkoli dvou transformací grupy tvoří bodový pár v involuci třetí.*[12])

Grupa $\mathbf{G}_4$ jest tedy dokonale určena, známe-li její transformaci $T_1(\alpha\beta\gamma_1)$ a zbývající hlavní vrchol γ_2 transformace druhé. Určíme prostě bod γ_3, který v dané involuci T_1 odpovídá bodu γ_2, načež transformace $T_2(\alpha\beta\gamma_2)$ jest již určena bodovým párem $\gamma_1\gamma_3$; komutativní součin $T_1 . T_2$ dává potom involuci $T_3(\alpha\beta\gamma_3)$, která jest určena bodovým párem $\gamma_1\gamma_2$.

Danou obecnou kubickou křivku rovinnou K^3 *lze reprodukovati* ∞^2 *grupami* $\mathbf{G}_4$ *tří kvadratických involucí třídy prvé, při čemž tyto transformace vytvořují na křivce* K^3 *tři binárně cyklické korespondence* $E^{(2)}$.

[12]) Grupa $\mathbf{G}_4$ jest podgrupou známé grupy 8. stupně, složené ze 7 kvadr. transformací, jež reprodukují křivku bikvadratickou rodu 1. Zabývám se přece studiem této grupy, ježto činím tak metodou vlastní a podávám některé vztahy nové. Pro srovnání viz B. Bydžovský: Kvadr. transformace cb. kř. rov. bikvadratické rodu 1; Rozpravy Akad., tř. II., roč. XXIX., 1920.

Libovolné dva body α, β na křivce K^3 obecně zvolené vedou totiž k jedné takové grupě G_4. Určíme průsečík γ přímky $\overline{\alpha\beta}$ s křivkou K^3 a k bodu γ určíme konjugované body γ_1, γ_2, γ_3 užitím všech tří na křivce K^3 existujících korespondencí $E_i^{(2)}$. Každý ze tří vrcholů γ_i určuje jednu transformaci T_i $(\alpha\beta\gamma_i)$ grupy G_4. V transformaci T_i si zbývající dva vrcholy γ_h, γ_k navzájem odpovídají, takže trasformace ta křivku K^3 reprodukuje, vytvořujíc na ní korespondenci $E_i^{(2)} \equiv E(\gamma\,\gamma_i) \equiv E(\gamma_h\,\gamma_k)$.

Všimněme si blíže jedné takové určité grupy G_4, *charakterisované skupinou bodovou* α, β; γ_1, γ_2, γ_3 *a složené ze tří involucí* $T_i(\alpha\beta\gamma_i)$. *Transformace této grupy reprodukují každou kubickou křivku* $K^3_{,,}$, *která prochází body* α, β *a má za čtveřinu konjugovaných bodů skupinu bodovou* γ, γ_1, γ_2, γ_3, *jakmile bod* γ *jest kterýkoli proměnný bod přímky* $\overline{\alpha\beta}$. Tato křivka $K^3_{,,}$ jest volbou bodu γ na přímce $\overline{\alpha\beta}$ jednoznačně určena, neboť má-li míti konjugovanou čtveřinu γ, γ_1, γ_2, γ_3, jest nutné a postačující, aby procházela též diagonálnými vrcholy čtyřrohu (γ, γ_1, γ_2, γ_3); tím známe pro ní celkem 9 bodů, které netvoří basi svazku; tři z nich leží totiž na přímce $\overline{\alpha\beta\gamma}$, tři na spojnici $\overline{\gamma_1\gamma_2}$, kdežto zbývající tři již neleží v přímce.

Transformace grupy G_4 *vytvoří na každé této kubické křivce* $K^3_{,,}$ *tři binárně cyklické korespondence* $E_i^{(2)}$, *takže grupa* G_4 *vytvoří na těchto křivkách čtveřiny bodů konjugovaných.*

Libovolným bodem P v rovině obecně zvoleným prochází jen jediná křivka $K^3_{,,}$; křivka ta musí totiž procházeti též body P_1, P_2, P_3, které jsou z bodu P vytvořeny grupou G_4, a mimo to též diagonálnými vrcholy tohoto čtyřrohu (P), neboť body (P) musí býti na $K^3_{,,}$ konjugovány; — avšak $5 + 7$ body nemohou procházeti dvě různé kubické křivky. *Křivky* $K^3_{,,}$ *tvoří tudíž svazek* Σ^3_1, *jehož base skládá se z pěti daných bodů* α, β, γ_1, γ_2, γ_3 *a z dalších čtyř bodů* σ_1, σ_2 σ_3, σ_4, jež nutně tvoří skupinu bodovou, vytvořenou grupou G_4 a tudíž skupinu čtyř konjugovaných bodů pro všechny křivky $K^3_{,,}$ svazku Σ^3_1. Polohu těchto čtyř bodů (σ) seznáme ihned, jakmile si uvědomíme, že všechny křivky svazku, majíce konjugovanou čtveřinu (σ), musí procházeti též diagonálnými vrcholy čtyřrohu (σ), při čemž tyto tři diagonální vrcholy musí býti pro všechny křivky svazku opět navzájem konjugovány; — těmito diagonálnými vrcholy mohou býti tudíž jen body γ_1, γ_2, γ_3. Tečnové body konjugované čtveřiny (σ) jsou ovšem pro různé křivky $K^3_{,,}$ svazku různé; jsou to zřejmě proměnné body γ, ležící na $\overline{\alpha\beta}$ a doplňující trojici bodovou γ_1, γ_2, γ_3 na čtveřinu konjugovanou.

Body σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 *jsou tudíž samodružné body rovinné kvadratické*

involuce třídy prvé τ, která má hlavní body γ_1, γ_2, γ_3 a jest určena bodovým párem α, β.[13])

Tato kvadratická involuce τ reprodukuje totiž všechny kubické křivky svazku Σ_1^3 vytvořujíc na každé křivce K^3_{γ} centrickou involuci $g^1_2(\gamma)$, jejímž středem jest s křivkou K^3_{γ} proměnný bod γ ležící na $\alpha\beta$. Tomuto bodu γ odpovídá v této involuci $g^1_2(\gamma)$ jeho tečnový bod γ', takže body γ, γ' si musí odpovídati v transformaci τ. Mění-li se ve svazku křivka K^3_{γ}, probíhá bod γ přímku $\alpha\beta$ a příslušný tečnový bod γ' vyplňuje tedy kuželosečku určenou body $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha, \beta)$, která transformací τ odpovídá přímce $\alpha\beta$. *Svazek Σ_1^3 kubických křivek K^3_{γ} jest tedy tím význačný, že body* (σ) *tvoří pro každou křivku svazku čtveřinu bodů konjugovaných, jichž prvý tečnový bod γ vyplňuje přímku $\alpha\beta\gamma$ a druhý tečnový bod γ' leží na kuželosečce* $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\alpha\beta)$.

Skupina bodů (σ) jest transformací τ dokonale stanovena. Ve skupině té zaveďme nyní označení tak, že strany čtyřrohu (σ) můžeme značiti znaky $p_{1,14}$, $p_{1,23}$, $p_{2,13}$, $p_{2,24}$, $p_{3,12}$, $p_{3,34}$, při čemž $p_{i,hk}$ značí přímku spojující body $\gamma_i\sigma_h\sigma_k$. Bodový pár γ_2, γ_3 promítá se z bodu σ_4 na kterroukoliv křivku K^3_{γ} v bodový pár σ_2, σ_3; odpovídají si tedy body σ_2, σ_3 na K^3_{γ} v téže korespondenci $E^{(2)}_1$ co body γ_2, γ_3 a tvoří tudíž bodový pár transformace T_1. Z týchž důvodů převádí T_1 bod σ_1 v σ_4. Jsou tudíž přímky $p_{1,14}$ a $p_{1,23}$ samodružnými přímkami transformace T_1. Podobně má transformace T_2 bodové páry σ_1, σ_3 a σ_2, σ_4, a tudíž samodružné přímky $p_{2,13}$ a $p_{2,24}$; analogicky má transformace T_3 páry σ_1, σ_2 a σ_3, σ_4, jež leží na samodružných přímkách $p_{3,12}$ a $p_{3,34}$. *Čtyřroh samodružných bodů* (σ) *transformace τ má tedy tu vlastnost, že každé dvě jeho strany procházející diagonálným vrcholem γ_i jsou též samodružnými přímkami transformace T_i, při čemž body σ na takové straně ležící si v této transformaci navzájem odpovídají. Leží tedy samodružné body všech tří transformací grupy* G_4 *na stranách čtyřrohu* (σ) *a sice vždy dva na každé straně.*

Čtveřiny konjugovaných bodů (P, P_1, P_2, P_3) *kubických křivek K^3_{γ} svazku Σ_1^3 tvoří v rovině ∞^2 čtyřbokých skupin,* při čemž každý bod roviny náleží obecně jen do jedné skupiny; — *tvoří tedy rovinnou involuci čtvrtého řádu.*

V případě našem jsou tyto čtveřiny bodové vytvořeny transformacemi grupy G_4, takže *tato involuce čtvrtého řádu jest dána součinem tří kvadratických involucí grupy* G_4. Tím dány jsou ihned *všechny vý-*

---

[13]) Že těchto 9 bodů tvoří basi svazku kubických křivek, lze ostatně snadno přímo dokázati. Geiserova příbuznost (obecně 8. st.) určená sedmi body (σ) a (γ) redukuje se v tomto případě jak známo v kvadratickou rovinnou involuci τ.

značné skupiny této involuce čtvrtého řádu. K takovým skupinám vede nás především každý samodružný bod kterékoliv transformace T_i grupy G_4. Je-li na příklad $S_1^{(i)}$ samodružný bod transformace T_i, pak užijeme-li naň postupně involuce T_h a na bod takto vzniklý třetí zbývající involuce T_k, pak musíme se vrátiti zpět do bodu $S_1^{(i)}$, neboť $T_h \cdot T_k \equiv T_i$. *Z bodu $S_1^{(i)}$ vytvoří tudíž grupa* G_4 *toliko bodový pár $S_1^{(i)}$ $S_2^{(i)}$; čtveřina redukovala se ve dva body dvojné a sice na dva samodružné body téže transformace grupy* G_4. Každé dvě transformace grupy G_4 mají společné dva bodové páry a ty tvoří zřejmě samodružné body transformace třetí.

Kubická křivka K_γ^3 svazku Σ_1^3, procházející takovým bodem $S_1^{(i)}$ jest reducibilní, skládá se zřejmě z té strany čtyřrohu (σ), na níž bod $S_1^{(i)}$ leží, a z kuželosečky, která této straně transformacemi grupy odpovídá; plyne to již z toho, že strany čtyřrohu (σ) tvoří Jacobian sítě Σ_2^3 kubických křivek jdoucích body (σ) a diagonálnými vrcholy (γ_i).

Abychom vztahy tyto blíže vyšetřili, vezměme na příklad v úvahu samodružný bod $S_1^{(1)}$ transformace T_1 ležící na přímce $p_{1,14} \equiv \gamma_1\sigma_1\sigma_4$. Křivka K_γ^3 jdoucí tímto bodem skládá se nutně z přímky $p_{1,14}$ a kuželosečky $K_{1,14}^2$, která musí procházeti zbývajícími body base, tedy body γ_2, γ_3, σ_2, σ_3, α, β. Křivka K_γ^3 jest transformacemi grupy G_4 reprodukována. Vskutku převádí jak transformace T_2 tak i T_3 přímku $\overline{\gamma_1\sigma_1\sigma_4}$ v kuželosečku jdoucí uvedenými šesti body, tedy v křivku $K_{1,14}^2$. Samodružný bod $S_1^{(1)}$ přímky $p_{1,14}$ převádí transformace T_2 i T_3 v bod $S_2^{(1)}$ ležící na $K_{1,14}^2$. Přímka $p_{1,14}$ jest samodružnou v transformaci T_1; kuželosečka $K_{1,14}^2$ musí tudíž býti touto transformací reprodukována, takže na ní vzniká bodová involuce, jejíž dvojné body jsou samodružnými body transformace T_1. Samodružná přímka $p_{1,23} \equiv \overline{\gamma_1\sigma_2\sigma_3}$ transformace T_1 seče $K_{1,14}^2$ v bodech σ_2, σ_3, které si navzájem v T_1 odpovídají; leží tedy ony dva dvojné body nutně na samodružné přímce $p_{1,14}$. Protíná tedy $K_{1,14}^2$ přímku $p_{1,14}$ ve dvou samodružných bodech $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ transformace T_1 a sice v těch, které jsou transformacemi T_2 a T_3 navzájem vyměňovány. Body $S_1^{(1)}$ a $S_2^{(1)}$ tvoří jako dvojné body jednu čtveřinu bodovou grupy G_4. Totéž platí i pro další dva samodružné body $S_3^{(1)}$ a $S_4^{(1)}$ transformace T_1 ležící na přímce $p_{1,23}$. Body ty jsou opět dány jako průsečné body přímky $p_{1,23}$ s kuželosečkou $K_{1,23}^2$, která této přímce odpovídá jak transformací T_2 tak i T_3.

Ve svazku Σ_1^3 existuje 6 kubických křivek reducibilních, jež jsou vždy složeny z jedné strany p_i čtyřrohu (σ) a kuželosečky určené zbývajícími šesti body base. Dvojné body takové reducibilní křivky jsou samodružnými body té kvadratické transformace T_i grupy G_4, *jejíž*

hlavní bod γ_i leží na této straně; zbývající dvě transformace tyto dvojné body navzájem vyměňují, takže tento bodový pár zastupuje jednu čtveřinu bodovou grupy G_4.

Jak snadno se sezná, platí pro kvadratické involuce tato vlastnost: *Kvadratická involuce třídy prvé reprodukuje každou kuželosečku svazku, jehož body báse tvoří dva body hlavní a dva body samodružné, při tom však nesmí žádné tři z těchto bodů ležeti v přímce.*[14])

Všimněme si samodružných bodů $S_1^{(1)}$ a $S_2^{(1)}$ transformace T_1 ležících na přímce $p_{1,14}$ a samodružných bodů transformace T_2 ležících na $p_{2,13}$, která označena $S_1^{(2)}$ a $S_2^{(2)}$. Takové dva samodružné body jedné transformace grupy G_4 si v druhých dvou transformacích navzájem odpovídají. Kuželosečka C_1^2 (α, β, $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_1^{(2)}$) jest, vzhledem k větě právě uvedené, transformací T_1 reprodukována a prochází tudíž nutně bodem $S_2^{(2)}$; následkem toho jest též reprodukována transformací T_2 a tudíž i T_3. Křivka C_1^2 prochází tedy též dvěma samodružnými body $S_1^{(3)}$ a $S_2^{(3)}$ transformace T_3, při čemž mohou body tyto, tvoříce bodový pár v T_1 i v T_2, ležeti oba buď na přímce $p_{3,12} \equiv \overline{\gamma_3\sigma_1\sigma_2}$, nebo na $p_{3,34} \equiv \overline{\gamma_3\sigma_3\sigma_4}$. Transformace T_3 vytvoří na C_1^2 involuci bodovou, která má páry $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$; $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$, takže středem této involuce jest bod σ_1; — mohou tedy dvojné body této involuce $S_1^{(3)}$ a $S_2^{(3)}$ ležeti toliko na přímce $p_{3,34} \equiv \overline{\gamma_3\sigma_3\sigma_4}$.

Prochází tedy kuželosečka C_1^2 body α, β, dvěma samodružnými body transformace T_1 ležícími na přímce $\overline{\gamma_1\sigma_1\sigma_4}$, dvěma samodružnými body transformace T_2 ležícími na $\overline{\gamma_2\sigma_1}$ a dvěma samodružnými body třetí transformace a sice těmi, které leží na $\overline{\gamma_3\sigma_4}$.

Z týchž důvodů nalézají se body α, β, body $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ ležící na $\overline{\gamma_1\sigma_1\sigma_4}$, body $S_3^{(2)}$, $S_4^{(2)}$ ležící na $\overline{\gamma_2\sigma_4}$, a $S_3^{(3)}$, $S_4^{(3)}$ ležící na $\overline{\gamma_3\sigma_1}$, na téže kuželosečce C_2^2, která jest vůči všem transformacím grupy invariantní. Nahradíme-li posléze body $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$ bodovým párem $S_3^{(1)}$, $S_4^{(1)}$ ležícím na $p_{1,23}$, obdržíme další dvě kuželosečky C_3^2 a C_4^2 vůči grupě invariantní. *Nalézá se tudíž obecně skupina osmibodová, složená z bodů α, β, ze dvou samodružných bodů transformace T_i ležících na $\overline{\gamma_i\sigma_m\sigma_n}$, ze dvou samodružných bodů transformace T_h ležících na $\overline{\gamma_h\sigma_m}$ a ze dvou samodružných bodů třetí transformace T_k ležících na $\overline{\gamma_k\sigma_n}$, vždy na jedné kuželosečce, která jest grupou G_4 reprodukována.* Trojúhelník určený stra-

[14]) Jest to zřejmo z předchozího, na př. z vlastnosti křivky $K_{1,14}^2$. Ostatně plyne to z toho, že takový svazek kuželoseček vytíná na té samodružné přímce transformace, která neprochází žádným bodem base svazku, tutéž involuci bodovou, jaká jest na této přímce vytvořena transformací.

nami $\overline{\gamma_i\sigma_m\sigma_n}$, $\overline{\gamma_h\sigma_m}$, $\overline{\gamma_k\sigma_n}$ jest polárním trojúhelníkem této kuželosečky: vrcholy jeho, — jsou to vždy tři body ze skupiny (σ), — jsou středy involucí vytvořených na kuželosečce té transformacemi grupy.

Transformace grupy G_4 *reprodukují celkem 4 kuželosečky, z nichž každá prochází body* α, β *a má jeden trojúhelník, jehož vrcholy jsou vzaty ze skupiny* (σ), *za trojúhelník polárný.*

Vraťme se ještě ke kubickým křivkám K^3_γ svazku Σ^3_1. Přejde-li proměnný bod γ přímky $\alpha\beta$ v bod β, pak příslušná křivka K^3_β má konjugovanou čtveřinu bodovou β, γ_1, γ_2 γ_3, jejímž společným tečnovým bodem jest bod α; užijeme-li tudíž označení dříve zavedeného, jest $K^3_\beta \equiv C^3_\alpha$ Podobně jest $K^3_\alpha \equiv C^3_\beta$. *Avšak transformace grupy* G_4 *reprodukují též další tři kubické křivky* $C^3_{\gamma_1}$, $C^2_{\gamma_2}$, $C^3_{\gamma_3}$, při čemž $C^3_{\gamma i}$ značí kubickou křivku, která jest určena čtveřinou konjugovaných bodů α, β, γ_h, γ_k, jichž společným tečnovým bodem jest bod γ_i. Na křivce $C^3_{\gamma i}$ vytvoří transformace T_i grupy G_4 korespondenci $E^{(2)} \equiv E\,(\alpha, \beta)$, kdežto transformace T_h vytvoří na ní centrickou involuci $g^1_2(\gamma_k)$. *Jiné obecné kubické křivky, než křivky* K^3_γ *svazku* Σ^3_1 *a tři křivky* $C^3_{\gamma i}$, *nemohou býti transformacemi grupy* G_4 *reprodukovány.* Na eliptické kubické křivce C^3, která jest grupou G_4 reprodukována, mohou totiž transformace grupy vytvořiti buď vždy tři druhy binárně cyklických korespondencí $E^{(2)}$, anebo dvě transformace musí vytvořovati centrické involuce g^1_2 a třetí vytvořuje potom korespondenci $E^{(2)}$. která jest jejich součinem; musí tudíž býti centra těchto dvou involucí g^1_2 na křivce navzájem konjugována. Jiných možností není, neboť součin gE dává vždy centrickou involuci. Tento druhý případ vede však pro uvažovanou grupu G_4 jen ke třem křivkám $C^3_{\gamma i}$.

Grupa G_4 nemůže však reprodukovati ani žádnou nereducibilní kubickou křivku racionální. Křivka taková musila by míti svůj dvojný bod v jednom z bodů α neb β, kdežto druhým z nich by musila procházeti jednoduše. Transformace T_i vytvořovala by na ní involuci bodovou, jejíž dvojné body by byly samodružnými body transformace. Musila by tedy křivka ta procházeti jedním samodružným bodem transformace T_1, na příklad bodem $S^{(1)}_i$, a jedním bodem $S^{(2)}_h$ a mimo to těmi body $S^{(1)}_k$ a $S^{(2)}_l$ které z prvých dvou vznikají transformací T_3. Avšak tyto 4 body leží na kuželosečce procházející body α, β, takže by tato kuželosečka měla s touto kubickou křivkou $4 + 2 + 1$ společných bodů a byla by tudíž součástí její. Křivka byla by tedy reducibilní, složená z této kuželosečky invariantní vůči grupě G_4 a z přímky jdoucí bodem α neb β, jež by musila býti samodružnou přímkou všech tří transformací grupy; — taková přímka však neexistuje.

2. K transformacím grupy G_4 *přiberme nyní kvadratickou involuci* $\tau^{(2)}_{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)}$, *určenou bodovým párem* α, β. *Tato transformace reprodukuje všechny kubické křivky* K^3_{γ} *svazku* Σ^3_1, *další 3 kubické křivky* $C^3_{\gamma i}$ *jako grupa* G_4, *avšak nereprodukuje nalezené čtyři kuželosečky*. Poněvadž součin $T^{(2)}_i \tau^{(2)}$ dává kubickou perspektivní involuci $T^{(3)}_i$, která má hlavní bod kvadratický γ_i a čtyři hl. body lineární α, β, γ_h, γ_k a pro níž jest geom. místem bodů samodružných křivka $C^3_{\gamma i}$, *rozšíří se grupa* G_4 *přibráním transformace* $\tau^{(2)}$ *v grupu osmého stupně* G_8

$$1, \quad T^{(2)}_i, \ \tau^{(2)}, \ T^{(3)}_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

která obsahuje další tři kubické involuce. Transformace této grupy reprodukují všechny kubické křivky K^3_{γ} *svazku* Σ^3_1 *a další tři kubické křivky* $C^3_{\gamma i}$.

Na každé kubické křivce K^3_{γ} svazku Σ^3_1 vytvoří transformace $T^{(3)}_i$ centrické involuce $g^1_2(\gamma_i)$, transformace $\tau^{(2)}$ centrickou involuci $g^1_2(\gamma)$ o proměnném centru γ na přímce $\overline{\alpha\beta}$; body γ, γ_i jsou na křivkách K^3_{γ} navzájem konjugovány, takže součin kterýchkoli dvou těchto centrických involucí jest korespondence $E^{(2)}$ vytvořená jednou transformací grupy G_4.

Z libovolného bodu P, v rovině obecně zvoleného, vzniká grupou G_8 *skupina osmibodová, ležící na téže kubické křivce* K^3_{γ} *svazku* Σ^3_1. *Tato skupina se skládá ze čtveřiny konjugovaných bodů* P, P_1, P_2, P_3, *vytvořených z bodu P transformacemi grupy* G_4 *a ze čtveřiny bodové* P', P_1', P_2', P_3', *vytvořené z bodu P transformacemi* $\tau^{(2)}$, $T^{(3)}_1$, $T^{(3)}_2$ *a* $T^{(3)}_3$ *anebo, což totéž jest, vytvořené z bodu* P' *transformacemi* $T^{(2)}_1$, $T^{(2)}_2$, $T^{(2)}_3$. *Skupina bodová* (P') *tvoří tedy na křivce* K^3_{γ} *rovněž čtveřinu konjugovaných bodů a vzniká z konjugované čtveřiny* (P), *promítneme-li ji na křivku* K^3_{γ} *jdoucí bodem P z kteréhokoli pevného bodu* γ_1 *nebo* γ_2 *nebo* γ_3, *anebo z příslušného bodu* γ *ležícího na* $\alpha\beta$. *Čtveřiny bodové* (γ), (P) a (P') *tvoří tedy na příslušné křivce* K^3_{γ} *tak zvané skupiny conexní*. Přímky spojující kterýkoli bod skupiny jedné s kterýmkoli bodem skupiny druhé — jest jich 16 — protínají křivku K^3_{γ} toliko ve 4 bodech tvořících zbývající skupinu třetí, takže každým bodem takto vzniklým procházejí 4 takové přímky. Tím dána jest jednoduchá konstrukce bodů skupiny (P') a bodu γ, určíme-li transformacemi grupy G_4 z bodu P skupinu bodovou (P). Spojnice $\overline{\gamma_i P_i}$ sečou se v bodě P', načež bod γ jest průsečík přímky $\alpha\beta$ se spojnicí $\overline{PP'}$. Spojnice $\overline{\gamma_h P_k}$, $\overline{\gamma_k P_h}$, $\overline{\gamma_i P}$ a $\overline{\gamma P_i}$ se sbíhají v bodě P'_i.

Tyto skupiny osmibodové $[(P), (P')]$ vytvořené z bodu P grupou G_8 *mohou se ve zvláštních případech redukovati ve skupiny nižší a sice především ve skupiny čtyřbodové*, neboť na každé kubické křivce K^3_{γ} existují čtyři čtyřbodvé skupiny (P), které se stotožňují s příslušnou sku-

pinou (P'). *Jest to především pevná skupina bodová* (σ), *jejímž tečnovým bodem pro křivku* K^3_γ *jest příslušný bod* γ a jež tvoří na této křivce dvojné body centrické involuce $g^1_2\,(\gamma)$; pro tuto skupinu jest $(\sigma') \equiv (\sigma)$; involuce $T^{(3)}_i$ reprodukují skupinu (σ). *Dále jsou to analogicky tři další s křivkou* K^3_γ *proměnné čtyřbodové skupiny* $(\varrho^{(i)}, \varrho^{(i)}_1, \varrho^{(i)}_2, \varrho^{(i)}_3)$, t. j. dvojné body centrických involucí $g^1_2\ \gamma_i)$; $i = 1, 2, 3$. *Jest ihned zřejmo, že geom. místem těchto, s křivkou* K^3_γ *proměnných skupin* $(\varrho^{(i)})$ *jsou tři kubické křivky* $C^3_{\gamma i}$. Na kubické křivce $C^3_{\gamma i}$, jež jest g. m. samodružných bodů transformace T^3_i, vytvoří totiž transformace $T^{(2)}_i$ a $\tau^{(2)}$ tutéž korespondenci $E^{(2)} \equiv E\,(\alpha\beta) \equiv E\,(\gamma_h \gamma_k)$, kdežto transformace $T^{(2)}_h$ a $T^{(3)}_k$ vytvoří na ní involuci $g^1_2(\gamma_k)$ a transformace $T^{(2)}_k$ a $T^{(3)}_h$ involuci $g^1_2\,(\gamma_h)$. Z libovolného bodu křivky $C^3_{\gamma i}$ vytvoří grupa G_8 toliko skupinu čtyřbodovou, složenou ze dvou bodových párů téže binárně cyklické korespondence $E^{(2)}$ křivky $C^3_{\gamma i}$; každý bod její jest tedy považovati za dvojný. *Tři kubické křivky* $C^3_{\gamma i}$ *protínají každou kubickou křivku* K^3_γ *svazku* Σ^3_1 *ve třech příslušných konjugovaných čtveřinách* $(\varrho^{(i)})$ *jež zastupují celé skupiny osmibodové.*

Posléze jest zřejmo, že z každého samodružného bodu transformace $T^{(2)}_i$ vytvoří grupa G_8 *toliko skupiny dvojbodové, složené z těch dvou samodružných bodů této transformace, jichž spojnice prochází bodem* γ_i. *Grupa* G_8 *má tedy 6 skupin dvojbodových,* které zastupují skupiny osmibodové a jsou tedy složeny z bodů čtyřnásobných. Tak na př. samodružný bod $S^{(i)}_1$ transformace $T^{(2)}_i$ vede k jedinému dalšímu bodu $S^{(i)}_2$ ležícímu na přímce $\overline{\gamma_i S^{(i)}_1}$. Bod $S^{(i)}_1$ přivádí totiž každá z transformací $T^{(2)}_h$, $T^{(2)}_k$, $\tau^{(2)}$, $T^{(3)}_i$ v bod $S^{(i)}_2$, kdežto transformace $T^{(2)}_i$, $T^{(3)}_h$, $T^{(3)}_k$ mají bod ten za samodružný; vskutku procházejí, jak z předchozího zřejmo, křivky $C^3_{\gamma h}$ a $C^3_{\gamma k}$ samodružnými body involuce $T^{(2)}_i$.

3. Přibereme-li k transformacím grupy G_8 další kvadratickou involuci, na př. involuci $T^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ určenou bodovým párem β, γ, rozšíří se grupa G_8 v grupu G_{16}, která jest charakterisována známým způsobem skupinou bodovou α, β, γ_1, γ_2, γ_3. Transformace grupy G_{16} reprodukují toliko 5 nalezených kubických křivek C^3_α, C^3_β, $C^3_{\gamma i}$. Ve svazku Σ^3_1 křivek K^3_γ vytvoří transformace grupy G_{16} involuci J^1_2, která má za samodružné elementy křivky C^3_α a C^3_β.

Z libovolného bodu P, v rovině obecně zvoleného, vytvoří grupa G_{16} *skupiny šestnáctibodové, které se skládají ze dvou osmibodových skupin grupy* G_8, *jež jsou vždy položeny na dvou kubických křivkách* K^3_γ *svazku* Σ^3_1 *v involuci* J^1_2 *si odpovídajících. Poněvadž grupa* G_{16} *obsahuje 10 podgrup* G_8, *neboť každá strana základního pětirohu vede k jedné takové podgrupě, jest možno toto rozdělení provésti desíti způsoby. Toliko v případě, kdy nalézá se zvolený bod P na některé z pěti základních kubických*

křivek, redukují se tyto skupiny 16bodové ve skupiny osmibodové, složené ze dvou konjugovaných čtveřin této křivky, takže každý bod ten jest považovati za dvojnásobný. Avšak i další redukce, a sice ve skupiny čtyřbodové, jsou možné. *Čtveřiny průsečných bodů každých dvou základních kubických křivek, ležící mimo bási základních pěti bodů — takových čtveřin jest 10 a jsou to vždy samodružné body jedné kvadratické involuce grupy G_{16} — jsou vůči celé grupě G_{16} invariantní a zastupují tudíž skupiny 16bodvé,* takže každý bod této čtveřiny jest vlastně bodem čtyřnásobným.

Jak na křivce C^3_α tak i na C^3_β vytvoří totiž grupa G_8 skupiny osmibodové složené ze dvou konjugovaných čtveřin, které jsou vůči celé grupě G_{16}, jak čtenář snadno zjistí, invariantní. Na křivce C^3_α jsou vždy tyto osmibodové skupiny složeny ze dvou konjugovaných čtveřin conexních ke skupině $(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, na křivce C^3_β jsou tyto čtveřiny conexní ke skupině $(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Naproti tomu na křivce $C^3_{\gamma_i}$ vytvoří grupa G_8 toliko skupiny čtyřbodové, složené ze dvou párů bodových téže korespondence $E^{(2)}$, (α, β), načež grupa G_{16} tyto dva bodové páry doplní na dvě čtveřiny konjugované, conexní ke skupině $(\alpha, \beta, \gamma_h, \gamma_k)$. Odtud jest ihned zřejmo, že každá čtveřina průsečných bodů kterýchkoli dvou základních kubických křivek jest invariantní vůči celé grupě G_{16}.

4. *Grupa G_8 obsahuje vedle podgrupy G_4 ještě tři další podgrupy čtvrtého stupně G_4, z nichž každá jest složena z jedné kubické a dvou kvadratických involucí, a mimo to 3 podgrupy Q_4, složené ze dvou kubických a jedné kvadratické involuce.*

Vraťme se k symetrickému označení, jak bylo zavedeno ve čl. IV., odst. 3., a všimněme si jedné takové grupy G_4 složené z transformací $1, T^{(3)}_i, T^{(2)}_{hk}, T^{(2)}_{lm}$. Na obecné kubické křivce K^3, která jest transformacemi této grupy reprodukována, vytvoří transformace $T^{(2)}_i$ centrickou involuci $g^1_2(A_i$ takže jedna ze zbývajících kvadratických transformací musí na této křivce vytvořiti opět centrickou involuci, jejíž střed musí býti k bodu A_i konjugován, kdežto druhá vytvoří korespondenci $E^{(2)}$. Výjimku činí toliko křivka $C^3_{\gamma_i}$ na níž vytvoří $T^{(3)}_i$ identitu a obě kvadratické involuce tutéž korespondenci $E^{(2)}$.

Transformace grupy G_4 reprodukují tudíž dva svazky kubických křivek, a sice svazek kubických křivek $\Sigma^3_{\underset{hk}{1}}$, který přísluší ke straně $\overline{A_h A_k}$ základního pětirohu a jehož bási tvoří vedle základních pěti bodů (A) čtyři samodružné body transformace $T^{(2)}_{hk}$ a mimo to svazek $\Sigma^3_{\underset{lm}{1}}$, který přísluší analogicky ke straně $\overline{A_l A_m}$ a jehož báse obsahuje čtveřinu samodružných bodů transformace $T^{(2)}_{lm}$.

Odtud jest zároveň ihned zřejmo, že *každá grupa* G_8, na př. grupa G^8_i složená z transformace $T^{(3)}_i$ a těch šesti kvadratických involucí grupy G_{16}, které na křivce C^3_i vytvořují korespondence binárně cyklické druhého druhu, *má tu vlastnost, že transformace její reprodukují toliko pět základních kubických křivek a žádnou jinou další.*

Všimněme si ještě skupin bodových grupy G_4 a G_8; aby naše úvahy mohly býti konkrétní, mějme na mysli zase grupy složené z právě vytčených involucí. Z libovolného bodu P_1, v rovině obecně zvoleného, vytvoří grupa G_4 svými transformacemi $T^{(3)}_i$, $T^{(2)}_{lm}$ a $T^{(2)}_{hk}$ body, které označme P_2, P_3 a P_4. Pak se spojnice $\overline{P_1P_2}$ a $\overline{P_3P_4}$ nutně sbíhají v bodě A_i. Bodem P_1 prochází jedna křivka svazku $\sum\limits_{hk}{}^3_1$, značme ji K^3_γ a jedna křivka svazku $\sum\limits_{lm}{}^3_1$, kterou označme L^3_δ. *Obě tyto křivky protínají se nutně ve čtveřině bodové* (P). Z úvah odstavce 1. a 2. jest nyní zřejmo, že na křivce K^3_γ tvoří body P_1, P_3 a P_2, P_4 bodové páry téže korespondence $E^{(2)}$, jež jest na této křivce vytvořena transformací $T^{(2)}_{lm}$ takže se spojnice $\overline{P_1P_4}$ *a* $\overline{P_2P_3}$ protínají na křivce K^3_γ a sice v bodě jejím γ, který leží na přímce $\overline{A_h A_k}$. Podobně tvoří body P_1, P_4 a P_2, P_3 na křivce L^3_δ bodové páry téže korespondence $E^{(2)}$ a spojnice $\overline{P_1P_3}$ a $\overline{P_2P_4}$ se protínají na této křivce v jejím bodě δ, který leží na $\overline{A_l A_m}$. *Body* A_i, γ, δ *tvoří tedy diagonálný trojúhelník čtyřrohu* (P); křivka K^3_γ neprochází ovšem bodem δ a právě tak neleží bod γ na křivce L^3_δ. *Jen tehdy a jen tehdy, nalézá-li se vytknutý bod* P_1 *na křivce* C^3_i, *zredukuje se čtveřina bodová* (P) *grupy* G_4 *v bodový pár a sice v bodový pár korespondence* $E^{(2)}$.

Grupa G^i_8 vzniká z grupy G_4 přibráním jedné další kvadratické involuce, na příklad přibráním involuce $T^{(2)}_{km}$. Symbolický součin $T^{(2)}_{km}\, G_4$ značí tedy »vedlejší grupu« k podgrupě G_4 a skládá se ze čtyř dalších kvadratických involucí grupy G_8; značme tuto skupinu transformací stručně znakem V. Ve svazku kubických křivek $\sum\limits_{hk}{}^3_1$ vytvořují všechny transformace skupiny V tutéž involuci I^1_2, která má za samodružné elementy křivky C^3_h a C^3_k. Podobně vytvoří transformace skupiny V tutéž involuci J^1_2 ve svazku $\sum\limits_{lm}{}^3_1$; samodružné elementy této involuce jsou křivky C^3_l a C^3_m.

Z libovolného bodu P_1 v rovině obecně zvoleného vytvoří tedy grupa G^i_8 skupinu osmibodovou, složenou ze čtveřiny (P) a ze čtveřiny P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, při čemž tato čtveřina (P') vzniká ze skupiny (P) kteroukoli transformací skupiny V. Skupina (P') může býti vytvořena z kteréhokoli svého bodu, na př. z bodu P'_1, užitím všech transformací grupy G_4. Čtveřina bodová (P') nalézá se tudíž na dvou kubických křivkách K'^3 a L'^3

svazku $\sum_{hk\,1}^{3}$ resp. $\sum_{lm\,1}^{3}$, a sice těch, které prvým dvěma odpovídají v involuci I_2^1 resp. J_2^1; má tedy tytéž vlastnosti co čtveřina (P). Každá osmibodová skupina grupy G_8 skládá se tudíž ze dvou k sobě přidružených čtveřin bodových podgrupy G_4, a toto rozdělení lze v této skupině osmibodové provésti celkem třemi způsoby, z nichž každý odpovídá jedné ze tří podgrup G_4 grupy G_8.

Toliko v případě, že bod P_1 nalézá se na křivce C_i^3, zredukuje se skupina osmibodová grupy G_8^i ve čtveřinu bodovou, a sice ve čtveřinu konjugovaných bodů této křivky. Na každé jiné základní křivce, na př. na C_h^3, vytvoří grupa G_8^i skupinu osmibodovou, jež vzniká ze čtveřiny bodové kterékoli její podgrupy G_4 doplněním na dvě čtveřiny konjugované.

Grupa G_8^i obsahuje též čtyři podgrupy G_4 odpovídající čtyřem stranám $\overline{A_i\, A_h}$, kde i jest pevné a h se mění. Lze tedy každou osmibodovou skupinu grupy G_8 rozděliti ve dvě čtveřiny bodové grupy G_4 a sice čtverým způsobem. Že lze podobně rozděliti šestnáctibodové skupiny grupy G_{16} ve dvě skupiny osmibodové grupy G_8, a sice pěti způsoby, jest evidentní.

Všimněme si ještě pěti základních kub. křivek grupy G_{16}. *Každé dvě z těchto křivek určují svazek kubických křivek — takových svazků jest 10 — a každý tento svazek jest složen z křivek invariantních vůči všem transformacím jedné podgrupy* G_8; všechny zbývající transformace vytvořují ve svazku tom tutéž involuci. Tak jest na př. svazek určený křivkami C_i^3 a C_m^3 složen z křivek invariantních vůči grupě G_8^{im}, jež patří ke straně $\overline{A_i\, A_m}$. Každá podgrupa G_4 jest obsažena jen v jedné grupě G_8 a reprodukuje tudíž kub. křivky jen jednoho svazku, ke křivkám základním nepřihlížeje. Naproti tomu jest podgrupa G_4 obsažena ve dvou grupách G_8 a reprodukuje tedy křivky dvou takových svazků.

5. Zbývá nám tudíž ještě úkol vyšetřiti, které kubické křivky jsou reprodukovány podgrupou Q_4.

Za tím účelem vezměme v úvahu grupu Q_4^{ih}, složenou z transformací $T_i^{(3)}$, $T_h^{(3)}$, $T_{ih}^{(2)}$ a z identity. Na kubických křivkách C_i^3 a C_h, které se protínají v samodružných bodech transformace $T_{ih}^{(2)}$, vytvořuje transformace $T_i^{(3)}$ resp. $T_h^{(3)}$ identitu, kdežto zbývající dvě transformace grupy vytvoří na každé z nich tutéž centrickou involuci, a sice involuci $g_2^1(A_h)$ na křivce C_i^3 a involuci $g_2^1(A_i)$ na C_h^3. Na každé jiné obecné kubické křivce K^3, která jest transformacemi grupy Q_4^{ih} reprodukována, vytvoří obě kubické transformace centrické involuce $g_2^1(A_i)$ a $g_2^1(A_h)$, takže transformace $T_{ih}^{(2)}$ musí na ní vytvořiti korespondenci $E^{(2)} \equiv E\,(A_i, A_h)$.

Kvadratická rovinná involuce třídy prvé $T^{(2)}$ reprodukuje, jak jsme seznali (viz čl. I., kap. 1. a 2.), každou kubickou křivku, která prochází hlavními body transformace a třemi *obecnými* bodovými páry této involuce, při čemž vytvořuje tato rovinná involuce na této křivce binárně cyklickou korespondenci $E^{(2)}$. *Kvadratická rovinná involuce třídy prvé reprodukuje tudiž každou kubickou křivku jistého lineárního systému o třech dimensích, čili jistého komplexu kubických křivek.*[15])

V komplexu kubických křivek, které jsou reprodukovány transformací $T^{(2)}_{ih}$ vytkněme ty křivky, které procházejí bodem A_i a tudíž i bodem A_h, který prvému odpovídá v transformaci $T^{(2)}_{ih}$. Tyto kubické křivky tvoří síť, kterou označme stručně S^3_2. Křivky sítě S^3_2, které procházejí obecně zvoleným bodem P_1 a tudíž i bodem P'_1, který bodu P_1 odpovídá v involuci $T^{(2)}_{ih}$ tvoří svazek, jehož další dva body báse jsou zřejmě body X_1 a X'_1, při čemž jest (viz čl. I., kap. 1. a 2.)

$$X_1 \equiv (\overline{A_i P_1} \cdot \overline{A_h P'_1}),\ X'_1 \equiv (\overline{A_i P'_1} \cdot \overline{A_h P_1}).$$

Každá křivka tohoto svazku jest transformací $T^{(2)}_{ih}$ reprodukována. Libovolným bodem M_1, na křivce C^3_i zvoleným, prochází tudíž jediná křivka K^3 tohoto svazku, která musí tudíž procházeti korespondenčním bodem M'_1, jenž odpovídá na C^3_i bodu M_1 v centrické involuci $g^1_2(A_h)$ vytvořené na C^3_i transformací $T^{(2)}_{ih}$. Tato křivka K^3 protíná však křivku C^3_i ještě v dalších dvou bodech M_2, M_2', které musí opět z týchž důvodů tvořiti bodový pár involuce $g^1_2(A_h)$. Body M_1, M'_1, a M_2, M'_2 si tudíž též navzájem odpovídají v transformaci $T^{(3)}_h$. Převádí tedy transformace $T^{(3)}_h$ křivku K^3 opět v kubickou křivku procházející týmiž devíti body báse, t. j. pěti body (A) a čtyřmi body (M), a ježto seče křivka K^3 křivku C^3_h ve čtyřech dalších bodech, které jsou v transformaci $T^{(3)}_h$ samodružnými, jest křivka K^3 transformací $T^{(3)}_h$ reprodukována. Poněvadž jest $T^{(3)}_i \equiv T^{(2)}_{ih} \cdot T^{(3)}_h$ jest křivka K^3 reprodukována též transformací $T^{(3)}_i$. Ostatně dospějeme k tomuto výsledku přímo analogicky, nahradíme-li v předchozí úvaze křivku C^3_i křivkou C^3_h. *Jest tedy každá křivka sítě S^3_2 všemi transformacemi grupy Q^{ih}_4 reprodukována. V síti této nalézají se zřejmě tři zbývající základní kubické křivky C^3_k, C^3_l, C^3_m; a opačně jest těmito třemi kubickými křivkami síť tato definována.*

Všimněme si ještě svazku kubických křivek, jenž jest určen křivkou C^3_i a svrchu vytčenou křivkou K^3 sítě S^3_2. Především jest zřejmo, že každá křivka tohoto svazku jest reprodukována transformací $T^{(3)}_h$; — vytvoří tudíž v tomto svazku transformace $T^{(2)}_{ih}$ a involuce $T^{(3)}_i$, tutéž involuci, jež

[15]) Studiem vlastností lineárních systémů křivek kubických, bikvadratických a některých jiných, jež jsou složeny z křivek invariantních vůči dané kvadratické rovinné involuci třídy prvé, míním se zabývati ve zvláštní práci.

má za samodružné elementy křivky C_i^3 a K^3; *žádná jiná křivka tohoto svazku není transformacemi* $T_i^{(3)}$ a $T_{ih}^{(2)}$ *reprodukována.*

Naproti tomu ve svazku kubických křivek, jenž jest určen křivkami C_i^3 a C_h^3, jest každá křivka reprodukována involucí $T_{ih}^{(2)}$ — tato transformace vytvoří na každé křivce tohoto svazku centrickou involuci — kdežto obě kubické involuce $T_i^{(3)}$ a $T_h^{(3)}$ vytvoří ve svazku tom tutéž involuci, která má za samodružné elementy křivky C_i^3 a C_h^3; *žádná jiná křivka tohoto svazku není kubickými involucemi grupy* Q_4^{ih} *reprodukována.* Máme tedy výsledek:

Grupa Q_4^{ih} *reprodukuje vedle základních dvou kubických křivek* C_i^3 *a* C_h^3 *ještě každou kubickou křivku jisté sítě, jež jest dokonale určena kvadratickou involucí grupy, anebo, což totéž jest, zbývajícími třemi základními křivkami* C_k^3, C_l^3, C_m^3. *Křivky* C_i^3 a C_h^3 *do této sítě nenáleží.*

O pěti základních kubických křivkách grupy G_{16} můžeme tedy vysloviti další vlastnost. *Každé tři z těchto křivek určují síť, jež se skládá z kubických křivek, které jsou reprodukovány transformacemi jedné podgrupy* Q_4; takových sítí a k nim patřících podgrup Q_4 jest ovšem deset. Ke každé podgrupě Q_4 jest takto přiřazena jedna podgrupa G_8 a sice ta, která reprodukuje křivky svazku určeného zbývajícími dvěma křivkami základními. Tak na př. jest k podgrupě Q_4^{ih} přiřazena podgrupa $\mathbf{G}_8^{ih}$, jež reprodukuje křivky svazku $[C_i^3, C_h^3]$.

Jak svrchu jsme seznali, reprodukuje daná kvadratická rovinná involuce třídy prvé obecné kubické křivky dvojího druhu; na křivkách prvého druhu — křivky ty tvoří lineární komplex — vytvořuje involutorní korespondence druhého druhu $E^{(2)}$ a na křivkách druhého druhu — křivky ty tvoří, jak snadno se z předchozího sezná, síť — vytvořuje centrální involuce g_2^1. Síť ta je určena třemi hlavními body transformace a čtveřinou bodů samodružných, Skupina pěti základních kub. křivek grupy G_{16} má tedy tu vlastnost, že libovolné tři z nich patří do komplexu a zbývající dvě patří do sítě kub. křivek, reprodukovaných jednou kvadratickou involucí grupy G_{16}.

Všimněme si posléze skupin bodových grupy Q_4^{ih}. *Z libovolného bodu* P_1 *vytvoří grupa ta čtveřinu bodovou, jež se skládá ze svrchu vytčených bodů* P_1, P_1', X_1, X_1'. *Toliko v tom případě, že bod* P_1 *se nalézá na křivce* C_i^3 *nebo* C_h^3, *zredukje se tato čtveřina v bodový pár. Je-li bod* P_1 *jedním ze čtyř mimo bási (A) ležících průsečných bodů těchto dvou křivek, pak jest samodružným bodem všech transformací grupy* Q_4^{ih} *a čtveřina bodová k němu příslušící se redukuje toliko v jediný bod.*

VI. Lineární systémy Σ_r^{6n} křivek stupně $6n$ invariantních vzhledem ke grupě G_{16}.

Všimněme si nyní blíže pěti základních kub. křivek (C). Seznali jsme, že každé tři z nich, na př. C_k, C_l, C_m, určují síť $\Sigma_{2\,ih}^{3}$, která se skládá z kub. křivek, jež jsou reprodukovány transformacemi podgrupy Q_4^{ih}, složené z identity a involucí $T_i^{(3)}$, $T_h^{(3)}$ a $T_{ih}^{(2)}$.

Na kub. křivce C_i zvolme nyní libovolně bod P_1; jemu přiřazuje podgrupa Q_4^{ih} jediný další bod P_2 téže křivky, při čemž body A_h, P_1, P_2 leží v přímce. Kub. křivky sítě $\Sigma_{2\,ih}^{3}$ procházející bodem P_1 tvoří svazek $\Sigma_{1\,ih}^{3}(P_1)$ a procházejí též bodem P_2. Poněvadž všechny křivky tohoto svazku jsou reprodukovány kubickou perspektivní transformací $T_i^{(3)}$, která má křivku C_i za g. m. bodů samodružných, dotýkají se přímky $\overline{A_i P_1}$ a $\overline{A_i P_2}$ v bodech P_1 resp. P_2 všech křivek svazku $\Sigma_{1\,ih}^{3}(P_1)$. Poněvadž bod P_1 byl na křivce C_i zvolen libovolně, jest kub. křivka C_i součástí Jacobianu sítě $\Sigma_{2\,ih}^{3}$; totéž ovšem platí též o křivce C_h. Ve svazku $\Sigma_{1\,ih}^{3}(P_1)$ nalézá se vskutku jedna kub. křivka, která má v bodě P_1 a rovněž v P_2 bod dvojný. Jest to kub. křivka složená z přímky $\overline{A_h P_1 P_2}$, invariantní vzhledem k $T_h^{(3)}$, a z kuželosečky $(A_i A_k A_l A_m P_1 P_2)$, která jest invariantní též vzhledem k $T_h^{(3)}$ a odpovídá oné přímce transformací $T_{ih}^{(2)}$.

Základní kub. křivky $C_1, C_2, \ldots C_5$, charakterisující grupu G_{16}, jsou tudíž tím význačny, že kterékoliv dvě z nich tvoří Jacobian sítě kub. křivek určené zbývajícími třemi.

Vezměme nyní v úvahu svazek kub. křivek, který jest určen dvěma křivkami skupiny (C), a jehož báse skládá se z bodů (A) a ze čtveřiny samodružných bodů jedné kvadratické transformace grupy. Křivky tohoto svazku jsou vždy reprodukovány transformacemi jedné podgrupy G_8, kdežto zbývající transformace grupy G_{16} vytvořují ve svazku tom tutéž involuci, jež má za samodružné elementy ony dvě kub. křivky skupiny (C), které svazek definují. Tak jest na př. svazek $\Sigma_{1\;1,2}^{3}$, určený křivkami C_1 a C_2, složen z křivek invariantních k podgrupě $G_8^{(1,2)}$ kdežto zbývající transformace grupy G_{16} vytvořují ve svazku tom involuci o samodružných elementech C_1 a C_2. Značí-li $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_5$ kubické ternární formy, jež anulovány vyjadřují kubické křivky skupiny (C), můžeme involuci, takto ve svazku $|C_1, C_2|$ vzniklou, analyticky vyjádřiti relacemi

$$\varphi_1 - \xi\varphi_2 = 0, \qquad \xi^2 = \lambda,$$

takže páry elementů této involuce tvoří svazek

$$1. \quad \varphi_1^2 - \lambda\, \varphi_2^2 = 0,$$

složený z reducibilních křivek šestého stupně, které jsou invariantní ke grupě G_{16}. Podobně vede svazek kub. křivek $[C_1, C_3]$ k jisté involuci a páry elementů této dávají svazek

$$2. \quad \varphi_1^2 - \mu\, \varphi_3^2 = 0$$

téhož druhu. Poněvadž libovolná křivka svazku 1) seče nutně kteroukoliv proměnnou křivku svazku 2) v proměnné šestnáctibodové skupině invariantní vzhledem ke grupě G_{16}, jest každá křivka vytvořená každým projektivním vztahem

$$3. \quad a\,\lambda\,\mu + b\,\mu + c\,\lambda + d = 0$$

svazků 1) a 2) reprodukována všemi transformacemi grupy G_{16}. Výtvorem tím jest *obecně* křivka 12. stupně

$$4 \quad a\,\varphi_1^4 + b\,\varphi_1^2\,\varphi_2^2 + c\,\varphi_1^2\,\varphi_3^2 + d\,\varphi_2^2\,\varphi_3^2 = 0,$$

která má v bodech $A_1, \ldots A_5$ body čtyřnásobné a v samodružných bodech transformace $T_{1,2}^{(2)}$ a $T_{1,3}^{(2)}$, — t. j. v dalších dvojných bodech base svazku 1) resp. 2) — body dvojnásobné.

Relací 4) dán jest tedy jistý lineární komplex složený z křivek 12. stupně, které mají společných 5 bodů čtyřnásobných a osm bodů dvojných, a jež jsou reprodukovány transformacemi grupy G_{16}. Komplex tento není ovšem nejobecnějším lineárním systémem křivek 12. stupně invariantních vůči grupě G_{16}, neboť jest zřejmo, že každé jiné dva svazky $[C_i, C_h]$ vedou ke komplexům analogickým. Dříve, než se budeme touto otázkou zabývati, učiňme v projektivním vztahu 3) konstantu $d = 0$, t. j. dvojnásobně vzatou kub. křivku C_1 svazku 1) přiřaďme téže křivce svazku 2). Pak projektivností tou vytvořená křivka 4) skládá se z dvojnásobně vzaté křivky C_1 a z křivky 6. stupně

$$5. \quad a\,\varphi_1^2 + b\,\varphi_2^2 + c\,\varphi_3^2 = 0,$$

která má v bodech $A_1, A_2, \ldots A_5$ body dvojnásobné.

Grupa G_{16} reprodukuje tudíž ∞^2 křivek 6. stupně o společných pěti bodech dvojných $A_1, \ldots A_5$, jež tvoří síť Σ_2^6 danou relací 5).

Dvěma body P, Q, v rovině obecně zvolenými, prochází jediná křivka této sítě, která ovšem obsahuje šestnáctibodové skupiny (P) a (Q) z obou těchto bodů vytvořené grupou G_{16}. Konstrukce této křivky jest zřejmá: křivky svazků 1) a 2), procházející bodem P resp. Q si navzájem odpovídají a jimi jest dokonale určena projektivnost těchto svazků, křivku vytvořující.

Síť 5) jest nejobecnějším lineárním systémem křivek 6. stupně invariantních ke grupě G_{16}. Jest to zřejmo bezprostředně, neboť dvěma

šestnáctibodovými skupinami (P) a (Q) grupy G_{16} nemohou procházeti dvě různé křivky 6. stupně o pěti dvojných bodech $A_1, \ldots A_5$. Vedou tedy nutně každé dva jiné svazky (C_i, C_h) a (C_i, C_k) k téže síti Σ_2^6 **dané** relací 5). Nalézají se tudíž v této síti nejen kubické křivky C_1, C_2 a C_3 dvojnásobně vzaté, jak zřejmo z rovnice 5), ale i zbývající dvě křivky C_4 a C_5 vzaté dvojnásobně. Existují tedy vždy konstanty α, β, γ takové, že jest

$$\varphi_l^2 \equiv \alpha\, \varphi_i^2 + \beta\, \varphi_h^2 + \gamma\, \varphi_k^2.$$

Že křivka C_4 dvojnásob vzatá nalézá se v síti 5), plyne ostatně bezprostředně již z toho, že křivky (páry kub. křivek) svazků 1) a 2) vytínající na C_4 tutéž involuci g_8^1 složenou ze skupin osmibodových grupy G_{16}, při čemž takové dvě křivky těchto dvou svazků, které procházejí toutéž skupinou (P) této involuce, se v bodech této skupiny navzájem dotýkají, majíce tam za společné tečny spojnice $\overline{A_4P}$; — každá kubická křivka, jež jest součástí křivek svazků 1) a 2), jest totiž invariantní k transformaci $T_4^{(3)}$. Involuce g_8^1 vytvořená grupou G_{16} na křivce C_4 definuje též jedno projektivní přiřazení svazků 1) a 2). Totéž platí ovšem i pro křivku C_5.

Bodem P, v rovině *obecně* zvoleným, prochází svazek křivek obsažený v síti Σ_2^6; značme ho znakem Σ_1^6 (P). Base tohoto svazku obsahuje šestnáctibodovou skupinu (P) grupy G_{16}. Je-li bod P samodružným bodem jedné kvadratické transformace grupy G_{16}, na př. $T_{ih}^{(2)}$, pak skupina (P) přejde ve *čtveřinu* samodružných bodů této transformace a příslušný svazek $\Sigma_6^1(P)$ má rovnici

$$\varphi_i^2 - \lambda\, \varphi_h^2 = 0$$

a skládá se z párů kub. křivek. V síti Σ_2^6 jest 10 takových svazků. V každém *obecném* svazku Σ_1^6 (P) nalézá se tudíž 10 křivek reducibilních, složených ze dvou kub. křivek. Každá křivka sítě Σ_2^6, která prochází *čtyřbodovou* skupinou grupy G_{16}, — těchto skupin jest 10, — má v bodech této skupiny body dvojné a jest složená ze dvou kub. křivek.

Zvolíme-li bod P na některé ze základních kub. křivek skupiny (C), na př. na C_i, pak skupina (P) jest osmibodová a příslušný svazek Σ_1^6 (P) se skládá z křivek, které se v bodech skupiny (P) navzájem dotýkají, majíce tam za společné tečny přímky jdoucí bodem A_i, středem kubické perspektivní involuce $T_i^{(3)}$, která má křivku C_i za g. m. bodů samodružných. Kubická křivka C_i jest tedy součástí Jacobianu sítě Σ_2^6, kterým jest křivka 15. stupně, mající v bodech skupiny (A) body pětinásobné. Jacobian ten skládá se tedy z pěti základních kub. křivek $C_1, C_2, \ldots C_5$.

Plyne to ostatně přímo též analyticky. Jacobian sítě 5) dán jest relací

$$J \equiv \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

kde anulovaný determinant značí Jacobian sítě kub. křivek

$$a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 + c\,\varphi_3 = 0,$$

o němž jsme svrchu dokázali, že jest složen z křivek C_4 a C_5.

Všimněme si ještě té okolnosti, že žádná nereducibilní křivka sítě Σ_2^6 nemá jiných dvojných bodů, než pět bodů skupiny (A). Takový dvojný bod musil by ležeti na Jacobianu, takže křivka by se nutně skládala buď z dvojnásobně vzaté jedné kubické křivky skupiny (C), anebo ze dvou kub. křivek jednoho svazku $[C_i, C_h]$. Máme tedy výsledek:

Grupa G_{16} reprodukuje ∞^2 křivek šestého stupně o společných pěti bodech dvojnásobných $A_1, A_2, \ldots A_5$, které tvoří síť Σ_2^6 danou relací 5). Jacobian této sítě skládá se z pěti základních kub. křivek $C_1, C_2, \ldots C_5$. Každá z těchto pěti kub. křivek vzata dvojnásobně patří do sítě. Každá křivka sítě, která prochází **čtyřbodovou** *skupinou grupy G_{16}, má v bodech této skupiny body dvojné a jest složená ze dvou kubických křivek. V síti jest 10 svazků, které se skládají vesměs z reducibilních křivek tohoto druhu. Síť Σ_2^6 neobsahuje jiných reducibilních křivek, nežli křivky těchto svazků; každá jiná křivka sítě jest rodu 5.*

Vraťme se k úloze určiti *všechny* křivky 12. stupně, které jsou reprodukovány transformacemi grupy G_{16}. Dospějeme k nim způsobem analogickým k předchozímu. V rovině zvolme zcela libovolně pět bodů P, Q, M^1, M^2, M^3 a přiřaďme projektivně svazek $\Sigma_1^6(P)$ ke svazku $\Sigma_1^6(Q)$ a sice tak, že křivky obou svazků jdoucí bodem M^i si navzájem odpovídají. Tím jest projektivní vztah právě určen $(i = 1, 2, 3)$ a vzniká tak obecně křivka 12. stupně, mající pět bodů čtyřnásobných $A_1, A_2, \ldots A_5$, která prochází pěti šestnáctibodovými skupinami (P), (Q), (M^1), (M^2), (M^3) grupy G_{16} a jest k této grupě invariantní.

Pěti body v rovině obecně položenými prochází tudíž obecně jediná křivka 12. stupně invariantní ke grupě G_{16}. Transformace grupy G_{16} reprodukují tudíž ∞^5 křivek 12. stupně, které mají společných pět bodů čtyřnásobných $A_1, A_2, \ldots A_5$ a tvoří lineární systém pětirozměrný Σ_5^{12}.

Je-li bod M^1 samodružným bodem jedné kvadratické transformace grupy G_{16}, pak příslušná skupina (M^1) jest čtyřbodová a křivky svazků

$\Sigma_1^6(P)$ a $\Sigma_1^6(Q)$ jdoucí bodem M^1 mají v bodech skupiny (M^1) body dvojné, takže i vytvořená křivka 12. stupně má v každém bodě této skupiny body dvojnásobné.

Každá křivka systému $\Sigma_5^{1\,2}$ *procházející* **čtyřbodovou** *skupinou grupy* G_{16} *má v bodech této skupiny body dvojné.*

Čtyřmi body P^1, P^2, P^3, P^4 v rovině obecně zvolenými prochází ∞^1 křivek systému $\Sigma_5^{1\,2}$ tvořících svazek, jehož base se skládá z pěti čtyřnásobných bodů skupiny (A) a ze čtyř skupin šestnáctibodových (P^i) grupy G_{16}. $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Jest zřejmo, že opakováním tohoto postupu dospějeme k dalším křivkám, které jsou grupou G_{16} reprodukovány. Křivky ty jsou obecně stupně $6n$ a mají v pěti bodech základní skupiny (A) body $2n$-násobné. Všimněme si jedné takové obecné křivky K^{6n}; křivka ta *neprochází obecně* některou *čtyřbodovou* skupinou grupy G_{16} a tedy také ne další čtveřinou dvojných bodů báse svazku 1) nebo 2). Libovolná křivka K^6 svazku 1) protíná křivku K^{6n} v pěti bodech skupiny (A), které platí za $20n$ průsečíků a tudíž v dalších bodech v počtu $16n$, které nutně tvoří n skupin šestnáctibodových grupy G_{16}. Každou touto skupinou bodovou prochází jedna křivka svazku 2). A opačně. Křivkou K^{6n} vzniká tedy mezi svazky 1) a 2) alg. korespondence $[n, n]$, avšak ne zcela obecná, neboť společné křivce obou svazků, t. j. křivce $\varphi_1^2 = 0$, (tedy dvojnásobně vzaté kub. křivce C_1), čítané do kteréhokoliv z nich, odpovídá v druhém táž křivka n-násobně.

Přiřadíme-li naopak křivky svazků 1) a 2) v korespondenci $[n, n]$, jež jest dána relací

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\,\lambda^i \mu^k = 0, \tag{6}$$

obdržíme obecnou křivku stupně $6n$, která jest ke grupě G_{16} invariantní, a n-násobně vzatou křivku $\varphi_1^2 = 0$, jestliže všechny koeficienty a_{ik}, pro něž jest $i + k < n$, jsou rovny nule, takže křivka stupně $2n$, jež jest dána v rovině (λ, μ) relací 6) a která má nekonečně vzdálené body os souřadných λ a μ za body n-násobné, musí míti též v bodě $\lambda = \mu = 0$ bod n-násobný.

V rovnici 6), která má obecně $(n+1)^2$ členů, jest tedy $\dfrac{n(n+1)}{2}$ koeficientů rovno nule, takže v ní zbývá celkem $r = (n+1)^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 = \dfrac{n(n+3)}{2}$ podstatných konstant.

Dosadíme-li tam za λ a μ příslušné hodnoty $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2}$ resp. $\frac{\varphi_1^2}{\varphi_3^2}$ a vyloučíme-li všem členům společného činitele φ_1^{2n}, obdržíme rovnici obecné křivky K^{6n} invariantní ke grupě G_{16} ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \varphi_1^{2(i+k-n)} \varphi_2^{2(n-i)} \varphi_3^{2(n-k)} = 0, \text{ kde } i+k \geqq n.$$

Výsledek tento ostatně plyne přímo analyticky, vezmeme-li zřetel k tomu, že podíly $\frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2}$ a $\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1^2}$ jsou invariantní k transformacím grupy G_{16}. Můžeme tedy vysloviti tuto obecnou větu:

Transformace grupy G_{16} reprodukují ∞^r křivek stupně $6n$, které mají v pěti bodech základní skupiny (A) body $2n$-násobné a tvoří jistý lineární systém Σ_r^{6n}, jehož dimense $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Křivky systému dány jsou rovnicí

$$f(\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2) = 0,$$

kde f značí obecnou homogenní ternární formu stupně n vzhledem k φ_1^2, φ_2^2 a φ_3^2. Křivky systému, které procházejí některou čtyřbodovou skupinou grupy G_{16}, mají v bodech této skupiny aspoň body dvojnásobné.

Grupa G_{16} jeví tudíž vlastnostmi, jež jsme právě poznali, jistou obdobu s grupou $\mathfrak{G}_8$ kvadratických transformací, které reprodukují elliptické rovinné křivky bikvadratické jisté sítě Σ_2^4. Skupina pěti základních kubických křivek (C_i) hraje v teorii grupy G_{16} touž úlohu, jako skupina čtyř základních kuželoseček kvadratických inversí grupy $\mathfrak{G}_8$. Vede nás tudíž cesta, které jsem právě použil, k dalšímu sevšeobecnění vlastností grupy $\mathfrak{G}_8$ a těch grup kvadratických transformací, jež z ní lze odvoditi. Úkolem tím, jak jsem již v úvodní stati naznačil, míním se zabývati v další práci.

VII. Zvláštní případy grupy G_{16}.

1. V předcházejících úvahách jsme předpokládali, že skupina pěti základních bodů (A), jimiž jest grupa G_{16} dokonale stanovena, jest *obecná*, takže žádné tři body její neleží v přímce. Nabízí se tedy otázka, jak tomu jest v případech takto vyloučených. Dříve než se budeme touto otázkou zabývati, všimněme si dvou případů, kdy kvadratická rovinná involuce třídy první, určená trojicí hlavních bodů α, β, γ a bodovým párem M, M', degeneruje

a) Prvý případ nastává, když trojice hlavních bodů α, β, γ leží v přímce. V tomto případě přejde kvadratická rovinná involuce v involutorní centrickou homologii $H^{(1)}$, kde osou homologie jest přímka $p \equiv \overline{\alpha\beta\gamma}$ a střed homologie S leží na spojnici daných sdružených bodů M, M' tak,

že jest osou od nich oddělen harmonicky. Že tomu tak jest, plyne bezprostředně z toho, že z libovolného bodu a, ležícího na ose p involutorní homologie $H^{(1)}$ $(S. p.)$, promítají se bodové páry této transformace paprskovou involucí, jejíž samodružné paprsky jsou p a $\overline{aS}$.

b) Druhý případ nastává, když hlavní body α, β, γ tvoří sice trojúhelník, ale jeden z obou daných korespondenčních bodů M, M' leží na jedné hlavní přímce. Leží-li na příklad bod M v rovině zcela obecně, ale bod M' na hlavní přímce $\overline{\alpha\beta}$, pak transformace takto určená budí v paprskových svazcích o středu α a β involuce parabolické, kdežto ve svazku o středu γ vytvoří obecnou involuci o samodružných paprscích t a s. Libovolnému bodu P roviny odpovídá tudíž vždy jeden bod P' ležící na hlavní přímce $\alpha\beta$ — nalezneme ho snadno ze vztahu $\gamma\ (t, s, P, P') = -1$ — kdežto každý bod U přímky $\alpha\beta$ jest hlavním bodem, neboť mu odpovídá v rovině celá přímka u' jdoucí bodem γ a určená relací $\gamma\ (t, s, U, u') = -1$. Tato transformace postrádá ovšem co rovinná transformace smyslu.

2. Nyní můžeme vyšetřiti *prvý vyloučený případ.* Předpokládejme, *že skupina daných pěti bodů,* které teď značme stručně znaky 1, 2, ... 5, *má takovou polohu, že tři z nich, na příklad body 1, 2, 3, leží v přímce* $p \equiv \overline{123}$. Na spojnici zbývajících dvou $r \equiv \overline{45}$ sestrojme bod S hovící podmínce $(4, 5, S, \text{III}) = -1$, při čemž III značí průsečík přímek p a r.

Všimněme si kvadratických transformací grupy G_{16}. V tomto případě ihned seznáváme, že rovinné involuce T_{14}, T_{15}, T_{24}, T_{25}, T_{34} a T_{35} jsou druhu *b)*, tedy postrádají smyslu, takže zůstávají v platnosti toliko kvadratické neperspektivní involuce T_{12}, T_{13}, T_{23}, kdežto kvadratická involuce T_{45} jest druhu *a)*, takže přejde v lineární centrickou involutorní homologii $H^{(1)}$ o středu S a ose p.

Přihlédněme nyní ke kubickým involucím $T_i^{(3)}$ a k jejich základním kubickým křivkám C_i^3.

Křivka C_1^3 skládá se zřejmě z přímky p a kuželosečky C_1^2, která se dotýká v bodech 4 a 5 přímek $\overline{14}$ a $\overline{15}$, a mimo to prochází body I_1 a II_1, t. j. těmi diagonálnými vrcholy čtyřrohu 2345, které neleží na přímce p. Perspektivní kubická involuce $T_1^{(3)}$ redukuje se tedy v kvadratickou inversi $J_1^{(2)}(1, C_1^2)$, která má bod 1 za střed a kuželosečku C_1^2 za základní (geom. místem bodů samodružných), takže body 1, 4, 5 jsou hlavní vrcholy této inverse.

Podobně jest tomu s kubickými křivkami C_2^3 a C_3^3 a s kubickými involucemi $T_2^{(3)}$ a $T_3^{(3)}$. Tak obdržíme další dvě kvadratické inverse $J_2^{(2)}(2, C_2^2)$ a $J_3^{(2)}(3, C_3^2)$, při čemž kuželosečka C_2^2 se dotýká přímek $\overline{24}$ a $\overline{25}$ v bodech 4, 5 a prochází body I_2 a II_2 (t. j. těmi diagonálnými vrcholy čtyřrohu 1345, které neleží na přímce p), a kuželosečka C_3^2 má v bodech 4, 5 za tečny

přímky $\overline{34}$ a $\overline{35}$ a prochází analogicky body I_3 a II_3. Z konstrukce jest zřejmo, že každá ze tří spojnic $I_i\ II_i$ prochází bodem S.

Všimněme si posléze kubické křivky C_4^3. Konická polára bodu 4 vzhledem k této křivce prochází body 1, 2, 3, 5 a dotýká se v bodě 4 této křivky. Ježto body 1, 2, 3 leží v přímce p, skládá se tato polára nutně z přímky p a spojnice $r \equiv \overline{45}$; tato přímka r jakožto součást poláry musí se dotýkati křivky C_4^3 v bodě 4, ale mimo to dotýká se jí též v bodě 5, neboť tak byla křivka C_4^3 definována; — má tedy křivka C_4^3 přímku r za součást a zbytek její jest tedy kuželosečka, která musí procházeti třemi body 1, 2, 3 přímky p. Skládá se tedy křivka C_4^3 z přímky $45 \equiv r$ a z dvojnásobně vzaté přímky $p \equiv 123$. Ježto libovolný proměnný paprsek q vedený bodem 4 seče tuto reducibilní křivku C_4^3 ve dvou proměnných bodech splývajících $X_1 \equiv X_2$ ležících na p, a transformace $T_4^{(3)}$ přiřazuje bodu Q tohoto paprsku bod Q', hovící podmínce $(X_1\, X_2\, Q\, Q') = -1$, tedy bod $Q' \equiv X_1 \equiv X_2$, postrádá transformace $T_4^{(3)}$ jakožto rovinná smyslu, neboť libovolnému bodu Q v rovině přiřazuje bod pevné přímky p, takže každý bod přímky p jest jejím hlavním bodem, neboť mu odpovídá přímka jej spojující s bodem 4.

Tutéž vlastnost má i kubická křivka C_5^3 a tudíž i involuce $T_5^{(3)}$ nemá smyslu.

Grupa G_{16} se tudíž v tomto případě redukuje v grupu 8. stupně $\mathfrak{G}_8$:

$$1,\ J_1^{(2)},\ J_2^{(2)},\ J_3^{(2)},\ T_{12}^{(2)},\ T_{13}^{(2)},\ T_{23}^{(2)},\ H^{(1)}(S, p),$$

složenou ze tří inversí kvadratických, tří kvadratických involucí třídy prvé a jedné lineární involutorní homologie.

Transformace této grupy reprodukují tři kuželosečky C_i^2 $(i = 1, 2, 3)$, z nichž každá jest základní křivkou (křivkou samodružných bodů) pro jednu kvadratickou inversi $J_i^{(2)}$, kdežto ostatních šest transformací grupy na ní vytvoří involuce bodové. Střed S homologie $H^{(1)}$ jest tedy pólem osy homologie p vzhledem ke každé kuželosečce C_i^2, což ostatně plyne přímo z konstrukce středu S a z definice křivek C_i^2.

Na kuželosečce C_i^2 vytvoří inverse $J_h^{(2)}$ involuci bodovou o středu h, jejíž samodružné body jsou další dva průsečíky křivky C_i^2 s C_h^2. Protínají se tedy každé dvě kuželosečky C_h^2 a C_k^2 mimo body 4, 5 ještě v dalších dvou bodech, při čemž tečny v těchto dvou bodech sestrojené ke křivce C_h^2 procházejí bodem k a opačně tečny v nich sestrojené ke křivce C_k^2 procházejí bodem h. (i, h, k jsou čísla od sebe různá a mají některou z hodnot 1, 2, 3.)

Na křivce C_i^2 vytvoří neperspektivní involuce $T_{ih}^{(2)}$ centrickou involuci o středu h, tedy touž co inverse $J_h^{(2)}$; samodružné body této involuce jsou tudíž *společnými* samodružnými body obou těchto transformací

a leží tedy na křivce C_h^2, t. j. křivce samodružných bodů inverse $J_h^{(2)}$, a na jedné samodružné přímce transformace $T_{ih}^{(2)}$. Samodružná přímka p transformace $T_{ih}^{(2)}$ nemůže obsahovati žádný z těchto dvou bodů, neboť procházejíc centrem h této involuce musila by býti tečnou křivky C_i^2, což však nemůže býti, neboť pólem přímky p vzhledem k C_i^2 jest bod S, který na křivce neleží. *Leží tudíž oba tyto body* na zbývající druhé samodružné přímce transformace $T_{ih}^{(2)}$ jdoucí hlavním vrcholem k, tedy *na přímce* $\overline{kS}$. Protínají se tudíž křivky C_i^2 a C_h^2 na přímce $\overline{kS}$.

Naproti tomu vytvoří neperspektivní involuce $T_{hk}^{(2)}$ na křivce C_i^2 touž bodovou involuci, co homologie $H^{(1)}$, t. j. involuci o středu S a ose p. Transformace T_{hk} vytvoří totiž na samodružné přímce p bodovou involuci, která má bodové páry h, k a i, III; avšak touž involuci indukuje na přímce p kuželosečka C_i^2, neboť z definice této křivky plyne, že vzhledem k ní jsou body i, III a rovněž tak i body h, k sdruženými póly: polárou bodu i jest totiž přímka $\overline{4\,5\,\mathrm{III}}$ a čtyřroh 4, 5, I_i, II_i vepsaný kuželosečce C_i^2 má body h, k za diagonálné rohy. Protíná tedy přímka p kuželosečku C_i^2 v samodružných bodech transformace T_{hk}, takže tato transformace vytvoří na křivce C_i^2 involuci, která má přímku p za direkční osu a jejímž středem jest pól S této přímky; tutéž involuci vytvoří na této křivce homologie $H^{(1)}$.

Tak vznikají na každé kuželosečce C_i^2 celkem tři involuce bodové, z nichž jest každá vytvořena dvěma transformacemi grupy $\mathfrak{G}_8$. Jsou to: 1. Involuce $g_2^1(h; \overline{kS})$, vytvořená inversí $J_h^{(2)}$ a transformací T_{ih}, jež má střed h a osu kS; 2. involuce $g_2^1(k; \overline{hS})$, vytvořená inversí $J_k^{(2)}$ a transformací T_{ik}, jež má střed k a osu hS; 3. involuce $g_2^1\,(S; p)$, vytvořená homologií $H^{(1)}$ a transformací T_{hk}. Součin kterýchkoli dvou těchto involucí na křivce C_i^2 dává zbývající involuci třetí.

Opačně vytvoří každá transformace T_{hk} na křivce C_i^2 touž involuci $g_2^1\,(S; p)$ co homologie $H^{(1)}$, a na kuželosečce C_h^2 touž involuci $g_2^1\,(k, \overline{iS})$ co inverse J_k^2.

Zákony, jimiž se řídí konmutativní násobení elementů grupy $\mathfrak{G}_8$ plynou přímo z nalezených pravidel pro grupu G_{16}; — ostatně můžeme je snadno přímo odvoditi užitím svrchu poznaných vlastností. Značíme-li opětně znaky i, h, k *tři* od sebe různá čísla, mající některou z hodnot 1, 2, 3, můžeme psáti:

$$
\text{(I.)}\qquad
\begin{array}{ll}
H^{(1)} \cdot T_{ih}^{(2)} \equiv J_k^{(2)} & \qquad T_{ih}^{(2)}\; J_i^{(1)} \equiv J_h^{(2)} \\
H^{(1)} \cdot J_k^{(2)} \equiv T_{ih}^{(2)} & \qquad J_i^{(2)}\; J_h^{(2)} \equiv T_{ih}^{(2)} \\
T_{ih}^{(2)} \cdot J_k^{(2)} \equiv H^{(1)} & \qquad T_{ih}^{(2)}\; T_{ik}^{(2)} \equiv T_{hk}^{(2)}
\end{array}
$$

Máme tedy výsledek:

Je-li v rovině dáno pět bodů 1, 2, 3, 4, 5, z nichž tři leží v přímce a zbývající dva jsou obecně položeny, pak jest jimi dokonale určena komativní grupa osmého stupně $\mathfrak{G}_8$ Jonquièrových rovinných involucí, složená z jedné involutorní centrické lineární homologie, tři kvadratických inversí a tří rovinných kvadratických neperspektivních involucí. Grupa ta reprodukuje tři kuželosečky, které jsou základními křivkami (křivkami samodružných bodů) *kvadratických inversí.*

Zvolíme-li označení tak, že body ležící v přímce označíme 1, 2, 3, takže jest $p \equiv \overline{1\,2\,3}$, značí-li dále i, h, k tři od sebe různá čísla, jež mají některou z hodnot 1, 2, 3, označíme-li ty diagonálné vrcholy čtyřrohu h, k, 4, 5, které neleží na přímce p, znaky I_i a II_i, a sestrojíme-li dále kuželosečku C_i^2 která se dotýká přímek $\overline{i4}$ a $\overline{i5}$ v bodech 4 a 5 a prochází mimo to body I_i a II_i (Pascalově podmínce jest vyhověno), — *takové kuželosečky jsou tři, neboť i probíhá hodnotami 1, 2, 3 — pak protínají všechny tři spojnice $I_i II_i$ přímku $\overline{45}$ v témže bodě S a transformace grupy $\mathfrak{G}_8$ dají se vyjádřiti takto:*

Grupa obsahuje lineární involutorní homologii $H^{(1)}$ mající bod S za střed a přímku p za osu, tři kvadratické inverse $J_i^{(2)}$ určené středem i a základní kuželosečkou C_i^2, a posléze tři kvadratické rovinné involuce třídy prvé $T_{hk}^{(2)}$,— hk probíhá kombinace druhé třídy z prvků 1, 2, 3, -- *jež jsou určeny trojicí hlavních bodů (i, 4, 5) a párem korespondenčních bodů h, k.*

Každé dvě kuželosečky C_h^2 a C_k^2 protínají se mimo body 4 a 5 v dalších dvou bodech, které leží na spojnici $\overline{iS}$, a v nichž tečny sestrojené ke křivce C_h^2 se sbíhají v bodě k a opačně tečny v nich sestrojené ke křivce C_k^2 jdou bodem h.

Na každé z těchto kuželoseček C_i^2 vytvoří transformace grupy $\mathfrak{G}_8$ celkem tři involuce, z nichž každá jest tudíž vytvořena dvěma transformacemi grupy. Jsou to: 1. Involuce $g_2^1(h; \overline{kS})$, mající střed h a osu kS, jež jest vytvořena inversí $J_h^{(2)}$ a transformací $T_{ih}^{(2)}$; 2. involuce $g_2^1(k, \overline{hS})$ vytvořená inversí $J_k^{(2)}$ a transformací $T_{ik}^{(2)}$; 3. involuce $g_2^1(S; p)$ vytvořená homologií $H^{(1)}$ a transformací $T_{hk}^{(2)}$. Součin kterýchkoli dvou těchto involucí na křivce C_i^2 vytvořených dává zbývající involuci třetí.

Komutativní násobení transformací grupy $\mathfrak{G}_8$ řídí se zákony, jež jsou dány relacemi (I.)

Grupa $\mathfrak{G}_8$ má sedm podgrup čtvrtého stupně a sice trojího druhu:[16])

1. *Jednu podgrupu G_4 složenou z kvadratických rovinných involucí třídy prvé:*

$$1,\ T_{12},\ T_{13},\ T_{23};$$

[16]) Složení její jest analogické jako u grupy G_8 (čl. V.); jest s ní isomorfní.

2. tři podgrupy R_4, z nichž každá obsahuje homologii $H^{(1)}$, jednu inversi a jednu kvadratickou involuci prvé třídy a sice takto:

$$1,\ H^{(1)},\ J_i^{(2)},\ T_{hk}^{(2)};$$

3. tři podgrupy Q_4, z nichž každá obsahuje dvě inverse a jednu kvadratickou involuci

$$1,\ J_i^{(2)},\ J_h^{(2)},\ T_{ih}^{(2)}.$$

3. Vezměme nyní v úvahu ***případ*** poslední, ***kdy skupina daných pěti bodů jest taková, že dvě trojice bodové leží v přímce.*** Zvolme na př. označení tak, že jest $p_1 \equiv \overline{123}$ a $p_2 \equiv \overline{345}$. Další dva diagonálné vrcholy čtyřrohu 1245 označme znaky I a II; mimo to budiž $p_3 \equiv \overline{I\,II}$, $S_1 \equiv (p_3, p_2)$ a $S_2 \equiv (p_1, p_3)$.

Snadno seznáme, že v tomto případě inverse $J_3^{(2)}$ redukuje se v involutorní homologii $H_3^{(1)}$, která má střed 3 a jejíž osou jest přímka p_3; z ostatních transformací grupy $\mathfrak{G}_8$ zůstává v platnosti toliko involutorní homologie $H_1^{(1)}$ o středu S_1 a ose p_1 a involutorní homologie $H_2^{(1)}$ o středu S_2 a ose p_2. Grupa G_{16} příslušící k této skupině pětibodové se tudíž redukuje v komutativní grupu čtvrtého stupně G_4 tří involutorních centrických lineárních homologií: 1; $H_1^{(1)}(S_1; p_1)$; $H_2^{(1)}(S_2; p_2)$; $H_3^{(1)}(3; p_3)$.

Součin kterýchkoli dvou těchto homologií dává vskutku zbývající homologii třetí.

Máme tedy výsledek:

Je-li v rovině skupina pěti bodů 1, 2 ... 5 tak položená, že jeden z těchto bodů — na př. bod 3 — jest diagonálným vrcholem čtyřrohu utvořeného ze zbývajících, pak k této skupině pětibodové příslušící grupa G_{16} Jonquièrových involutorních transformací se redukuje v grupu čtvrtého stupně G_4 tří lineárních centrických involutorních homologií $H_i^{(1)}$. ($i = 1, 2, 3$).

Označíme-li ty dvě strany čtyřrohu 1 2 4 5, které se sbíhají ve vrcholu 3, znaky p_1 a p_2, je-li dále p_3 diagonálná strana protější k diagonálnému vrcholu 3 a označíme-li posléze $S_1 \equiv (p_2 p_3)$ a $S_2 \equiv (p_1 p_3)$, pak jsou dány involutorní homologie $H_i^{(1)}$ grupu tvořící trojúhelníkem 3 S_1 S_2 a sice tak, že každý vrchol tohoto trojúhelníka a strana k němu protější jsou středem a osou jedné této homologie.

VIII. Kvadratické inverse.

V závěru chci se ještě zmíniti v největší stručnosti o obecných kvadratických inversích, které reprodukují danou obecnou kubickou křivku C^3.

Seznali jsme, že existuje ∞^2 kvadratických involucí třídy prvé, které reprodukují danou obecnou křivku C^3 vytvořujíce na ní involutorní korespondenci druhého druhu $E^{(2)}$. Naproti tomu lze určiti toliko jedinou

kvadratickou involuci třídy prvé, která reprodukuje danou křivku C^3 vytvořujíc na ní určitou centrickou involuci g_2^1; — jest tedy těchto transformací tolik, co involucí g_2^1, tedy toliko ∞^1.

Avšak snadno seznáme, že danou centrickou involuci g_2^1 můžeme na křivce C^3 vytvořiti též ∞^1 kvadratickými inversemi.

Za tím účelem vytkněme na křivce C^3 centrickou involuci g_2^1 o středu a, jejíž dvojné body označme A_1, A_2, A_3, A_4. Ve svazku kuželoseček $S_1^2(A_1, A_2, A_3, A_4)$ vytkněme libovolnou křivku K^2 a bodem a veďme libovolný paprsek p; průsečíky paprsku p s křivkou K^2 označme X, X^0 a proměnné průsečíky paprsku p s křivkou C^3 označme U, U^*. Ve čl. II. odst. 2. jsme seznali, že platí vztah $(U, U^*, X, X^0) = -1$. Jest tedy daná křivka C^3 reprodukována kvadratickou inversí, která má za základní křivku kuželosečku K^2 a za střed bod a. Dotyčné body ξ, η tečen vedených z bodu a ke křivce K^2 leží vskutku, jak jsme tam seznali, (II., 3.), na křivce C^3. Mění-li se kuželosečka K^2 ve svazku S_1^2 mění se i body ξ, η na křivce C^3 a vytvoří centrickou involuci, jejímž dvojným bodem jest bod a a jejíž další tři dvojné body tvoří diagonálné vrcholy čtyřrohu (A). Lze tedy danou kubickou křivku C^3 reprodukovati ∞^1 kvadratickými inversemi, ***které mají společný střed a a jichž základní kuželosečky tvoří svazek o bási*** (A); všechny tyto inverse vytvořují na křivce C^3 tutéž centrickou involuci g_2^1 (a). Mezi těmito inversemi jsou tři, jichž základní kuželosečky jsou složeny ze dvou přímek; dvojné body těchto tří kuželoseček tvoří s bodem a čtveřinu bodů konjugovaných.

Danou obecnou kubickou křivku rovinnou lze tudíž reprodukovati ∞^2 obecnými kvadratickými inversemi; středy a těchto inversí a další dva hlavní body jejich ξ, η leží na křivce a eliptické parametry jejich hoví relaci: $2a \equiv \xi + \eta$ (mod. ω, ω').

Jest zřejmo, že přibráním těchto kvadratických inversí, jež jsme v předchozím z úvah vylučovali, můžeme nalezené vztahy rozšířiti, což však vymyká se již rámci této práce; omezím se toliko na upozornění, že ze vztahů poznaných v kap. V., 1. můžeme direktně snadno dospěti ke známé grupě 8. stupně složené ze 7 kvadratických involucí, jež reprodukují obecnou eliptickou rovinnou křivku bikvadratickou, aniž bychom vyšli od této křivky.

Na konci vraťme se ještě k otázce dotčené v úvodní stati.

Na obecné kubické křivce rovinné C^3 lze vytvořiti každou biracionální korespondenci kvadratickou transformací rovinnou a sice nekonečně mnoha způsoby. Jde-li o korespondenci neinvolutorní, můžeme ji vždy na křivce C^3 vytvořiti kvadratickou transformací, jež jest dána součinem dvou kvadratických inversí, při čemž střed jedné této inverse může býti zvolen na křivce zcela libovolně. Odpovídá-li bodu M, na křivce C^3 obecně

zvolenému, v korespondenci té bod N, pak součin $J_1^{(2)} . J_2^{(2)}$ dvou kvadratických inversí $J_1^{(2)}(\alpha_1; \xi_1, \eta_1)$ a $J_2^{(2)}(\alpha_2; \xi_2, \eta_2)$ — kde α_i značí střed a ξ_i, η_i další dva hlavní body inverse $J_i^{(2)}$ — dává přímo žádanou kvadratickou transformaci, jakmile učiníme $\alpha_1 \equiv N \equiv \xi_2$, $\alpha_2 \equiv M \equiv \xi_1$; hlavní body η_1 a η_2 jakož i řídicí kuželosečky těchto dvou inversí, křivku C^3 reprodukujících, jsou tím již určeny jednoznačně.

Jest zřejmo, že vztahy v předchozích úvahách odvozené pro obecnou rovinnou křivku kubickou jest možno direktně přenésti na rovinné křivky eliptické, jež se dají Cremonovou transformací převésti v křivku C^3. Lze tedy na křivkách těch vytvořiti každou obecnou neinvolutorní biracionální korespondenci nekonečně mnoha způsoby rovinnou transformací Cremonovou, jež dána jest součinem dvou rovinných involucí druhého řádu. Zároveň jsme tak vedeni ke grupám rovinných involucí druhého řádu, jež jsou isomorfní s grupami právě poznanými.

Certains groupes d'involutions planes de Jonquière.

Par *B. Machytka.*

(Résumé.)[1])

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés des involutions planes quadratiques qui reproduisent une cubique plane générale et, particulièrement, d'attirer l'attention sur un groupe du 16e degré G_{16} d'involutions planes de Jonquière, caractérisé par un groupe de 5 points choisis arbitrairement dans le plan et dont les transformations reproduisent 5 cubiques planes générales qui sont parfaitement définies d'une certaine manière par ce groupe de points. Ce groupe G_{16} est surtout remarquable par ce que ses transformations reproduisent ∞^r des courbes planes d'ordre $6n$, qui ont cinq points multiples de l'ordre $2n$ communs et qui forment un système linéaire Σ_r^{6n}, où $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Le groupe G_{16} reproduisant alors, pour $n = 1$, des courbes du 6^e degré qui ont cinq points doubles communs et qui forment un certain réseau Σ_2^6 montre une certaine analogie avec le groupe du 8^e degré de transformations quadratiques reproduisant des quartiques elliptiques planes d'un certain réseau Σ_2^4. Enfin, j'étudie la question de reduction de ce groupe G_{16} au cas, où ce groupe de 5 points se trouve dans une position spéciale. Je vais indiquer succinctement la marche que j'ai suivie, ainsi que les résultats principaux auxquels je suis parvenu.

[1]) Je suis très reconnaissant à M. le prof. B. Bydžovský qui a bien voulu se charger de la révision de la traduction du présent résumé en français.

1. Je pars de la démonstration de deux théorèmes, dont le premier concerne les cubiques planes générales.

»Trois couples de points P_i, P'_i ($i = 1, 2, 3$), arbitrairement choisis dans le plan, déterminent un faisceau de cubiques tel que les couples de points P_i, P'_i fournissent, sur chaque courbe du faisceau, trois couples de points qui se correspondent dans une même correspondance univoque de la deuxième espèce $E(P_i, P'_i)$. Les trois autres points de base de ce faisceau sont les points $X_i \equiv (\overline{P_h P'_k} . \overline{P'_h P_k})$, où les indices i, h, k sont les nombres 1, 2 3 permutés cycliquement. La courbe du faisceau C^3_0, menée par le point $X'_1 \equiv (\overline{P_2 P_3} . \overline{P'_2 P'_3})$est parcourue aussi par les deux autres points X'_2 et X'_3 et, les six paires de points $(P_i P'_i), (X_i, X'_i)$ fournissent sur cette courbe C^3_0 les couples de points de la même correspondance binaire-cyclique $E_{(2)}$.«

Le deuxième théorème se rattache aux involutions planes quadratiques de la 1ière classe.

»Toutes les involutions planes quadratiques de la 1ière classe qui ont communs deux couples de points correspondants P_1, P'_1; P_2, P'_2 possèdent, en outre, un troisième couple commun

X_{12}, X'_{12}, où $X_{12} \equiv (\overline{P_1 P'_2} . \overline{P'_1 P_2})$ et $X'_{12} \equiv (\overline{P_1 P_2} . \overline{P'_1 P'_2})$.«

En se servant de ces deux théorèmes, on arrive facilement aux résultats suivants:

»Trois paires de points P_i, P'_i, ($i = 1, 2, 3$) arbitrairement choisis dans le plan, déterminent ∞^2 d'involutions quadratiques de la 1ière classe. Toutes ces transformations ont ∞^1 paires de points communs, puisqu'elles reproduisent la même cubique plane C^3_0 (P_i, P'_i, X_i, X'_i) en engendrant sur cette courbe, par leurs couples de points correspondants, la même correspondance binaire-cyclique $E_{(2)}$ Les points principaux (α, β, γ) de toutes ces transformations sont situés sur cette courbe et forment des groupes de points d'une involution rationnelle g^2_3 qui est résiduelle à elle-même et qui peut être exprimée au moyen de paramètres elliptiques par la relation

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2} \equiv \pi_i - \pi'_i, \qquad (\text{modd } \omega, \omega'),$$

où w signifie une période et π_i, π'_i les paramètres des points P_i, P'_i«.

Et inversement:

»Chaque cubique plane générale C^3 se reproduit par ∞^2 d'involutions quadratiques [2]) qui engendrent sur cette courbe la même correspondance binaire-cyclique de la deuxième espèce $E_{(2)}$. Les groupes de points d'une des trois involutions rationnelles g^2_3 quelconque, résiduelles à elles-mêmes,

---

[2]) J'appellerai tout court »involutions quadratiques« les involutions planes quadratiques de la 1ière classe, c'est-à-dire les transformations qui ne sont pas des inversions quadratiques.

qui sont données sur la courbe C^3 par la relation

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{w}{2},$$

où w signifie une des trois périodes principales quelconque, fournissent les triples des points principaux (α, β, γ) des involutions quadratiques qui reproduisent la cubique C^3 en formant, sur cette courbe, par leurs couples de points (u, u'), la correspondance $E_{(2)}$

$$u - u' \equiv \frac{w}{2},$$

où w est la même période. Donc, les points de coïncidence de ces transformations quadratiques ne sont pas situés sur cette courbe C^3.«

Mais une cubique plane générale se reproduit aussi par des involutions quadratiques et par des inversions quadratiques qui engendrent, sur cette courbe, les involutions centrales g_2^1. J'ai reçu les résultats suivants.

»Chaque cubique plane générale C^3 se reproduit par ∞^1 d'involutions quadratiques de la 1ière classe qui forment sur cette courbe, par leurs couples de points, les involutions centrales g_2^1

$$u + u' \equiv C.$$

Les points de coïncidence $(A_1, \ldots A_4)$ de ces transformations quadratiques sont situés sur la courbe C^3; ce sont les points doubles de ces involutions centrales g_2^1 et c'est pourquoi ils forment des quadruples de points conjugués sur la courbe C^3.

Tout quadruple de points conjugués (A) de la courbe C^3, qui ont le même point tangentiel α, pris pour quadruple de points de coïncidence, détermine une certaine involution plane quadratique, qui reproduit la cubique C^3 en formant sur cette courbe l'involution centrale $g_2^1(\alpha)$ dont le centre est le point α. Les sommets du triangle polaire du quadruple (A) sont les points principaux de cette transformation et forment, avec le point α, un nouveau quadruple de points conjugués de la cubique C^3. Donc, on peut former chaque involution centrale g_2^1 (α) sur la cubique C^3 par une seule involution quadratique du plane.

Et inversement: Chaque triple de points A_h, A_k, A_l, contenu dans un quadruple de points conjugués (A), mène, comme le triple des points principaux, à une certaine involution quadratique $T_i^{(2)}(A_h, A_k, A_l)$ qui reproduit la cubique C^3 en formant sur cette courbe l'involution centrale g_2^1 (A_i) dont le centre est le quatrième point A_i du quadruple (A). Chaque quadruple de points conjugués (A) de la cubique C^3, mène, en ce sens, à quatre involutions quadratiques $T_i^{(2)}$, $(i = 1, \ldots 4)$ mentionnées plus haut.«

»Chaque cubique plane générale C^3 se reproduit par ∞ d'inversions quadratiques, parce qu'on peut former chaque involution centrale $g_2^1(\alpha)$ sur la cubique C^3 par ∞^1 de ces inversions. Le point α est le centre de toutes ces inversions et les coniques directrices forment un faisceau dont les points de base (A) sont points doubles de l'involution $g_2^1(\alpha)$. Le lieu des points de contact β, γ des tangentes menées d'un point fixe α aux coniques du faisceau (A) est, en effet, une cubique admettant (A) comme un quadruple de points conjugués qui ont le même point tangentiel α. Les couples des points β, γ forment sur la courbe C^3 l'involution centrale dont le centre est le point tangentiel du point α, c. à d. le deuxième point tangentiel du quadruple (A). Par conséquent, les triples de points qui sont donnés, sur la courbe C^3, par la relation

$$2\alpha \equiv \beta + \gamma,$$

déterminent, comme points principaux, toutes les inversions quadratiques (il y en a une infinité double) qui reproduisent la cubique C^3.«

2. Les propriétés des involutions quadratiques de la 1ière classe qui reproduisent une cubique donnée C^3 nous mènent directement à certains groupes d'involutions planes de Jonquière.

Soient donnés cinq points $A_1, A_2, \dots A_5$, arbitrairement choisis dans le plan. Désignons par C_i^3 la cubique plane générale pour laquelle quatre points A_h, A_k, A_l, A_m du groupe (A) sont des points conjugués possédant le même point tangentiel A_i, c'est à dire le cinquième point restant du groupe (A). $T_{hk}^{(2)}$ désigne l'involution quadratique plane de la 1ière classe aux points principaux A_i, A_l, A_m, tandis que les points restants A_h, A_k forment un couple de points correspondants de cette transformation. Enfin, désignons par $T_i^{(3)}$ l'involution cubique perspective de Saltel qui a le point A_i pour point principal quadratique, quatre points restants du groupe (A) pour points principaux linéaires et la cubique C_i^3 comme lieu géométrique des points de coïncidence.

L'involution cubique $T_i^{(3)}$ peut être formée comme produit de deux involutions quadratiques $T_{hk}^{(2)}$ et $T_{lm}^{(2)}$, — donc, de trois manières différentes; — on arrive, ainsi, aux trois groupes du 4e degré du type G_4^i

$$1,\ T_i^{(3)},\ T_{hk}^{(2)},\ T_{lm}^{(2)},$$

qui sont caractérisés par la courbe C_i^3, sur laquelle les deux involutions quadratiques du même groupe G_4^i engendrent la même correspondance $E_{(2)} \equiv E(A_h A_k) \equiv E(A_l A_m)$. Donc, à chaque correspondance $E_{(2)}$, qui existe sur C_i^3, appartient un des trois groupes G_4^i.

De là nous arrivons facilement à un groupe G_8^i

$$1,\ T_i^{(3)},\ T_{hk}^{(2)},\ T_{lm}^{(2)},\ T_{hl}^{(2)},\ T_{km}^{(2)},\ T_{hm}^{(2)},\ T_{kl}^{(2)},$$

dont les transformations quadratiques appartiennent à toutes les trois correspondances $E_{(2)}$.

Si l'on prend égard aux cinq cubiques C_i^3 et à toutes les transformations qui sont déterminées de cette manière par le groupe des points (A), on arrive au groupe du 16^e^ degré G_{16} d'involutions de Jonquière et au théorème suivant:

»Cinq points $A_1, A_2, \ldots A_5$, arbitrairement choisis dans le plan, de telle sorte, qu'aucun triple de ces points ne soit situé sur une droite, déterminent parfaitement un groupe commutatif du 16^e^ degré G_{16} d'involutions planes de Jonquière, qui reproduit cinq cubiques planes générales $C_1^3, C_2^3, - C_5^3$ et qui se compose, en dehors de l'identité, de cinq involutions cubiques perspectives $T_1^{(3)}, \ldots T_5^{(3)}$ et de dix involutions quadratiques de la 1^ière^ classe $T_{12}^{(2)}, \ldots T_{45}^{(2)}$. Deux courbes quelconques C_h^3 et C_k^3 du groupe (C^3) se coupent, en dehors des cinq points (A), en quatre autres points, — ce sont les points de coïncidence de la transformation $T_{hk}^{(2)}$, — qui forment sur ces deux courbes un quadruple de points conjugués qui ont le même point tangentiel A sur la cubique C_h^3 et A_h sur C_k^3.

Les six involutions du groupe G_{16}, c'est à dire les involutions $T_{hk}^{(2)}$, où h, k diffèrent de i, engendrent, sur la cubique C_i^3, trois correspondances $E_{(2)}$, tandis que les quatre involutions, qui restent, $T_{ih}^{(2)}$, pour i fixe et h variable, engendrent sur C_i^3 les involutions centrales $g_2^1(A_h)$, les mêmes que les involutions cubiques $T_h^{(3)}$. Les transformations du groupe G_{16} engendrent sur chaque cubique C_i^3, excepté l'identité, seulement sept correspondances birationneles: quatre correspondances de la première et trois correspondances de la seconde espèce; donc, chaque correspondance est engendrée par deux involutions du groupe G_{16}.

Chaque triple de cubiques C_i^3, C_h^3, C_k^3 du groupe (C^3) détermine un réseau de cubiques Σ_2^3, dont le »Jacobien« se compose de deux cubiques C_l^3, C_m^3 c'est à dire de deux cubiques restantes du groupe (C^3).

Le groupe G_{16} comprend cinq sous-groupes G_8^i et 15 sous-groupes G_4. Il comprend, en outre,

10 sous-groupes du type $\mathbf{G}_4^{(im)}$: 1, $T_{hk}^{(2)}, T_{hl}^{(2)}, T_{kl}^{(2)}$, dont chacun se compose de trois involutions quadratiques,

10 sous-groupes Q_4^{im}: 1, $T_i^{(3)}, T_m^{(3)}, T_{im}^{(2)}$ dont chacun est composé de deux involutions cubiques et d'une involution quadratique,

et 10 sous-groupes $\mathbf{G}_8^{(im)}$: 1, $T_h^{(3)}, T_k^{(3)}, T_l^{(3)}, T_{hk}^{(2)}, T_{hl}^{(2)}, T_{kl}^{(2)}, T_{im}^{(2)}$, dont chacun se compose de trois involutions cubiques et de quatre involutions quadratiques.«

J'ai étudié les propriétés de tous ces sous-groupes, les qualités géométriques des groupes de points fournis par ces groupes de transformations, (les groupes composés des points multiples); je me borne ici à ne citer que ces propriétés caractéristiques:

»Chaque triple de cubiques C_h^3, C_k^3, C_l^3 du groupe (C^3) détermine un réseau de cubiques qui se compose de courbes qui sont reproduites par les transformations d'un certain sous-groupe Q_4^{im}; les cubiques restantes C_i^3 et C_m^3 qui se reproduisent, bien entendu, elles aussi, par les transformations de ce groupe, n'appartiennent pas à ce réseau et déterminent, au contraire, un faisceau de cubiques qui sont reproduites par les transformations d'un certain sous-groupe $\mathbf{G}_8^{(im)}$.

Chaque groupe $\mathbf{G}_4^{(im)}$ est contenu dans un seul groupe $\mathbf{G}_8^{(im)}$ et ses transformations reproduisent le même faisceau de cubiques $[C_i^3, C_m^3]$ que le groupe $\mathbf{G}_8^{(im)}$, en formant sur ces courbes des quadruples des points conjugués.[3]) Au contraire, tout groupe G_4 est contenu dans deux groupes $\mathbf{G}_8$ et ses transformations reproduisent deux faisceaux de cubiques. Tout groupe G_8 ne reproduit que cinq cubiques C_1^3, — C_5^3."

Les transformations du groupe G_{16} reproduisent des courbes du 6^e degré qui ont cinq points doubles $A_1, A_2, \dots A_5$ communs et qui forment un certain réseau Σ_2^6. Le »Jacobien« de ce réseau Σ_2^6 se compose de cinq cubiques $C_1, \dots C_5$. Le réseau Σ_2^6 est donné par la relation

$$a\,\varphi_i^2 + b\,\varphi_h^2 + c\,\varphi_k^2 = 0,$$

où $\varphi_i = 0$ désigne l'équation de la cubique C_i du groupe (C).

Les transformations du groupe G_{16} reproduisent, généralement, ∞^r des courbes d'ordre $6n$, qui ont cinq points multiples de l'ordre $2n$ communs, — ce sont les points $A_1, A_2, \dots A_5$, — et qui forment un système linéaire Σ_r^{6n} où la dimension $r = \frac{n(n+3)}{2}$. Ce système Σ_r^{6n} est donné par l'équation

$$f(\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2) = 0,$$

où f désigne une forme homogène de l'ordre n par rapport à $\varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2$. Les courbes du système Σ_r^{6n} qui passent par un quadruple des points de coïncidence d'une transformation quadratique du groupe G_{16}, — le quadruple de cette sorte forme toujours un groupe des points du groupe G_{16}, — ont ces points pour les points doubles.

Enfin j'ai étudié la question de réduction du groupe G_{16} au cas, où

[3]) Le groupe $\mathbf{G}_4$, bien connu d'ailleurs, est contenu dans le groupe du 8^e degré de transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane.

le groupe de cinq points (A) se trouve dans une position spéciale; j'ai abouti à ces deux résultats principaux:

a) »Si le groupe de cinq points (A), qui détermine le groupe G_{16}, se compose de trois points, soient les points A_1, A_2, A_3, qui sont situés sur une droite p, tandis que les autres points A_4, A_5 sont arbitrairement choisis dans le plan, le groupe G_{16} se réduit au groupe du 8ᵉ degré $\mathfrak{G}_8$ qui se compose de trois involutions quadratiques $T^{(2)}_{12}$, $T^{(2)}_{13}$, $T^{(2)}_{23}$, de trois inversions quadratiques $J^{(2)}_1$, $J^{(2)}_2$, $J^{(2)}_3$ et d'une homologie involutoire centrale $H^{(1)}$.

Pour déterminer ces transformations, désignons par i, h, k trois valeurs différentes prises parmi les nombres 1, 2, 3, construisons les points d'intersection $I_i \equiv (\overline{A_4A_h}.\overline{A_5A_k})$, $II_i \equiv (\overline{A_4A_k}.\overline{A_5A_h})$ et la conique C^2_i passant par deux points I_i et II_i et touchant les droites $\overline{A_iA_4}$ et $\overline{A_iA_5}$ aux points A_4 et A_5. On obtient ainsi trois coniques C^2_i $(i = 1, 2, 3)$. Trois droites $\overline{I_i\,II_i}$ coupent alors la droite $\overline{A_4A_5}$ en un point S qui est, avec la droite p, en relation harmonique avec les points A_4 et A_5.

Alors, les inversions quadratiques $J^{(2)}_i$ sont déterminées par leurs centres A_i et par leurs coniques directrices C^2_i; l'homologie involutoire $H^{(1)}$ a pour centre le point S et pour axe la droite p.

Les deux coniques C^2_h et C^2_k se coupent, en dehors des points A_4 et A_5, dans deux autres points qui sont situés sur la droite $\overline{A_iS}$; les tangentes construites dans ces points à la conique C^2_h se coupent au point A_k et celles de la conique C^2_k au point A_h.

Les transformations du groupe $\mathfrak{G}_8$ ne forment sur chaque conique C^2_i que trois involutions, à savoir: 1. l'involution $g^1_2(A_h; \overline{SA_k})$ avec le centre A_h et l'axe $\overline{SA_k}$, formée par les transformations $J^{(2)}_h$ et $T^{(2)}_{ih}$; 2. l'involution $g^1_2(A_k; \overline{SA_h})$ formée par $J^{(2)}_k$ et $T^{(2)}_{ik}$; 3. l'involution $g^1_2(S; p)$ formée par homologie H^1 et $T^{(2)}_{hk}$.

Le groupe commutatif $\mathfrak{G}_8$ comprend
un sous groupe G_4 1, $T^{(2)}_{12}$, $T^{(2)}_{13}$, $T^{(2)}_{23}$,
trois sous-groupes G'_4 du type: 1, $H^{(1)}$, $J^{(2)}_i$, $T^{(2)}_{hk}$,
et trois sous-groupes Q'_4: 1, $J^{(2)}_i$, $J^{(2)}_h$, $T^{(2)}_{ih}$.«

b) »Si le groupe de cinq points (A) est composé de manière, que l'un de ces points, — par exemple le point A_3, — soit le point d'intersection de deux droites $p_1 \equiv \overline{A_1A_2}$ et $p_2 \equiv \overline{A_4A_5}$, le groupe G_{16} se réduit au groupe du 4ᵉ degré de trois homologies involutoires centrales $H^{(1)}_1(S_1; p_1)$, $H^{(1)}_2(S_2; p_2)$, $H^{(1)}_3(A_3; p_3)$, où $(A_1A_2A_3S_2) = (A_4A_5A_3S_1) = -1$, $\overline{S_1S_2} \equiv p_3$.«

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 30.

Dolomitový důl u Slivence a jeho okolí.

Několik poznámek ke stratigrafii a tektonice staršího palaeozoika mezi Velkou Chuchlí a Slivencem.

Dolomite mine at Slivenec and surrounding.

Several remarks to the stratigraphy and tectonic conditions of the older palaeozoic roks between Velká Chuchle and Slivenec south from Prague.

Podává — By

VÁCLAV RŮŽIČKA

v Praze. — Prague.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 30.

Dolomitový důl u Slivence a jeho okolí.

Několik poznámek ke stratigrafii a tektonice staršího palaeozoika mezi Velkou Chuchlí a Slivencem.

Dolomite mine at Slivenec and surrounding.

Several remarks to the stratigraphy and tectonic conditions of the older palaeozoic roks between Velká Chuchle and Slivenec south from Prague.

Podává — By

VÁCLAV RŮŽIČKA

v Praze. — Prague.

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dolomitový důl u Slivence a jeho okolí.
Dolomite mine at Slivenec and surrounding.

Několik poznámek ke stratigrafii a tektonice staršího palaeozoika mezi Velkou Chuchlí a Slivencem.

Several remarks to the stratigraphy and tectonic conditions of the older palaeozoic roks between Velká Chuchle and Slivenec south from Prague.

Podává — By
VÁCLAV RŮŽIČKA
v Praze. — Prague.

V květnu loňského roku (1924) zúčastnil jsem se universitní geologické exkurse, konané pod vedením pana prof. Dr. *R. Sokola* do *Přídoli* a to specielně do dolomitových dolů *Pražské železářské společnosti,* která laskavě dovolila účastníkům exkurse prohlídku dolů. Při vstupu do dolů upozornil nás vedoucí inženýr pan *A. Klímek* na to, že *Kodymův* profil v místech, kde znázorňuje území dolů, není správný, neboť v místě tom není jeden pruh dolomitu zapadající na jihovýchod, nýbrž mohutná antiklinála o příkře skloněných ramenech. O tom jsme se pak v dolech také skutečně přesvědčili. Pan prof. *Dr. R. Sokol* pověřil mne tehdy úkolem, abych o této věci napsal krátkou zprávu, která by zaznamenala zmíněný fakt. Svěřeného mi úkolu jsem se ujal a záhy jsem poznal, že nestačí krátká zmínka, protože tato věc není jediná, kterou bude nutno změniti. Nové poznatky, jež jsem získal, dovoluji si zde uvésti; týkají se stratigrafie i tektoniky.

*

Území, které naše geologická mapa zachycuje, je jedním ze stratigraficky a hlavně tektonicky nejzajímavějších míst v *Barrandeu. O. Kodym,* který nedávno tam mapoval, praví dokonce, že je nejenom jedním z míst nejdůležitějších, ale také i nejobtížnějších.[1])

Tento kraj mezi *Velkou Chuchlí* a *Slivencem* jest ode dávna zván v geologické literatuře *Přídolím,* ač katastr, na kterém je zbudována vá-

---

[1]) *O. Kodym:* Tektonika staršího palaeozoika v okolí *Slivence,* zejména *v Přídoli,* jižně od *Prahy.* Rozpr. Čes. Ak. XXIX. 1920. Praha.

penka, se zove »*Na dolech*«, kteréžto označení jsem i já v mapě užil. Jméno to je také obecně užíváno a označení »*Přídolí*« lid snad ani nezná.

Profily vedené tímto územím patří mezi nejstarší a nejčastější profily v oblasti *Barrandea*.[2] [3] [4] [5] Mimo tyto práce (viz petit) o *Přídolí* jednají,[6] [7] neb se o něm zmiňují,[8] [9] po případě naň se odvolávají [10] publikace níže uvedené.

Hranice naší mapky jsou na všech čtyřech stranách umělé. Severní hranice probíhá kotou 331, východní 297, jižní kotou 276; hranice západní je zvolena volně. Ze starších map geologických nalezneme celé naše území na mapě *Krejči-Helmhackerově*,[11] [12] *Počtově*[13] a na listu »*Praha*« z mapování geologického ústavu vídeňského. Všechny tyto mapy kreslí naše území toliko v geologickém přehledu a neodpovídají tedy skutečnosti, ano se s ní i často rozcházejí, hlavně v podrobnostech. Z novějších map krajinu mezi *Velkou Chuchlí* a *Slivencem* zachycuje mapa *Kodymova* [14] a nepatrnou část severovýchodního cípu naší mapky najdeme na mapě *Matouškově*.[15]

Podáme především stratigraficky přehled palaeozoických vrstev, pokud jsou v rámci naší mapky zastoupeny a pokud tomuto úkolu s dostatek nevyhověla práce *Kodymova*.[16]

Ordovicien, vyvinutý na východě, je zastoupen svou nejmladší částí

---

[2]) *J. Krejči:* Geologie čili nauka o útvarech zemských se zvláštním zřetelem na krajiny Československé. Praha 1877.

[3]) *J. Krejči* u. *K. Feistmantel:* Orographisch-geotektonische Übersicht des silurischen Gebietes im mittleren Böhmen. Praha 1885.

[4]) *F. Katzer:* Geologie von Böhmen. Praha 1892.

[5]) *F. Počta:* Geologické výlety po okolí pražském. Praha 1898.

[6]) l. c. 1.

[7]) *O. Kodym:* Stratigrafické příspěvky z jihozápadního cípu listu Praha. Rozpr. Čes. Ak. XXX. 1921. Praha.

[8]) *O. Kodym:* Nejjižnější zbytky křídové v okolí pražském. Rozpr. Čes. Ak. XXXII. 1923. Praha.

[9]) *R. Kettner:* Příspěvek ku stratigrafii bránických vápenců (Gg_1) nejbližšího okolí pražského. Rozpr. Čes. Ak. XXVI. 1917. Praha.

[10]) *O. Kodym:* Slivenecké mramory a jejich poměr k vápencům bránickým (G—g_1). Rozpravy Čes. Ak. XXVIII. 1919. Praha.

[11]) *J. Krejči—R. Helmhacker:* Geologická mapa a geologické profily okolí pražského. Praha 1885.

[12]) *J. Krejči—R. Helmhacker:* Vysvětlení geologické mapy okolí pražského. Praha 1885.

[13]) *F. Počta:* Geologická mapa Čech. Sekce V. Širší okolí pražské. Praha 1902.

[14]) l. c. 1.

[15]) *O. Matoušek:* Geologická mapa jižně od Prahy. — Geologický průvodce po pražském okolí. I. Exkurse do Chuchle. Věda přírodní. IV. Praha 1924.

[16]) l. c. 7.

a to *Kralodvorskými břidlicemi* $d_{5\alpha}$ a *Kosovskými křemenci* $d_{5\beta}$, které jsou vyvinuty celkem úplně normálně;[17]) bylo by tedy zbytečno uváděti jejich charakteristiky. Poznamenávám jen, že obě pásma jsem na rozdíl od *Kodyma* mapoval odděleně.

Silur, dobře od *ordovicienu* oddělený, počíná souvrstvím *Chuchelských břidlic* e_1. K tomuto pásmu — podobně jako *Kodym* [18]) — čítám všechny vrstvy podložené dolomitu, kterým tedy počíná pásmo e_2. Pěkný odkryv ve svrchnějším a nejsvrchnějším e_1 najdeme na vjv. od koty 299, kde (ve stráni otevřené k jihovýchodu) se nalézá obecní lom na černé dlaždičské kostky do pražských chodníků. Slinité a vápnité břidlice a vápence horší jakosti střídají se zde s podlouhlými čočkami a s polohami pevného vápence, dobře štípatelného, který se proto upotřebuje k zmíněnému již účelu. Dále za lomem, směrem na severovýchod, vystupuje stále podél cesty pásmo e_1. Poslední odkryv najdeme v něm na pravo od vozové cesty v místech, kde cesta uhýbá ze severovýchodního směru na západ. Pásma e_2, jak kreslí *Kodym*, jsem v těch místech nikde nenašel, třebaže proti výkladu o brachyantiklinální stavbě pásma e_1 nelze celkem ničeho namítati. Křídla brachyantiklinály jsou ovšem ještě zvrásněna ve stejném smyslu. Pásmo e_2 zjistil jsem tam toliko v jediném pruhu, probíhajícím výše ve stráni nad lomem, který ovšem patří brachysynklinále obklopující kotu 299. Druhý pruh pásma e_2 o směru 60^0 v., počíná nedaleko východní hranice naší mapky v *Lázeňském háji* a domnívám se, že jest uložen v podstatě synklinálně. Vápenec zde již obsahuje hořčík jen v nepatrném procentu, je světle šedý, živičnatý a chová hojné zkameněliny. Co se týče pásma e_1 mezi kotami 297 a 299, je vyvinuto podobně jako ve stráni hledící na jih v údolí probíhajícím na západ od *Malé Chuchle.* Jako tam i zde najdeme hlavně ve slinitých břidlicích hojné úlomky *Pterygotů* a zvláště rodu *Ceratiocaris.*

Budňanské vápence e_2 vyvinuty jsou v rozsahu naší mapky v podobě dolomitů a vápenců jim nadložních, slabě dolomitických, živičných, světle šedých až šedých a chovajících zkameněliny. Dolomit sám — mělo by se spíše říci dolomitický vápenec, jelikož neobsahuje nikdy 21·7% *Mg,* nýbrž obsah hořčíku kolísá mezi 16—20% [19]) — zkamenělin téměř úplně postrádá.[20]) Nejvíce hořčíku obsahuje dolomit na spodu, kdežto směrem

---

[17]) *O. Matoušek:* Vltava mezi Modřany a Barrandovou skalou. Časopis Musea král. Českého. 1922. Praha.

[18]) »*Vápence budňanské* e_β (= e_2) jsou v *Přídolí* vyvinuty abnormálně v podobě dolomitu. Ačkoliv« .... atd. (l. c. 7).

[19]) Za zhotovení analys děkuji příteli R. N. C. *R. Jirkovskému.*

[20]) Tak v dolech *Pražské železářské společnosti* během posledních let nalezeno bylo jen něco málo *Orthocerasů* a to ještě tak rozrušených, že nebylo ani možno je uschovati.

k nadložnímu vápenci poznenáhlu ho ubývá. Mocnost jeho kolísá mezi dvěma až šesti metry. Někde čistého dolomitu nenajdeme vůbec a místo jeho hned zaujme nadložní vápenec. Průměrná mocnost dolomitu činí 3—5 *m*. Dolomit má barvu šedou, šedavě žlutou až čistě žlutou. Lom jeho je lasturnatý a někde mimo to rozpadá se úderem v tenké, kosodélně omezené tabulky. Na obou plochách často najdeme manganové dendrity.



Celkový pohled na území severozápadně od koty 299. (Fotogr. autor.) General view over dolomite formations N. W. of cote # 299. (View taken by author.)

O dutinách po případě slabounkých proplástvech, vyplněných uhelnými látkami, se šířiti nebudu.[21])

Mocnost celého pásma e_2 odhaduji na 10—20 *m*,[22]) s výjimkou pruhu probíhajícího jihovýchodně od koty 323, který je mocnější. Dolomit těží hornicky *Pražská železářská společnost* a to severozápadně od koty 299, kde vrcholící brachyantiklinála, jejíž ramena zapadají pod úhlem 70—80° i více, jest ovšem místem nejvhodnějším.[23])

---

[21]) Autory, kteří psali o tomto thematu, najdeme uvedeny v práci citované pod č. 7.

[22]) Mocnost 30—40 *m*, jak udává *Kodym*, pokládám za tuze velikou, aspoň pokud se týče našeho kraje.

[23]) Vznik dolomitu až do dnešních dob je stále ještě nejasný. Vedle starší domněnky, že vzniká pneumatohydatogenní metamorfosou vápenců, počínají se objevovati názory odchylné a jsou to zvláště *Skeats* a *E. Phillippi*, kteří se do-

Vápence Lochkovské e_3 jsou jemně krystalické a barvy tmavošedé a obsahují četné desknaté rohovce. Lavice vápencové střídají se s vložkami slinitých a vápnitých břidlic barvy tmavošedé až hnědé a to tak, jakoby se lavice vápencové poznenáhlu vyklinovaly a prostory takto vzniklé zaujaly by slinité břidlice a naopak. Směrem k podloží hnědavé slinité břidlice počínají převládati a tehdy objevují se v nich vedle rohovců černých také rohovce růžové, uložené stejně jako rohovce celého pásma. Zajímavo jest, že nalezl jsem ve svrchnějším e_3, jihozápadně od koty 299, ve stráni naproti vápence několik metrů mocnou polohu či spíše ohromnou čočku písčitého slínu až vápence barvy žlutavě hnědé, proloženou tence bochníkovitými polohami čistého tmavého vápence; také černé rohovce najdeme zde zvlášť hojně. Celý zjev poukazuje ovšem na to, že svrchnosilurské moře — alespoň v oné krajině — bylo poměrně mělké. Mocnost zvrásněných vápenců *Lochkovských* odhaduji na 40—50 *m*.

Pásmo *f*, kterým počíná devon, nedá se ostře od *vápenců Lochkovských* odděliti, poněvadž přechod mezi oběma pásmy je pozvolný. Vápence pásma e_3 stávají se světle šedými a krystaličtějšími až zrnitými a také rohovce vymizí. Toto vymizení rohovců je vzato za svrchní hranici vápenců *Lochkovských*. Následující vápence pásma *f* jsou světle šedé, zrnité až hrubokrystalické. Jsou úplně podobny spodnější části pásma *f* u *Barrandovy skály* a mají celkem mocnost kolem tří metrů. Kdežto však severně od *Barrandovy skály* šedivé krystalické vápence stávají se narůžovělými,[24]) zde tyto šedivé vápence přecházejí přímo do *vápenců Bránických*,[25]) ztrácejíce svoji krystalickou povahu a nabývajíce zvolna charakteru hlíznatých vápenců pásma g_1. Pásmo to je nejmladším, na den vystupujícím členem staršího palaeozoika v rozsahu mapy. Je vyvinuto normálně.

Přistoupíme k poznámkám tektonickým.

---

mnívají, že vznik dolomitu se děje bez účasti vyvřelin, jmenovitě v mělkých vodách. (*K. Andrée:* Das Meer und seine geologische Tätigkeit. — V knize *W. Salamon:* Grundzüge der Geologie. Band I., Teil II., Stuttgart, 1924.) Tomu myslím, by také spíše nasvědčovaly dolomity pásmu e_2, ačkoliv není snad vyloučeno ani nějaké stanovisko zprostředkující, aspoň pokud se týče pochodů posteruptivních.

[24]) *J. Woldřich:* Das Prokopital südlich von Prag. Jahrbuch d. k. k. Reichsanstalt, 1918, 68, Bd. 1. u. 2. Heft. — Též l. c. 9.

[25]) l. c. 10; obsáhlou literaturu, týkající se pásem *f* a g_1, uváděti nebudu. Čtenář ji najde citovánu jednak v pracech uvedených pod poznámkou č. 1. a 7., jednak v Kodymově Geologické mapě okresu Berounského. (Knihovna státního geologického ústavu Československé republiky. Praha, 1921.) — Hranice mezi silurem a devonem neodpovídá zajisté přesně rozhraní mezi vrstvami e_3 a *f*. Zdá se, že část souvrství e_3 bude nutno přece přičísti devonu; rohovce, jichž stratigrafická výše je značně proměnlivá, nedovolují bezpečného stanovení hranic.

Výše zmíněné geologické profily naším územím vedené ukazují jasně, jak vyvíjel se náhled geologů na stratigrafii a tektoniku krajiny mezi *Velkou Chuchlí* a *Slivencem.* Nejstarší profil vedl zde *J. Krejčí*[26]) a téměř totožný je profil *J. Krejčího* a *K. Feistmantela,*[27]) který se podstatně liší od prvého jen tím, že oba stupně *Barrandovy* etáže *f* nebyly kresleny dohromady, nýbrž odděleně. Také profil *Počtův*[28]) je v celku stejný s profilem posledně jmenovaných badatelů. Zajímavé odchylky ukazuje již profil *Katzerův,*[29]) který prvý poznal, že před *Slivencem,* jihovýchodně koty *323* (u *Kodyma* kota *328*) pásmo *f* není zastoupeno. Jelikož existenci směrného poklesu nezjistil, vyložil to — soudě dle profilu — tak, že mezi pásmem e_3 a g_1 je stratigrafický hiat, jehož počátek by se nalézal někde v místech kolem osy přídolské brachysynklinály, protože v jejím jihovýchodním křídle v profilu pásmo *f* (Barrandovo Ff_2) ještě zakresluje, ale ne již v křídle severozápadním. Všechny tyto profily — nehledě ke změněným rozdílům — shodují se v tom, že ve všech najdeme zakreslený mohutný zlom a to v antiklinále, tvořené břidlicemi e_1.[30])

Existenci směrného poklesu, probíhajícího nedaleko na jihovýchod koty *323*, připustil prvý *Kettner,*[31]) který konstatoval, že »... jižně *Barrandeovy* skály probíhá podélný zlom, jenž jde do horní části Přídolí, kde pod sliveneckým hřbitovem způsobuje přímý styk břidlic graptolithových (e_1) s hliznatými *bránickými vápenci* a krystalickými vápenci pásma *f.*« Náhled ten je tím zajímavý, že na rozdíl od názoru *Kodymova* a mého *Kettner* vůbec nezjistil v nadloží zlomové plochy *vápence Budňanské*, e_2. Vskutku nalezl jsem vedle pásma e_2 na místě, o němž mluví *Kettner* ještě spodní část pásma e_3, vyvinutou v podobě písčitého slínu a slinito-vápnitých břidlic a chovající četné rohovce, převážně barvy růžové. Podle *Kettnera* se tedy stýká pásmo e_1 — patrně tedy na povrchu — s pásmem *f,* jež ovšem leží souhlasně pod *vápenci Bránickými* g_1; oba tyto stupně by byly v podloží zlomové plochy. Ve skutečnosti pásmo *f,* uložené pod *vápenci Bránickými,* nikde v uvedeném místě na den nevystupuje a mohutný pruh vápenců g_1, probíhající na jihovýchod od koty *323*, stýká se s *vápenci Lochkovskými* neb *Budňanskými,* pokud ovšem ssuť dovoluje pozorovati.

---

26) l. c. 2.

27) l. c. 3.

28) l. c. 5.

29) l. c. 4.

30) Výklad *Krejči—Feistmantelův* (l. c. 3) je vzhledem k dnešním názorům pochybený; ostatně zlom toho rázu nebyl v těch místech zjištěn ani *Kodymem* ani mnou.

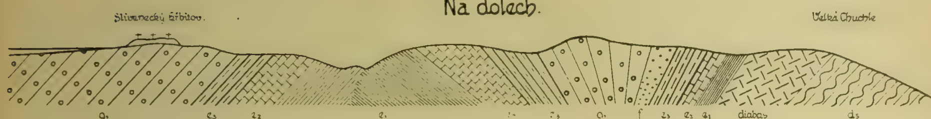
31) l. c. 9.

I.



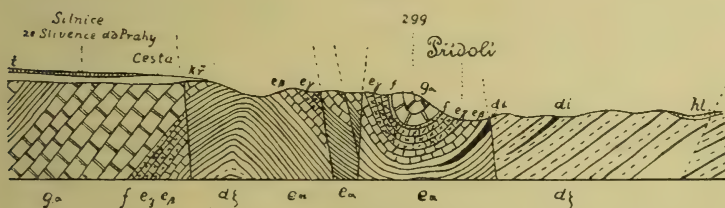
J. Krejčí 1877.

II.



F. Katzer 1892.

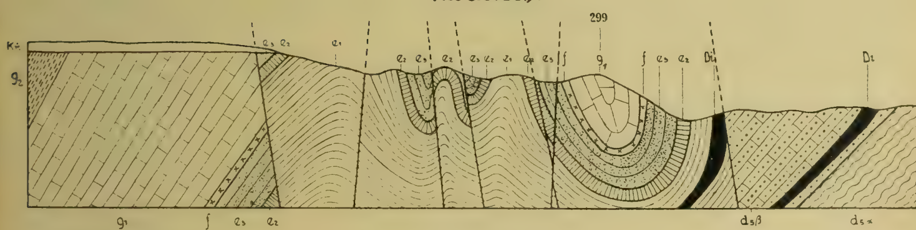
III.



O. Kodym 1920.

IV.

Na dolech.



V. Růžička 1924.

Cross-sections of the district »N a d o l e c h« south from Prague showing the conceptions of the structure from the stratigraphical and tectonical point of view.

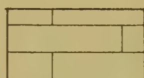
Profil autorův (měřítko 1 : 11.000) je veden stejným směrem jako profil Kodymův.

The direction of author's section (# IV., scale 1 : 11.000) is the same as that of Mr. Kodym (# III.).

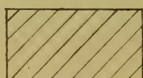
Slivenec
331
323
315
299
297
276

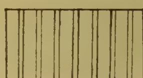
Geologická mapa
„Na dolech."
IX.–XI. 1924.
V. Růžička.


$d_{5\alpha}$


$d_{5\beta}$

Ordovicien.

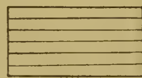

e_1


e_2


e_3

Silur.

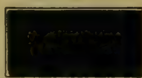

f


g_1

Devon.


štěrk suť recent

Kaenozoikum.


Diabas.

Měřítko 1 : 14.000

Všimneme-li si nyní profilu *Kodymova,* najdeme zajímavé změny na severozápad od koty *299,* kde jsme až dosud na všech profilech nalezli značně mocné pásmo e_2, tvořící severozápadní, konkordantně mezi pásmy e_1 a e_3 uložené křídlo přídolské brachysynklinály. Omyl starších badatelů je ovšem dnes bezesporný, ale ani profil *Kodymův* v těchto místech neodpovídá skutečnosti. Další profil *Kodymův,* vedený rovnoběžně s prvým,



Vrchol těžné brachyantiklinály dolomitu pásma e_2 (doly Pražské železářské společnosti) ze severovýchodu v t. zv. hlubokých jamách. Foto prof. Dr. R. Sokol, při exkursi v květnu 1924. — Top of the dolomite dome. Silur e_2. (Property of Pražská železářská společnost — Prague.) View from *NE*, taken in May 1924 by prof. R. Sokol.

výškovým bodem *323,* nebudeme bráti v úvahu, protože v místě pro nás nejdůležitějším tertierní štěrky pokrývají souvisle vrstvy palaeozoické a tu je ovšem nemožno říci, které vrstvy to jsou. Jeden pruh *Lochkovských vápenců,* zapadající k severozápadu, to však rozhodně nebude.

O našem území severozápadně od koty *299, Kodym* praví, že vedle poruch, podle nichž se udály zdvihové pohyby směrem od severu k jihu — což je charakterem směrným zdvihů v jižním křídle *Barrandea*[32]) [33]) — najdeme v *Přídoli* mezi kotami *299* a *328* dva přesmyky, u nichž se udál

---

[32]) *O. Kodym:* Poznámky ke směrným přesmykům v Barrandienu. (Příspěvek k poznání mechanismu vrásnění.) Rozpr. Čes. Ak. XXX. 1921, Praha.

[33]) *O. Kodym:* Tektonická studie v údolí Prokopském a jeho okolí u Prahy. Rozpr. Čes. Ak. XXVII. 1918, Praha.

pohyb právě opačný, od jihu k severu. S tím ovšem možno jen souhlasiti,[34]) podobně jako s míněním, že oba přesmyky jsou rázu lokálního a mají svůj původ v místní synklinále. Naproti tomu je však naprosto mylné pozorování *Kodymovo,* že jsou zde dva na jihovýchod zapadající pruhy *vápenců Budňanských* e_2 a ty že byly přesmyknuty tak, že podle severnějšího přesmyku bylo vyzdviženo e_2 nad e_3, podle jižnějšího e_1 nad e_2. Pásmo e_2 netvoří tam totiž dva na jihovýchod zapadající pruhy — jak kreslí *Kodym* — nýbrž dvě brachyantiklinály, které byly postiženy přesmykovým pohybem [35]) a to tak, že podle zlomu severovýchodnějšího přechází v přesmyk brachyantiklinála, podle jihovýchodnějšího brachysynklinála. Přesmykový pohyb byl, jak již bylo řečeno, od jihovýchodu na severozápad. Obě dvě antiklinály (viz celkovou fotografii) jsou dobře patrny ze silnice téměř na prvý pohled a mimo to vrchol těžné antiklinály se jeví úplně zřetelně a to zvláště ze strany severovýchodní v t. zv. hlubokých jamách (viz fotografii). Před lety, hlavně za války, kdy byla spotřeba dolomitu větší, byla — jak nám při exkursi p. profesora *Sokola* sdělil pan šichtmistr *Pacovský* a jak mi později potvrdil i pan prof. *Kettner* — antiklinála tato odkryta ještě mnohem lépe a to také ze strany jihozápadní.

Pokud se týče poruch mladších, práce *Kodymova* je s dostatek vyčerpává.[36]) Podotknu jen následující: Účinek dvou severojižních zlomů mapa *Kodymova* přeceňuje. Platí to zvláště pro zlom severnější, kde jsem zjistil, díky dobrému odkrytu v dolomitech u silnice, že v těch místech činí zdánlivý pohyb východní kry k severu toliko 5 až snad (maximálně — tato nejvyšší hodnota zanesena do mapy) 10 *m.*[37]) Četné, tektonicky celkem nevýznamné poruchy podélné i napříč jdoucí, najdeme zvláště v těžné brachyantiklinále pásma e_1 a e_2, tedy antiklinále kotě 299 vzdálenější, kde lože dolomitu je mnohdy příčnými zlomy posunuto i o několik metrů. Všechny zlomkové plochy jsou zaplněny dílem dolomitickým mylonitem, dílem brekcií s úlomky dolomitu několik *mm,* po případě *cm* velikých. Hmota ta je barvy špinavě šedožluté, vlhká až místy vodou nassátá a přichází v takovém množství, že je nutno vyvážeti ji z dolů

---

[34]) Alespoň potud, pokud přijímám zde zatím představu o přesmykové stavbě *Barrandea.*

[35]) V jihovýchodním křídle brachyantiklinály, kotě 299 bližší, najdeme dobře patrný zlom, zaplněný dolomitickým mylonitem, dílem brekcií, stejné jakosti, jak bude níže uvedeno. Zdá se, že je stejného charakteru jako zlomy severnější, ač ovšem k nějakému vyslovenému pohybu zde nedošlo.

[36]) l. c. 1.

[37]) Hodnota 75 *m,* která vyplývá z mapy Kodymovy, je tedy rozhodně příliš vysoká.

na vozících. (Vyvážená drť je ovšem z části také odpadkový materiál, vzniklý při dobývání dolomitu.) Všechny tyto zjevy nasvědčují tomu, že pochody horotvorné byly velice mohutné a že pevný dolomit jim zvláště intensivně vzdoroval.

Příčné poruchy pokládám za zjev lokální a vznik jejich patrně úzce souvisí s vytvořením brachysynklinály přídolské;[38]) pravděpodobně budou vzhledem k brachysynklinále rázu spíše paprsčitého, tedy podobného, jako nalézáme v *Hlubočepech.*

Mimo vytknuté rozdíly stratigrafické a tektonické liší se moje mapa od *Kodymovy* ještě ve vymapování území na levo od silnice, směřující mezi kotami 299 a 315 na severozápad; tím také podstatně se v těchto místech zmenšuje, ne-li téměř ruší účinek příčného zlomu,[39]) [40]) jehož význam ovšem se stále zvětšuje směrem na severozápad. Jinak obě mapky se celkem shodují a platí to specielně pro útvary pokryvné; za hranici jsem ostatně — hlavně v části na jih od silnice — volil většinou třistametrovou vrstevnici.[41])

* *

*

Závěrem děkuji srdečně panu prof. dr. *R. Sokolovi,* při jehož exkursi jsem čerpal podnět k této práci. Panu dr. *O. Matouškovi* vzdávám díky za laskavé zapůjčení potřebné literatury.

Geologický ústav Karlovy university v Praze. Únor 1925.

---

[38]) Přídolskou brachysynklinalu pokládám za pokračování pásu, který počíná v jihovýchodní stráni *Barrandovy skály,* kde pásmo g_1 a *f* a částečně též vrstvy podložní tvoří dávno známou synklinálu. Odtud počínaje rozšiřoval by se tedy směrem k jihozápadu, získávaje stále na významu jako synklinála, až by vytvořil velkou přídolskou brachysynklinálu.

[39]) *O. Kodym:* Předběžná zpráva o účincích druhé fáse variského vrásnění v Barrandienu. Rozpr. Čes. Ak. XXVIII. 1919, Praha.

[40]) *O. Kodym:* Druhá fáse vrásnění variského v Barrandienu. Sborník st. geolog. ústavu čs. republiky. Ročníky 1919—1920. Svazek I. Praha.

[41]) Upozorňuji též při této příležitosti na travertiny, které možno nalézti v jednom z příčných údolíček na západ od vápenky. Jsou již úplně recentní.

Summary.*)

The inspiration to this work I acquired during the geological excursion of the Charles University conducted by prof. *R. Sokol* in May 1924, to the dolomite mine at *Slivenec,* south from *Prague.* The purpose of this work should be the correction and supplement of the geological mapping of this district done by *Mr. O. Kodym* in 1920, chiefly to correct its geological profiles, and also to present the stratigraphical and tectonical review as far as it omitted it.

This resumé. I shall limit to the correction of *Mr. Kodym's* profile of the dolomite mine situated *N. W.* of cote # 299, which I consider especially wrong. *Mr. Kodym* fond, of course, correctly two overthrusts with which the movement occured from *S. E.* to *N. W.* therefore — according to the *Kettner-Kodym* view of the structure of the *Barrandeum***) — quite opposite than is the rule in the *S. E.* part of the *Barrande basin.* But *Mr. Kodym* is admirably wrong when he thinks that the result of those overthrust-movements was the origin of two strips (see profile # III.) of the *Budňan-limestones called* e_2 dipping to S. E. (These limestones are developed in this district abnormally as dolomites.) In fact we find there two elongated domes faulted and overthrusted. Both faults are of purely local occurrence and cannot be regarded in connection with the whole structure of the *Barrandeum.*

Geological Department of the Charles University at Prague.

February 1925.

*) For the translations I owe my warmest thanks to Mr. *V. Skřivánek.*

**) *Barrandeum* is the name of the region described in *Barrande's* classical work: »Systême silurien du centre de la Bohême«.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 32.

Q. VETTER:

Sur la conique imaginaire générale dans le plan (théorie et construction).



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 32.

Q. VETTER:

Sur la conique imaginaire générale dans le plan (théorie et construction).



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Q. Vetter:

Sur la conique imaginaire générale dans le plan (théorie et construction).

I. Introduction.

La conique imaginaire générale dans le plan, que nous appellerons seulement „conique imaginaire générale“, était définie jusqu'à présent par deux manières.[1]) La première définition la considère ou comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectives ou comme l'enveloppe des droites qui joignent deux à deux les points homologues de divisions projectives, où les supports et les élements peuvent être imaginaires.[2])

[1]) Je désignerai la littérature brièvement par des abbreviations suivantes:

B = K. Bobek: Die Brennpunktscurve des Kegelschnittsbüschels, Mon. f. Math. u. Phys., III, (1892), p. 309—317.

BL = H. Brocard et T. Lemoyne: Courbes géométriques remarquables planes et gauches, t. I. Paris, (1919).

C = L. Cremona: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných, Praha, 1873.

H = J. L. S. Hatton: The Theory of the Imaginary in Geometry, Cambridge, (1920).

JN = V. Jarolímek: Některé druhy kuželoseček imaginárních. Rozpr. Čes. Akad. (1912), čís. 81.

JK = V. Jarolímek: K theorii imaginárních křivek a ploch druhého stupně. Čas. pro pěst. mat. a fys. XLVI, (1917), p. 113—121.

JZ = V. Jarolímek: Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru, sv. III., Praha, (1914).

Sch = H. Schrötter: Über Curven 3ter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3ter Ordnung. Math. Ann. V. (1872), p. 50—82.

S = R. Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften, Bd. I, Leipzig, (1908).

SSS = J. Steiner, H. Schrötter, R. Sturm: Die Theorie der Kegelschnitte 3. Aufl., Leipzig, (1898).

VH = Q. Vetter: Harmonická imaginárná čtveřina a obecná imaginárná kuželosečka, Výr. zpr. čes. reálky, Lipník, (1909), p. 3—13.

VL = Q. Vetter: Le coniche e le quadriche imaginarie generali, Giorn. d. mat., LXI, (1923), p. 149—156. Malheureusement, étant en voyage, je ne pouvais corriger les épreuves de cet article, et pour celà beaucoup de fautes d'impression se sont glissées surtout dans les formules.

[2]) VH, H 124 ss.

La deuxième manière définit la conique imaginaire générale comme une courbe, qui coupe chaque droite réelle en deux points généralement imaginaires non-conjugués, c'est comme une courbe dont l'équation a des coefficients complexes.[3])

Mais on peut définir la conique imaginaire générale encore par une troisième manière, c'est par une définition analogique à la définition de Staudt des points et des droites imaginaires. Cette définition peut servir de la base de la solution graphique des divers problèmes. Les constructions ainsi expliquées ne sont plus compliquées que les constructions fondées sur la définition première, plutôt au contraire, mais elles ont aussi une importance théorique. M. Hatton[4]) ne résout pas les questions constructives de nos coniques, cependant M. Jarolímek[5]) ne cherche que les autres éléments réels, si en sont donnés 5 ou si sont données les axes réelles ou les diamètres conjugués réels et deux éléments réels ou le centre réel avec trois éléments réels. Il regarde les positions spéciales de ces éléments. Mais la généralité de ses solutions, certainement très intéressantes, est insuffisante, parce qu'il ne connaît qu'une part du théorème fondamental des coniques imaginaires générales, que nous citons plus loin, et qu'il divise ces coniques selon la réalité des axes et des points d'intersection à la droite de l'infini.

II. La définition de la conique imaginaire générale et ses conséquences.

Les travaux antérieurs[6]) ont démontré que les coniques imaginaires générales se divisent selon la réalité de leurs éléments en trois sortes:

(*a*) La conique imaginaire générale a 4 points réels, 4 tangentes réelles et un triangle polaire réel.

(*b*) La conique imaginaire générale a 2 points réels et 2 points imaginaires conjugués, 2 tangentes réelles et 2 tangentes imaginaires conjuguées et un triangle polaire semiréel.[7])

(*c*) La conique imaginaire générale a 2 paires des points imaginaires conjugués, 2 paires des tangentes imaginaires conjuguées et un triangle polaire réel.

Tous les autres points et tangentes sont imaginaires non conjuguées et tous les autres triangles polaires sont imaginaires.

---

[3]) JK, JN, JZ p. 80, H p. 144 ss. et VL.

[4]) H 124 ss.

[5]) JZ p. 80—84 et 86—101.

[6]) VH p. 12, VL p. 149, H p. 144. Une part de ce théorème v. aussi JZ p. 80 ss. et JK p. 113 ss.

[7]) On trouve cette dénomination chez H p. 20.

On peut mener par les quatre points réels ou imaginaires conjugués du théorème précédent un faisceau ponctuel des coniques et inscrire au quadrilatère des tangentes réelles ou imaginaires conjuguées de ce théorème un faisceau tangentiel des coniques dont les éléments peuvent être projectifs. Aussi les coniques imaginaires générales peuvent être des éléments de ces faisceaux et pour cela on peut les définir comme il suit et prononcer tout de suite quelques conséquences de cette définition:

(1) Les coniques doubles d'une involution elliptique dans un faisceau ponctuel réel des coniques sont deux coniques imaginaires générales conjuguées Σ et Σ^*, qui passent par les 4 sommets réels ou imaginaires conjugués du faisceau.

(2) Les coniques doubles d'une involution elliptique dans un faisceau tangentiel réel des coniques sont deux coniques imaginaires générales conjuguées Σ et Σ^*, qui touchent les 4 côtés réels ou imaginaires conjugués du quadrilatère circonscrit.

(3) Les deux coniques imaginaires générales conjuguées se distinguent par le sens dans l'involution déterminante.

Les faisceaux des coniques mentionnés soient appellés „faisceau déterminant ponctuel et faisceau déterminant tangentiel", les sommets **ABCD** du faisceaux déterminant ponctuel soient appelés sommets „du quadrangle inscrit fondamental" et les côtés **a'b'c'd'** du faisceau déterminant tangentiel côtés „du quadrilatère circonscrit fondamental". J'ai appellé[8]) le triangle polaire réel ou semiréel „triangle polaire caractéristique".

(4) On peut considérer chaque conique imaginaire générale Σ comme une conique double d'une involution elliptique d'un certain faisceau déterminant ponctuel et comme une conique double d'une involution elliptique d'un certain faisceau déterminant tangentiel.

(5) Une conique imaginaire générale Σ est déterminée par le quadrangle inscrit fondamental et par l'involution des pôles d'un de ses côtés par rapport aux coniques du faisceau ponctuel déterminant munie par un sens. Cette involution représente le pôle par rapport à Σ.

(6) Une coniqne imaginaire générale est déterminée par le quadrilatère circonscrit fondamental et par l'involution des polaires de son sommet par rapport aux coniques de faisceau déterminant tangentiel munie par un sens. Cette involution représente la polaire de ce sommet par rapport à Σ.

Les involutions elliptiques peuvent être remplacées par d'autres involutions elliptiques projectives à celles-là.

[8]) VL, p. 150.

On peut facilement déduire quelques relations entre les éléments de la conique imaginaire générale et entre les éléments correspondants des coniques des faisceaux déterminants en s'appuyant aux propriétés connues des faisceaux des coniques. Je veux en citer quelques unes,[9]) en éliminant par avance les cas spéciaux de la conique imaginaire générale, lesquels je me réserve de traiter autrefois. Par concision et pour éviter la répétition, je supprimerai en parlant des involutions, les mots „munies par le sens correspondant", par lesquels on distingue les coniques imaginaires générales conjuguées Σ et Σ^*.[9])

(7) La conique imaginaire générale Σ coupe la droite **m**, qui ne passe pas par un sommet du quadrangle inscrit fondamental, en deux points imaginaires non-conjugués **X** et **Y**. C'est une couple de l'involution $[\mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k]$ dans laquelle les coniques du faisceau déterminant ponctuel coupent **m**. Le centre **Z** de la distance $\overline{\mathbf{XY}}$ est le point double de l'involution $[\mathbf{Z}_k]$, où $\mathbf{Z}_k$ sont les centres des distances $\overline{\mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k}$. (SSS 169).[10])

(8) Les tangentes **x** et **y** d'une conique imaginaire générale passant par un point réel *M* qui n'est pas situé sur le côté du quadrilatère circonscrit fondamental, sont deux droites imaginaires non-conjuguées. C'est la couple de l'involution $[\mathbf{x}'_k \, \mathbf{y}'_k]$ des tangentes des coniques du faisceau déterminant tangentiel, passant par **M**. Le rayon **z**, qui divise la couple **x y** harmoniquement avec une droite quelconque **u**, menée par **M**, est le rayon double de l'involution $[\mathbf{z}'_k]$, où la paire $\mathbf{z}'_k\mathbf{u}$ divise harmoniquement $\mathbf{x}'_k \, \mathbf{y}'_k$. (SSS 209).

Soient **X**, **Y** et **X***, **Y*** les points d'intersection de la droite **m** et des coniques imaginaires générales conjuguées Σ et Σ^* et soient **Z** et **Z*** les centres des distances $\overline{\mathbf{XY}}$ et $\overline{\mathbf{X^*Y^*}}$. Selon le théorème (7) les points **Z** et **Z*** sont imaginaires conjugués. Soient $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ les points doubles de l'involution, qui est formée par les points d'intersection des coniques du faisceau déterminant ponctuel en **m** et soit $\mathbf{M}_\infty$ le point de fuite de **m**. Il est connu que le quaterne **[ABCD]** est harmonique, si le quaterne des éléments conjugués **[A*B*C*D*]** est aussi harmonique[11]) Parceque **XY** est la paire harmonique commune des paires $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2$ et $\mathbf{Z M}_\infty$ et que **X*Y*** est la paire harmonique commune de $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2$ et $\mathbf{Z^* M}_\infty$, où les points $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sont ou réels ou imaginaires conjugués, sont aussi les points **X**, **X*** et **Y**, **Y*** les points imaginaires conjugués. Par conséquent sont valables les deux théorèmes suivants:

---

[9]) Ces propriétés sont choisies par la majorance de SSS et de la liste publiée dans BL p. 260 ss. Je citerai en paranthèses le numéro du théorème correspondant dans ces livres.

[10]) S p. 151 ss.

[11]) Par ex. VH p. 6.

(9) Si la conique imaginaire générale Σ passe par le point imaginaire **X**, la conique conjuguée Σ^* passe par le point conjugué **X***.

(10) Si la conique imaginaire générale Σ touche la droite imaginaire **x**, la conique conjugué Σ^* touche la droite conjuguée **x***.

(11) Si la droite **m** passe par le sommet du quadrangle fondamental inscrit à une conique imaginaire générale Σ, le point d'intersection **X** de **m** et Σ est représenté par l'involution $[\mathbf{X}_k]$, où $\mathbf{X}_k$ sont les points d'intersection des coniques du faisceau déterminant ponctuel et de **m**. (SSS 175).

(12) Si le point **M** est situé sur le côté du quadrilatère fondamental circonscrit à une conique imaginaire générale Σ, la tangente **x** menée par **M** à Σ est représentée par l'involution $[\mathbf{x}'_k]$, où $\mathbf{x}'_k$ sont les tangentes menées par **M** aux coniques du faisceau déterminant tangentiel.

(13) Si l'on mène par un sommet du quadrangle fondamental inscrit à une conique imaginaire générale Σ deux droites **m** et **n**, qui coupent Σ dans les points **X** et **Y**, la droite de jonction $\mathbf{e} \equiv \mathbf{X}\,\mathbf{Y}$ touche la conique réelle *E*, qui est l'enveloppe des droites de jonction $\mathbf{e}_k$ des points analogiques des coniques du faisceau déterminant ponctuel. La droite **e** est le rayon double de l'involution $[\mathbf{e}_k]$. (SSS 175).

(14) Si l'on mène par deux points **M** et **N** d'un côté du quadrilatère fondamental circonscrit à une conique imaginaire générale Σ les tangentes à cette courbe, leur point d'intersection **E** est situé à la conique réelle E', qui est le lieu des points d'intersection $\mathbf{E}'_k$ des tangentes analogiques des coniques du faisceau déterminant tangentiel. Le point **E** est le point double de l'involution $[\mathbf{E}'_k]$.

(15) Si la conique réelle *K* passe par trois sommets du quadrangle fondamental inscrit à une conique imaginaire générale Σ, le quatrième point d'intersection **X** est représenté par l'involution $[\mathbf{X}_k]$, où $\mathbf{X}_k$ sont les points d'intersection de **K** et des coniques du faisceau ponctuel déterminant. (SSS 175).

(16) Si la conique *K'* touche trois côtés du quadrilatère fondamental circonscrit à une conique imaginaire générale Σ, la quatrième tangente commune de *K'* et Σ est représentée par le faisceau des tangentes communes de *K'* et des coniques du faisceau déterminant tangentiel.

(17) Une conique imaginaire générale Σ coupe une conique réelle **K** en 4 points imaginaires non-conjugués. Le centre des moyennes harmoniques de ce groupe de 4 points de **K** par rapport à un point quelconque **U** de **K** est le point double de l'involution $[\mathbf{C}_k]$, où $\mathbf{C}_k$ sont les centres des moyennes harmoniques des points d'intersection des coniques Σ_k du faisceau ponctuel déterminant à l'égard de **U** et de **K**.

Le nombre des points de ces groupes diminue autant d'unités, combien de sommets du quadrangle fondamental sont situés à **K**.[12])

(18) Une conique imaginaire générale Σ et une conique réelle K ont 4 tangentes communes imaginaires non-conjuguées. Le rayon central des moyennes harmoniques de ces groupes de 4 tangentes de K par rapport à une tangente quelconque **u** de K est le rayon double de l'involution $[c_k]$, où c_k sont les rayons centraux des moyennes harmoniques des tangentes communes aux coniques Σ_k du faisceau tangentiel déterminant et à K par rapport à **u**. Le nombre des tangentes de ces groupes diminue autant d'unités, combien de côtés du quadrilatère fondamental touchent K.

(19) La polaire **m** d'un point **M** par rapport d'une conique imaginaire générale Σ

(*a*) passe par le point **N**, qui forme avec **M** la paire des pôles conjugués en même temps à toutes les coniques Σ_k du faisceau déterminant ponctuel; la polaire **m** est un rayon double de l'involution $[\mathbf{m}_k]$, où $\mathbf{m}_k$ sont les polaires de **M** par rapport à Σ_k, et

(*b*) touche la conique Π', qui est l'enveloppe des polaires $\mathbf{m}'_k$ de **M** par rapport aux coniques Σ'_k du faisceau déterminant tangentiel; la polaire **m** est un rayon double de l'involution $[m'_k]$. (BL 2).

(20) Le pôle **M** d'une droite **m** par rapport à une conique imaginaire générale Σ est situé

(*a*) à la droite **n**' qui forme avec **m** la paire des polaires conjuguées en même temps à toutes les coniques Σ'_k du faisceau déterminant tangentiel; **M** est un point double de l'involution $[\mathbf{M}'_k]$, où $\mathbf{M}'_k$ sont les pôles de **m** par rapport à Σ'_k, et

(*b*) à la conique Π, le lieu géométrique des pôles $\mathbf{M}_k$ de **m** par rapport aux coniques Σ_k du faisceau ponctuel déterminant; **M** est le point double de l'involution $[\mathbf{M}_k]$. (BL 1).

(21) Soit **n** le support réel d'un point imaginaire **M** et soit **N** le pôle de la droite **n** par rapport à une conique imaginaire générale Σ, soient $\mathbf{N}_k$ les pôles de **n** par rapport aux coniques Σ_k du faisceau déterminant ponctuel et $\mathbf{N}'_k$ les pôles de **n** par rapport aux coniques Σ'_k du faisceau déterminant tangentiel. Soit aussi **G** le point réel de la droite $\overline{\mathbf{MN}}$ et les points $\mathbf{H}_k$ et $\mathbf{H}'_k$ soient les points où **n** coupe les droites $\overline{\mathbf{GN}}_k$ et $\mathbf{GN}'_k$, puis soient $\mathbf{h}_k$ et $\mathbf{h}'_k$ les polaires de $\mathbf{H}_k$ et $\mathbf{H}'_k$ par rapport à Σ_k et Σ'_k. Donc la polaire **m** du point imaginaire **M** par rapport à la conique imaginaire générale Σ touche

[12]) SSS č. 175, C str. 27.

(*a*) la courbe de 3ième classe *M'* qui est l'enveloppe des polaires $\mathbf{n'}_k$ et qui touche aussi le support **n** de **M**, et

b) la courbe de 3ième classe *N'*, qui est l'enveloppe des polaires $\mathbf{h}_k$, et qui admet le supporteur **n** pour la tangente double; la polaire **m** coupe **n** en un point imaginaire, qui est représenté par l'involution $[\mathbf{I}_k]$, où $\mathbf{I}_k$ sont les points d'intersection de **n** et des polaires $\mathbf{h}_k$. (Bl 45).

(22) Soit **N** le point réel d'une droite imaginaire **m** et soit **n** la polaire du point **N** par rapport à une conique imaginaire générale Σ, soient $\mathbf{n}_k$ les polaires de **N** par rapport aux coniques Σ_k du faisceau déterminant ponctuel et $\mathbf{n'}_k$ les polaires du **N** par rapport aux coniques Σ'_k du faisceau déterminant tangentiel. Soit aussi **g** le support réel du point d'intersection de **m** et **n** et les droites $\mathbf{h}_k$ et $\mathbf{h'}_k$ soient les droites qui joignent **N** avec les points d'intersection de **g** et $\mathbf{n}_k$ et de g et $\mathbf{n'}_k$, puis soient $\mathbf{H}_k$ et $\mathbf{H'}_k$ les pôles de $\mathbf{h}_k$ et $\mathbf{h'}_k$ par rapport à Σ_k et Σ'_k. Donc le pôle **M** de la droite imaginaire **m** par rapport à une conique imaginaire générale Σ est situé

(*a*) sur la cubique *M*, le lieu des pôles $\mathbf{H}_k$, où est aussi situé le point réel **N** de la droite imaginaire **m**, et

(*b*) sur la cubique *N'*, le lieu des pôles $\mathbf{H'}_k$, qui admet le point **N** pour le point double; la droite imaginaire **MN** est représentée par l'involution $[\mathbf{i}_k]$ où $[\mathbf{i}_k]$ joignent **N** avec $\mathbf{H'}_k$.

(23) Le centre **O** d'une conique imaginaire générale Σ est situé

(*a*) sur la droite **o**, qui passe par les centres des distances des sommets opposés du quadrilatère circonscrit fondamental; **O** est représenté par l'involution $[\mathbf{O'}_k]$ où $\mathbf{O'}_k$ sont les centres des coniques du faisceau déterminant tangentiel, et

(*b*) sur la conique Ω, qui passe par les sommets du triangle polaire caractéristique **P**, **Q** et **R**, et par les points, qui avec **P**, **Q** et **R** divisent harmoniquement les sommets du quadrangle inscrit fondamental; le point **O** est représenté par l'involution $[\mathbf{O}_k]$, où $\mathbf{O}_k$ sont les centres des coniques du faisceau ponctuel déterminant. (BL 3, SSS 228).

(24) Le cercle directeur d'une conique imaginaire générale Σ est un cercle imaginaire générale, c'est une conique imaginaire générale, passant par les points cycliques à l'infini et concentrique à Σ. Ce cercle passe par les points réels ou imaginaires conjugués $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ situés à la perpendiculaire du supporteur du centre **O** de Σ, menée par le centre du cercle circonscrit au triangle polaire caractéristique. Ces points $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ divisent harmoniquement et le pied de la perpendiculaire citée et de son point de fuite et ses points d'intersection avec le cercle circonscrit au triangle caractéristique. (SSS 212).

(25) Les asymptotes d'une conique imaginaire générale Σ touchent deux courbes de 3ième classe, dont l'une A', qui est l'enveloppe des asymptotes des coniques du faisceau tangentiel déterminant, admet la droite de l'infini pour tangente simple, l'autre A qui est l'enveloppe des asymptotes des coniques du faisceau déterminant ponctuel, admet la droite de l'infini pour tangente double. (BL 8).

(26) Les axes d'une conique imaginaire générale Σ touchent deux courbes de 3ième classe, dont l'une P', qui est l'enveloppe des axes des coniques du faisceau tangentiel déterminant, touche la droite de l'infini dans le point de fuite de la droite des centres, l'autre P, qui est l'enveloppe des axes des coniques du faisceau ponctuel déterminant, la touche doublement dans les points de contact des paraboles du faisceau: la courbe P passe par les pieds des hauteurs du triangle polaire caractéristique (BL 18).[13])

(27) Les diamètres conjugués $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ d'une conique imaginaire générale Σ faisant l'angle de grandeur donnée dans un sens de rotation donné touchent deux courbes bitangentes à la droite à l'infini de 3ième classe Δ et Δ' qui sont les enveloppes des diamètres conjugués $\mathbf{d}_k$ et $\mathbf{d}'_k$ des coniques Σ_k du faisceau déterminant ponctuel où les diamètres d_k et d'_k font le même angle dans le même sens de rotation. Les points de fuite de $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ sont représentés par les involutions $[\mathbf{D}_k]$ et $[\mathbf{D}'_k]$ où $\mathbf{D}_k$ et $\mathbf{D}'_k$ sont les points de fuite de $\mathbf{d}_k$ et $\mathbf{d}'_k$ (BL 38).

(28) Le diamètre $\mathbf{d}''$ d'une conique imaginaire générale Σ conjugué à un diamètre donné $\mathbf{d}$ de cette conique touche une courbe de 3ième classe Δ'' bitangente à la droite à l'infini, qui est enveloppée par les diamètres $\mathbf{d}''_k$ des coniques Σ_k du faisceau déterminant ponctuel, conjugués aux diamètres $\mathbf{d}_k$, qui passent par le point réel $\mathbf{D}$ du diamètre $\mathbf{d}$. Le point de fuite $\mathbf{D}''$ de $\mathbf{d}''$ est représenté par l'involution $[\mathbf{D}''_k]$ où $\mathbf{D}''_k$ sont les points de fuite de $\mathbf{d}''_k$ (BL 44).

(29) Les foyers d'une conique imaginaire générale Σ sont situés:

(*a*) sur une courbe circulaire Φ', lieu des foyers des coniques du faisceau déterminent tangentiel qui passe par les sommets du quadrilatère circonscrit fondamentel, et

(*b*) sur une courbe bicirculaire de 6ième classe Φ, lieu des foyers des coniques du faisceau déterminant ponctuel. Les autres points doubles de Φ, outre les points cycliques, sont les sommets du triangle caractéristique polaire, où sont les tangentes perpendiculaires, et les pieds des hauteurs de ce triangle. (BL 32)[14]).

---

[13]) B p. 309 ss.

[14]) B. p. 309 ss.

III. Constructions.

On peut, comme nous avons déjà dit, fonder sur les théorèmes précédants les solutions graphiques des problèmes appartenant à la conique imaginaire générale. Nous allons résoudre quelques unes.

Avant d'aborder ces problèmes il faut démontrer un certain théorème sur les éléments imaginaires et achever deux problèmes graphiques appartenant à ceux-ci.

(A) Soient **AA*** et **BB*** deux couples des éléments imaginaires conjugués et soit **CD** leur couple harmonique commune, toujours réelle. Soient les couples **AB** et **A*B*** divisées harmoniquement par **EF** et les couples **AB*** et **A*B** par **GH.** Une des couples **EF** et **GH** est toujours réelle, l'autre imaginaire conjugué. Ce sont les uniques couples réelles, resp. imaginaires conjuguées, qui divisent harmoniquement les couples **AB**, **A*B***, **AB*** et **A*B.** Les couples **CD**, **EF** et **GH** se divisent harmoniquement.[15])

Les couples **CD**, **EF** et **GH** sont les éléments doubles des involutions [**AA***, **BB***], [**AB**, **A*B***] et [**AB***, **A*B**], qui supportent l'une l'autre. La couple **EF** divise harmoniquement les éléments imaginaires **A** et **B** ainsi comme les éléments imaginaires conjugués **A*** et **B*** et par conséquent elle ne peut être que réelle ou imaginaire conjuguée. Au contraire quand une couple réelle ou imaginaire conjugée divise harmoniquement **A** et **B**, elle divise harmoniquement aussi **A*** et **B***, que peut faire seulement la couple **EF.** Le même vaut pour **G** et **H.**[16])

Si les points **A**, **A***, **B** et **B*** sont situés sur une conique, les points centrals des involutions mentionnées plus tôt sont les sommets d'un triangle polaire.[17])

(B) On construit la couple harmonique commune à deux couples **AB** et **CD**, dont l'une ou toutes les deux sont formées de deux éléments imaginaires non-conjugués, analogiquement comme si les couples étaient réelles, en les transformant dans les points **A, B, C** et **D** d'un cercle. La seule différence est celle que les points centrals des involutions, admettant les points **A**, **B** et **C**, **D** pour points doubles, sont des points imaginaires non-conjugués. Alors il faut construire les points d'intersection d'un cercle avec une droite imaginaire, dont le point réel n'est pas situé sur ce cercle. C'est la construction du problème suivant.

(C) Couper le cercle donné *K* par une droite imaginaire **m**, dont le point réel **P** n'est pas situé sur *K*.

[15]) Une part du théorème est rapportée par H p. 12.

[16]) S p. 106.

[17]) S p. 161.

Soient les points d'intersection de K et **m** les points imaginaires non-conjugués **K** et **K'**. Les points conjugués à ceux-ci sont **K*** et **K*'** qui sont situé et à K et à la droite **m*** conjuguée à **m**. **P** étant le point d'intersection de **m** et **m*** est le point diagonal du quadrangle [**KK' K* K*'**]. Son côté diagonal opposé **p**, qui est réel, est la polaire de **P** par rapport à K. À cette droite sont situés les autres points diagonaux aussi réels **Q** et **R.** Par **Q** passent les supporteurs réels $\mathbf{k} \equiv \overline{\mathbf{KK^*}}$ et $\mathbf{k'} \equiv \overline{\mathbf{K'K^*}}$, Parce que **k** et **k'** passent en dehors de K, est aussi **Q** en dehors de K. Dans l'autre point **R,** se rencontrent les droites imaginaires conjuguées $\overline{\mathbf{KK^{*\prime}}}$ et $\overline{\mathbf{K^*K'}}$. En **Q** et **R** la droite **p** coupe cette couple de l'involution représentant **m,** qui est aussi une paire des polaires harmoniques par rapport à K. Si **P** est situé au dedans de K, on ne peut pas décider d'avance, lequel de deux points ainsi construis est Q.

Soit **S** le centre de K. Le cercle Λ, dont le diamètre est $\overline{\mathbf{PS}}$, est le lieu des pôles harmoniques par rapport à K, aux points de fuite des droites passant par **P**, qui sont situés sur ces droites. Les points d'intersection **L** et **L***, qui sont imaginaires conjugués, de Λ et des droites **m** et **m*** sont les pôles harmoniques aux points de fuite $\mathbf{L}_\infty$ et $\mathbf{L}^*_\infty$ de **m** et **m***. Les quaternes [$\mathbf{KK'LL}_\infty$] et [$\mathbf{K^*K^{*\prime}L^*L}^*_\infty$] sont donc harmoniques. On peut par conséquent construire les supporteurs **k** et **k'**, qui forment la couple des rayons harmoniques communs aux couples $\overline{\mathbf{QL}}$ $\overline{\mathbf{QL}_\infty}$ et $\overline{\mathbf{QL^*}}$ $\overline{\mathbf{QL}^*_\infty}$.

Après ces remarques on peut aborder les constructions des coniqûes imaginaires générales.

(I) Construire le quadrilatère fondamental circonscrit à une conique imaginaire générale Σ et la polaire d'un de ses sommets, quand Σ est donnée par le quadrangle inscrit fondamental et le pôle d'un de ses côtés.

(*a*) Le quadrangle donné **ABCD** est réel. Soit **J** le pôle donné du côté $\overline{\mathbf{AB}}$, qui est représenté par l'involution [$\mathbf{J}_k$] au côté réel **p** du triangle polaire caractéristique **PQR.** La droite $\overline{\mathbf{AJ}}$ est la tangente **t** dans le point **A** à Σ, qui est représenté par l'involution [$\mathbf{t}_k$]. La droite imaginaire **t***, conjuguée à **t**, est dans **A** tangente à Σ^*, c'est à la conique imaginaire générale conjuguée à Σ (selon le théor. 10). Les droites **t** et **t*** sont donc une couple des polaires harmoniques communes à Σ et Σ^* et par conséquent, à toutes les coniques du faisceau déterminant tangentiel. Elles rencontrent **p** dans la couple qui divise harmoniquement les sommets opposés $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ du quadrilatère circionscrit fondamental. Mais $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ divisent harmoniquement aussi les sommets **Q** et **R.** On peut donc construire ces deux points comme la paire harmonique commune de **QR** et de **JJ***. On trouve de la même manière les sommets opposés

Q_1 et Q_2 du quadrilatère circonscrit fondamental au côté **q** du triangle polaire caractéristique. Au moyen des coniques dégénérés du faisceau ponctuel déterminant, on construit le pôle harmonique P'_1 de P_1 par rapport à toutes les coniques de ce faisceau. La ponctuelle (J_k) des pôles de la droite $\overline{AB}$ par rapport aux coniques du faisceau ponctuel est projective au faisceau polaire (p_k) de P_1 par rapport à toutes les coniques du faisceau ponctuel déterminant. Si **J** est représenté par l'involution $[J_3 J_4, J_5 J_6]$, on trouve les polaires p_3, p_4, p_5 et p_6 projectives à J_3, J_4, J_5 et J_6, qui forment l'involution $[p_3\, p_4,\, p_5\, p_6]$ représentant la polaire cherchée.

(*b*) Soient deux des sommets du quadrangle inscrit fondamental, **A** et **B**, réels, les deux autres, **C** et **C***, imaginaires conjugués. Soient puis **P** le sommet rèel et **Q** et **Q*** les sommets imaginaires conjugués du triangle polaire caractéristique. On trouve comme auparavant les points P_1 et P_2 qui sont réels, et on construit les points d'intersection **I** et **I'** de $q^* \equiv \overline{PQ}$ avec les polaires harmoniques par rapport à toutes les coniques du faisceau tangentiel déterminant $\overline{AJ}$ et $\overline{AJ^*}$. Les points **I** et **I'** divisent harmoniquement les sommets opposés $Q_1{}^*$ et $Q_2{}^*$ du quadrilatère circonscrit fondamental et, par conséquent, les droites $\overline{P_1 I}$ et $\overline{P_2 I'}$ divisent harmoniquement les côtés $\overline{P_1 Q_1{}^*}$ et $\overline{P_1 Q_2}$ du quadrilatère fondamental. Mais $\overline{P_1 I}$ et $\overline{P_1 I'}$ sont des droites imaginaires non-conjuguées et il n'y a qu'une seule couple des droites réelles ou imaginaires conjuguées qui les divise harmoniquement; c'est la couple des côtés cherchés (théor. A). Cette couple divise aussi harmoniquement la paire des droites réelles **m** et **n**, commune aux deux involutions qui représentent $\overline{P_1 I}$ et $\overline{P_1 I'}$. On peut donc construire les côtés cherchés $\overline{P_1 Q_1{}^*}$ et $\overline{P_1 Q_2{}^*}$ du quadrilatère circonscrit fondamental comme la couple harmonique commune aux paires **m n** et $\overline{P_1 P}$, $\overline{P_1 Q Q^*}$. La polaire de P_1 sera construite comme auparavant.

(*c*) Soient les sommets du quadrangle inscrit fondamental deux paires des points imaginaires conjugués **AA*** et **BB***, dont les supporteurs réels p_1 et p_2 se coupent dans le sommet **P** du triangle polaire caractéristique. Ses autres sommets réels sont **Q** et **R.** On construit les sommets opposés du quadrilatère circonscrit comme dans le cas (a). Les sommets Q_1 et $Q_1{}^*$, qui sont situés à $q \equiv \overline{PR}$, sont imaginaires conjugués. Ils divisent harmoniquement la paire des points imaginaires non-conjugués **I I'**, où les polairas $\overline{AI}$ et $\overline{AI'}$ harmoniques par rapport à toutes les coniques du faisceau déterminant tangentiel coupent **q.** Par conséquent les points Q_1 et $Q_1{}^*$ divisent aussi la couple **M N** commune aux deux involutions qui représentent **I** et **I'**. Celà suffit pour

la construction de Q_1 et Q_1^* et donc pour le quadrilatère fondamental. La construction de la polaire cherchée est la même que dans le cas (a).

On peut ranger les problèmes graphiques qui se présentent dans la théorie des coniques imaginaires en quelques groupes.

(α) La partie essentielle du problème est de trouver un élément imaginaire donné comme un élement d'une ponctuelle ou d'un faisceau des éléments analogiques des coniques du faisceau déterminant. La ponctuelle ou le faisceau des éléments analogiques est projectif au faisceau déterminant.

(II) Ètant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels et une droite réelle **m**, construire l'autre point d'intersection **X'** de Σ et *m*. (Théor. 11.)

(III) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels et étant donnée une conique réelle *K*, passant par les points **A**, **B** et **C**, construire le quatrième point d'intersection de Σ et *K*. (Théor. 16).

(IV) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ ou par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses cotés réels ou par le quadrilatère circonscrit fondamental **a' b' c' d'** et par la polaire **j'** d'un de ses sommets réels et étant donné un point réel **M**, construire sa polaire par rapport à Σ. (Théor. 19).

(V) Étant donnés une conique imaginaire générale Σ par le quadrilatère circonscrit fondamental **a' b' c' d'** et par la polaire **j'** d'un de ses sommets réels et étant donnée une droite imaginaire **m**, construire le pôle **M** de **m** par rapport à Σ. (Théor. 22 b.)

(VI) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ ou par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels ou par le quadrilatère circonscrit fondamental **a' b' c' d'** et par la polaire **j'** d'un de ses sommets réels, trouver le centre **O** de Σ. (Théor. 22.)

(VII) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels et étant donné un angle α d'un sens de rotation donné, construire les diamètres conjugués de Σ faisant l'angle α. (Théor. 27.)

(VIII) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels et étant donné un de ses diamètres **d**, construire le diamètre conjugué. (Théor. 28.)

Il y a aussi des problèmes dualistiques au problèmes (II), (III), (IV) et (V).

Je vais résoudre par exemple le problème (V).

Soient $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$, $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ et $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$ les paires des sommets opposés du quadrangle **ABCD** dont par exemple $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ soit réelle. Cette paire est située au côté **p** du triangle polaire caractéristique **PQR**, opposé à **P**. Soit **j**′ la polaire de $\mathbf{P}_1$. Puis soient désignées les coniques dégénérées du faisceau déterminant tangentiel $\Sigma'_1 \equiv (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$, $\Sigma'_2 \equiv (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2)$ et $\Sigma'_3 \equiv$ $\equiv (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)$. Les polaires de $\mathbf{P}_1$ par rapport à ces coniques sont $\mathbf{j}_1 \equiv \mathbf{PP}_1$, $\mathbf{q} \equiv \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ et $\mathbf{r} \equiv \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$. L'involution $[\Sigma'_k]$ représentant Σ adjoigne les coniques Σ'_4 et Σ'_5 aux coniques dégénérées Σ'_2 et Σ'_3 et l'involution $[\mathbf{j}'_k]$ adjoigne $\mathbf{j}'_4$ et $\mathbf{j}'_5$ à **q** et **r**. Soit **N** le point réel de **m** et soit **n** sa polaire par rapport à Σ. Ses polaires par rapport à Σ'_1, Σ'_2 et Σ'_3 sont **p**, **q** et **r**. On reçoit deux autres polaires $\mathbf{n}'_6$ et $\mathbf{n}'_7$ en construisant les rayons qui divisent harmoniquement avec $\overline{\mathbf{P}_1 \mathbf{N}}$ et $\overline{\mathbf{P}_2 \mathbf{N}}$ les paires des côtés du quadrilatère circonscrit fondamental passant par $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$. Les polaires de **N** par rapport aux coniques du faisceau tangentiel déterminant Σ_k coupent $\mathbf{n}'_6$ et $\mathbf{n}'_7$ dans deux ponctuelles $(\mathbf{U}_k)$ et $(\mathbf{V}_k)$ projectives au faisceau $(\mathbf{j}'_k)$. On construit par cette relation les involutions $[\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_4, \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_5]$ et $[\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_3 \mathbf{V}_5]$ représentant les points imaginaires **U** et **V**, dont la droite de joinction est la polaire **n** de **N** par rapport à Σ. Puis on trouve le supporteur **g** du point d'intersection de **m** et **n**. Les droites $\mathbf{h}'_1$, $\mathbf{h}'_2$ et $\mathbf{h}'_3$ joignent **N** avec les points dans lesquels **g** rencontre **p**, **q** et **r**. En construisant les rayons qui divisent harmoniquement avec $\mathbf{h}'_1$, $\mathbf{h}'_2$ et $\mathbf{h}'_3$ les paires $\overline{\mathbf{NP}_1}$ $\overline{\mathbf{NP}_2}$, $\overline{\mathbf{NQ}_1}$ $\overline{\mathbf{NQ}_2}$ et $\overline{\mathbf{NR}_1}$ $\overline{\mathbf{NR}_1}$, on reçoit les rayons $\mathbf{i}'_1$, $\mathbf{i}'_2$ et $\mathbf{i}'_3$ passant par les pôles de $\mathbf{h}'_1$, $\mathbf{h}'_2$ et $\mathbf{h}'_3$ par rapport à Σ'_1, Σ'_2 et Σ'_3. Parce que ces pôles sont situés à la courbe de 3ème classe *N*′ ayant à **N** un point double, le faisceau $(\mathbf{i}'_k)$ est projectif au faisceau $(\mathbf{j}'_k)$. En construisant par cette relation les rayons $\mathbf{i}'_4$ et $\mathbf{i}'_5$, on reçoit l'involution $[\mathbf{i}'_k]$ qui représente la droite $\overline{\mathbf{MN}}$. Le pôle cherché **M** est le point d'intersection des droites $\overline{\mathbf{MN}}$ et **n**.

(β) Dans le deuxième groupe on peut comprendre les problèmes, dont la partie essentielle est de trouver deux éléments imaginaires non-conjugués, donnés comme une couple de l'involution des éléments analogiques du faisceau déterminant. Cette involution est projective au faisceau déterminant.

(IX) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels et étant donnée une droite réelle **m** qui ne passe pas par le sommet du quadrangle **ABCD**, construire les deux points d'intersection de Σ et **m**. (Théor. 7.)

(X) Étant donnée la conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels et étant donnée une conique réelle *K* passant par deux sommets du quadrangle **ABCD**, construire les deux autres points d'intersection de Σ et de *K*. (Théor. 17.)

(XI) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental et le pôle **J** d'un de ses côtés réels, construire les asymptotes de Σ. (Théor. 25.)

(XII) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par le pôle **J** d'un de ses côtés réels, construire ses axes. (Théor. 26.)

Il y a aussi des problèmes dualistiques aux problèmes (IX) et (X).

Je veux résoudre par exemple le problème (XII).

Avant tout il est nécessaire de trouver le centre **O** de Σ. Soit **PQR** le triangle polaire caractéristique, dont le sommet **P** soit le point d'intersection de côtés $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ du quadrangle fondamental qui sont réels dans tous les cas. Soit **J** le pôle de $\mathbf{p}_1$ par rapport à Σ représenté par l'involution $[\mathbf{QJ}_4, \mathbf{RJ}_5]$. Puis soient $\Sigma_1 \equiv (\mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2)$, Σ_2 et Σ_3 les coniques dégénérées du faisceau ponctuel déterminant. Les pôles de $\mathbf{p}_1$ par rapport à ces coniques-là sont les points $\mathbf{J}_1$, **Q** et **R**, où $\mathbf{J}_1$ est le point d'intersection de $\mathbf{p}_1$ et de **p**, c'est à dire de la droite $\overline{\mathbf{QR}}$. Les centres de ces coniques-là sont **P**, **Q** et **R**. Les deux autres points de la conique Ω (voir le théor. 23) sont les points $\mathbf{O}_6$ et $\mathbf{O}_7$ les centres des côtés $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ du quadrangle fondamental. Les faisceaux $\mathbf{O}_6$ $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{O}_4, \mathbf{O}_5)$ et $\mathbf{O}_7$ $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{O}_4, \mathbf{O}_5)$ sont projectifs à la ponctuelle $(\mathbf{J}_1, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{J}_4, \mathbf{J}_5)$, laquelle relation suffit pour la construction de $\mathbf{O}_4$ et $\mathbf{O}_5$ et donc pour la construction du supporteur **o** de **O**. Si **Q** et **P** sont des points imaginaires conjugués, on peut trouver selon la construction (I) le quadrilatère circonscrit fondamental et selon le théor. 23a le supporteur **o**. Parce qu'on peut de chaque point de l'infini mener une seule tangente à la courbe de la 3$^{\text{ième}}$ classe *P*, qui est l'enveloppe des axes du faisceau ponctuel déterminant, on peut mener de chaque paire de l'involution circulaire à l'infini une seule couple des axes $\mathbf{a}_k\, \mathbf{b}_k$ qui se coupent à Ω dans le centre $\mathbf{O}_k$. Il est vrai qu'on peut mener de $\mathbf{O}_k$ trois tangentes à *P*, mais elles ne sont que deux perpendiculaires l'une à l'autre. L'involution des points de fuite des axes $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$ est donc projective à la ponctuelle $(\mathbf{O}_k)$. On mène alors par un point quelconque **G** d'un cercle *K* les paires de parallèles $\mathbf{h}_1\, \mathbf{h}'_1$, $\mathbf{h}_2\, \mathbf{h}'_2$ et $\mathbf{h}_3\, \mathbf{h}'_3$ aux symmétrales des angles, qui forment les coniques Σ_1, Σ_2, et Σ_3. Ces parallèles coupent *K* dans les couples de l'involution $[\mathbf{H}_1\, \mathbf{H}'_1, \mathbf{H}_2\, \mathbf{H}'_2, \mathbf{H}_3\, \mathbf{H}'_3]$, qui sont projetées

du centre de l'involution par les rayons du faisceau (h''_k) projectif à la ponctuelle (J_k). D'après la construction de h''_4 et h''_5 on reçoit l'involution [$h''_2\, h''_4$, $h''_3\, h''_5$], qui représente le rayon imaginaire h'' n'ayant pas son point réel à *K*, dont les points d'intersection **H** et **H'** avec *K* seront construits d'après la construction (C). Les axes cherchées **a** et **b** sont les droites de jonction de **O** et des points de fuite de $\overline{GH}$ et $\overline{GH'}$.

(γ) On peut ainsi arranger des autres groupes analogiques des problèmes. J'en veux comme exemple citer seulement le suivant:

(XIII) Étant donnée la conique imaginaire générale Σ par le quadrilatère circonscrit fondamental $a'b'c'd'$ et par la polaire **j** d'un de ses sommets réels, construire ses foyers. (Théor. 29 a)

On construit les axes de Σ et cherche de trouver les foyers dans leurs points d'intersection avec la courbe de la 3^{ième} classe Φ', savoir avec le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel déterminant. M. Schrötter a publié une construction simple de Φ' et de ces foyers d'après M. Küpper[18]) qu'on peut appliquer au problème considéré. M. Schrötter a démontré que les deux foyers situés sur la même axe sont des points conjugués de Φ'. Ces paires des points conjugués sont projetées du foyer F_6 de la parabole du faisceau tangentiel déterminant par les rayons d'une involution, projective à la division (G_k), où les axes coupent une certaine droite **g**. Si on projette les sommets opposés $P_1\, P_2$, $Q_1\, Q_2$ et $R_1\, R_2$ du quadrilatère fondamental du F_6 par les rayons $f_1\, f'_1$, $f_2\, f'_2$ et $f_3\, f'_3$, on reçoit trois couples de l'involution [$f_k\, f'_k$]. Les parallèles menées par P_1 et P_2 au supporteur du centre **O** coupent f_1 et f'_1 dans une autre paire $F'_7\, F_7$ des points conjugués. La droite a_1 joignant F'_7 et F_7 coupe $p \equiv P_1\, P_2$ dans le point G_1. On mène par ce point la droite **g** perpendiculaire à **o**. Il résulte de cette construction que la droite $f''_k \equiv \overline{F_6\, G_k}$ et la droite h_6 parallèle à **G** et passante par F_6 divisent harmoniquement les rayons f_k et f'_k. On construit donc les rayons doubles f_8 et f_9 de l'involution [$f_k\, f'_k$] et on joint avec F_6 le point d'intersection **G** de l'axe **a** et de la droite **g**. La couple $f\, f'$ divisant harmoniquement les couples, $f_8\, f'_9$ et $f''\, n$, qui est construite d'après la construction (B), coupe l'axe **a** dans les foyers cherchés de Σ.

(δ) D'un tout autre caractère sont les problèmes où sont donnés 5 éléments, dont une partie est réelle ou imaginaire conjuguée et où on exige de construire la conique imaginaire générale, c'est de construire ou le quadrangle inscrit fondamental et le pôle d'un de ses côtés réels ou le quadrilatère circonscrit fondamental et la polaire d'un de ses sommets réels. Je n'en rapporte que les problèmes suivants:

[18]) Sch p. 55 ss.

(XIV) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par le quadrangle inscrit fondamental **ABCD** et par un point imaginaire **X**, construire le pôle **J** d'un de ses côtés réels. (Théor. 7.)

On construit l'involution dans laquelle le faisceau ponctuel déterminant coupe le supporteur **x** du point **X** et on trouve le second point d'intersection **Y** de Σ et de **x**. La division des centres des segments des coniques Σ_k du faisceau déterminant situés à **x** est projective à la division des pôles J_k de Σ_k. Le pôle **J** en est défini.

(XV) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par un point réel **A**, par deux points réels ou imaginaires conjugués **B** et **C** et par deux points imaginaires non-conjugués **X** et **Y**, situés à une droite réelle **x**, construire le quatrième sommet réel **D** du quadrangle inscrit fondamental. (Théor. 7.)

Soient **X*** et **Y*** les points imaginaires conjugués à **X** et **Y** et soit $X_1\,Y_1$ la couple commune des involutions représentant **X** et **Y**. L'involution dans laquelle **x** coupe les coniques Σ_k du faisceau ponctuel déterminant, est projetée de **A** par une involution des rayons **A** $[XY, X^*Y^*, X_1\,Y_1]$. Ses rayons doubles divisent harmoniquement et la couple $\overline{AB}\;\overline{AC}$ et la couple $\overline{AX_1}\;\overline{AY_1}$ selon le théorème (A), laquelle relation suffit pour les construire. Ces rayons doubles sont coupés par **x** dans les points X_2 et X_3 qui sont les points doubles de l'involution $[X_k\,Y_k]$. Dans cette involution on trouve les points Y_4 et Y_5 adjoints à X_4 et X_5, dans lesquels **x** rencontre **BC** et **AB**, et on les joint avec **A** et **C**. Le point d'intersection de ces droites est le sommet cherché **D**.

(XVI) Étant donnée une conique imaginaire générale Σ par un point réel **A**, par deux points **B** et **C** réels ou imaginaires conjugués et par deux points imaginaires **X** et **Y** qui ne sont pas situés à la même droite réelle, construire le quatrième sommet **D** du quadrangle inscrit fondamental. (Théor. 15.)

Soit Σ^* la conique imaginaire générale conjuguée à Σ et soient **x** et **y** les supporteurs réels de **X** et **Y**, où sont aussi situés les points imaginaires **X*** et **Y*** conjugués à **X** et **Y**. On construit la conique K passant par les points **A**, **B**, **C**, **X** et **X*** et la conique $\varLambda$ passant par les points **A**, **B**, **C**, **Y** et **Y***. Soit K_1 le quatrième point d'intersection de K et $\varLambda$. Les coniques Σ_k du faisceau ponctuel déterminant coupent K et $\varLambda$ dans deux ponctuelles (X, X^*, K_1, K_k) et (Y, Y^*, K_1, L_k) qui sont projectives à (Σ_k). Soient **K'** le pôle de **x** par rapport à K et **L'** le pôle de **y** par rapport à $\varLambda$. Si la droite $\overline{K_1\,K'}$ coupe K dans K_2 et si la droite $K_1\,L'$ coupe $\varLambda$ dans L_2, les quaternes $[X\,X^*\,K_1\,K_2]$ et $[YY^*\,K_1\,L_2]$ sont harmoniques et par conséquent, par les points K_2 et L_2 passe une co-

nique du faisceau Σ_2. Si on construit les $\mathbf{K}_3$ $\mathbf{K}_4$ et $\mathbf{L}_3$ $\mathbf{L}_4$ situées à K et Λ et divisant harmoniquement $\mathbf{X X^*}$ et $\mathbf{K}_1$ $\mathbf{K}_2$ respectivement $\mathbf{Y Y^*}$ et $\mathbf{K}_1$ $\mathbf{L}_2$, en reservant le sens des involutions représentant **X** et **Y**, on reçoit les points des coniques du faisceau Σ_3 et Σ_4. Toutes les trois coniques Σ_2, Σ_3 et Σ_4 appartiennent au faiscau ponctuel déterminant et par conséquent, le quatrième point d'intersection de deux de ces coniques est le point cherché **D.**

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 33.

Serpentinomorfosy bryophyt z hadcových skal u Mariánských Lázní v Čechách.

Les bryophytes serpentinomorphes des roches à serpentine des environs de Mariánské Lázně, en Bohême.

Napsal

prof. Dr. JAN VILHELM.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 33.

Serpentinomorfosy bryophyt z hadcových skal u Mariánských Lázní v Čechách.

Les bryophytes serpentinomorphes des roches à serpentine des environs de Mariánské Lázně, en Bohême.

Napsal

prof. Dr. **JAN VILHELM.**

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Serpentinomorfosy bryophyt z hadcových skal u Mariánských Lázní v Čechách.

Les bryophytes serpentinomorphes des roches à serpentine des environs de Mariánské Lázně, en Bohême.

Napsal prof. Dr. *Jan Vilhelm.*

K zajímavým a vzácným zjevům botanickým počítáme t. zv. oekologické nebo biologické druhy, které, jak bylo již zjištěno dříve, vyvolány jsou působením hadcového podkladu, na němž rostou. Mimo to jsou známy ještě jiné substráty, které na variabilitu vegetace, na nich se vyskytující, působí účinně. Z cevnatých rostlin jsou všeobecně známé druhy jen na hadcích mající své rozšíření, jako na př. *slezinník prostřední (Asplenium adulterinum* MILDE), *sl. hadcový (Aspl. serpentini* TAUSCH) a *rožec kuřičkolistý (Cerastium alsinefolium* TAUSCH). Zejména jejich původní a klasické lokality nacházejí se ve skulinách hadcových skal a skalisk v západních Čechách mezi Mnichovem (Einsiedl), Rauschenbachem a Sangerberkem u Mariánských Lázní, vedle ještě jiných známých lokalit. Zde z postranního hřbetu pohoří Císařského Lesa vynikají dva rozlehlé, zalesněné vrcholky, z nichž první, Vlčí kámen (Wolfstein, 880 *m*), jest nedaleko Mariánských Lázní a druhý, zvaný Rauschenbašskou ladou (Auf der Heide, 865 *m*), leží již blíže Mnichova. Na prvním kopci jsou drobnější holá skaliska pod vrcholem, kdežto na druhém nachází se holá, skalnatá stráň na svahu východním, obrácená k Mnichovu, jež chová zejména památnou a proslulou vegetaci hadcovou. Mimo tuto skálu nalezneme i menší skaliska na různých místech tohoto kopce.

Již r. 1920 počátkem července prozkoumal jsem tu po prvé tyto všechny lokality a v červenci 1924 po druhé společně s prof. dr. KARLEM DOMINEM, na kteréžto poslední exkursi pak doplnil jsem ještě některé svoje výzkumy.

Při studiu bryologických poměrů Císařského Lesa byly právě tyto hadcové lokality středem mé pozornosti, neboť předpokládal jsem nalézti i u *bryophyt,* jež některé dosti citlivě reagují na edafické faktory,

zajímavou variabilitu a výskyt stálých forem, které by se daly označiti jako serpentinomorfosy. Skutečně také nezklamal jsem se ve svém předpokladu, neboť skály hadcové, ač zde v klimatu chladnějším, hostí jen nepatrný počet druhů, které na substrátu převážně křemičitých hornin jsou sice obvyklým zjevem, přece však suchostí, nejvýznačnější fysikální vlastností tohoto substrátu, vytvořují oekologické formy či variety, jež jsou u některých druhů mechorostů zde rostoucích význačné, takže možno je právem považovati za serpentinomorfosy, vyvolané substrátem hadcovým.

Hadcové skály jeví se býti zdaleka mrtvými a vegetace jejich složena jest hlavně z lišejníků korových, které vrůstají do povrchu této větrající horniny, rozhlodávajíce ji.

Ostatní vegetace na holé, hadcové skále jest vesměs velice chudá a jednotvárná. V zářezech skalních, ve zvětralých důlcích a jamkách hostí skály hadcové nepatrné celkem množství mechorostů, jež vesměs náležejí k výlučným xerofytním typům. Skuliny skalní, vyplněné prstí, chovají zejména druhy slezinníků, v předu již jmenované, slezinník červený (*Asplenium trichomanes* L.), osladič obecný (*Polypodium vulgare* L.) a j.,[1]) mimo některé druhy bryophyt.

Tato vegetace vzdoruje tu nejnepříznivějším podmínkám životním. Naprostá suchost substrátu, dále také chemické složení jeho přispívá nejvíce, že vegetace, která se zde aklimatisuje, jest odchylná od asociací na jiném podkladě. Působením pak substrátu hadcového vznikají nová plemena (formy, variety nebo biologické druhy), udržující se na něm pak stále; přejdou-li tato na jiný substrát, mohou se i po několik generací udržovati, než z nich vytvoří se zase normální, typické plemeno mateřské, jak podařilo se dokázati SADEBECKOVI na umělých kulturách *slezinníku hadcového* a *sl. prostředního.*[2])

Působení klimatických faktorů, zejména otázka, jaký vliv má edafický činitel na vegetaci, byla studována již dávno fysiology a fytogeografy. O vlivu chemickém hadce jako substrátu dlužno připomenouti práci VIKTORA v. EBNERA,[3]) který poukazuje na velké a převládající množství *Mg* (31·22%) v popeli *slezinníku hadcového,* které odpovídá také

---

[1]) Viz obšírnější vylíčení ostatní vegetace ve spise prof. dr. KARLA DOMINA: Císařský Les. Archiv pro výzkum Čech, 1924.

[2]) l. c. K. KAVINA: Několik poznámek o slezinníku hadcovém. Časopis Musea kr. čes. 1918. Odd. přírod. Str. 121. — FR. SCHUSTLER: Slezinník prostřední (Asplenium adulterinum Milde) a jeho systematický význam. Věda přírodní. Roč. I., str. 167—171.

[3]) l. c. Analyse der Asche von Asplenium Serpentini. Ein Beitrag zur Kenntnis des Bodeneinflusses auf die Vegetation. Verhandl. d. zool.-bot. Gesellsch. in Wien. Bd. XI., p. 375—378.

značnému množství Mg (42·86%) v substrátu hadcovém (dle rozboru Dr. F. SENFTA: Classification und Beschreibung der Felsarten, Breslau, 1857).

Ale v popeli všech rostlin dle H. WINKLERA (l. c. »Entwickelungsmechanik oder Entwickelungsphysiologie der Pflanzen« v Handwörterb. d. Naturwissen. III., p. 643) nacházejí se vedle solí nutných prvků vždy ještě hojné látky z půdy přijaté, jež nejsou nezbytně potřebné rostlině k jejímu životu. Tyto látky prý nepůsobí chemomorfoticky. Dle dosavadních zkušeností prý žádná rostlina nevykazuje morfologických změn, má-li jen dostatek potřebných prvků. Jiná prý udání, v nichž se dokazuje, že určité látky v půdě jsou příčinou výskytu morfologicky odchylných forem, jako na př. hadcových a zinkových rostlin, jsou mylná.

Dle svých zkušeností, pozorováním v přírodě nabytých, přece jen těmto názorům nevěřím, neboť příroda sama jest pravá, velká laboratoř, v níž možno přesvědčiti se o výskytu určitých forem rostlin na některých horninách. A právě hadcová vegetace obsahuje některé plastické druhy, na nichž vliv substrátu jest zřejmý. Chemické účinky jsou zde snad nepatrné, ale přece jen spolupůsobí při vytvoření se těchto oekologických forem hadcových.

Fysikální však vlivy substrátu hadcového na vegetaci jsou velice patrné již pouhým pozorováním v přírodě. Zejména vegetace lesní již na první pohled jest nápadná svým zakrslejším vzrůstem (na př. *Pinus silvestris*).

Podobně lze již na první pohled také pozorovati povšechně zakrslejší vzrůst *bryophytů* na hadcích, kteroužto změnu ve vzrůstu dlužno vztahovati spíše k fysikální účinnosti podkladu hadcového.

Bryologická vegetace skalní na hadcích na Rauschenbašské ladě u Mnichova složena jest početně z málo jen druhů, neboť tyto skály jsou výslunné. Jen řídké porosty mechové v polštářcích nebo trsech usadily se tu na nerovném povrchu horniny.

Z xerofytních skalních *bryophyt* jsem zde zjistil zejména serpentinomorfosy z těchto druhů:

1. Hedwigia albicans Lindb. f. nana n. f.

Planta 5—10 *mm* longa, foliis anguste oblongo-lanceolatis, cellulis per totam laminam tenuioribus, quadratis.

Habitat in saxis et rupibus serpentinosis, apricis ad op. Mnichov (Einsiedl), prope Mariánské Lázně in Bohemia occidentali.

Tato forma, vykazující velmi nízký a zakrslý habitus, jest zvláště nápadná s listy, poměrně užšími. Jest zcela jisté, že odchylné znaky této formy jsou vyvolány tu podkladem hadcovým.

Srovnával jsem všechny známé formy *Hedwigia albicans* z různých lokalit a tu jen jsem zjistil útlou formu, velmi habituelně nápadnou, z čediče na Řipu, která však se lišila silně trnitými, dlouhými chlupy (*Hedwigia albicans f. patula* VILH.).[4]) Ale s touto jinak skalní a výslunnou formou nedá se *f. nana* stotožniti.

Hedwigia albicans jest oekologicky druhem poměrně dosti plastickým, který se přizpůsobuje snadno k novým podmínkám životním; jest to jeden z nejrozšířenějších ubiquistů po celém světě na skalách, balvanech, kamení nevápenatém od nejnižšího pásma až do hor. V Československu náleží tento druh k nejobecnějším druhům až do vysokohoří.

U tohoto xerofytního druhu,[5]) který tvoří formy výslunné, stinné i ve vlhčím prostředí, vždy toliko na substrátu křemičitých hornin, jest nápadnou právě ta okolnost, že na hadci a čediči tvoří formy, které nejen habituelně, ale také ve svých morfologických a anatomických znacích jsou poněkud změněné. Patrně působí tu substrát fysikálně a chemicky jako oekologický činitel také na zrůznění forem tohoto druhu. Hlavně suchost skály hadcové nutí zde u tohoto druhu vytvořiti formu zcela nízkého vzrůstu, s listy částečně morfologicky a anatomicky zrůzněnými.

2. Grimmia pulvinata Sm. f. serpentinosa n. f.

F o r m a h u m i l i s, a d 5 *mm* l o n g a, s t a t u r a *Grimmiae campestri* (*leucophaeae*) s i m i l i s, l o n g i p i l a, g r i s e o - a t r a, u r n a e l o n g a t o o b l o n g a, o p e r c u l o a c u t e c o n i c o.

Habitat in saxis et rupibus serpentinosis apricis in Bohemia occid. ad Mnichov prope Mariánské Lázně.

Tato zvláštní forma, vyskytující se v záhybech skalek hadcových, tvoří kompaktní černající se polštářky, jež jsou ojíněny dlouhými, hyalijními chlupy listovými. Habituelně podobá se skoro úplně *Grimmia campestris* (*leucophaea*), kterýžto druh roste na hadcovém podkladě. Zde

---

[4]) *Hedwigia albicans f. patula n. f.* (pro *var.*, sed non nominata in VELENOVSKÝ »M e c h y č e s k é«, Rozpr. II. tř. Čes. Akad., 1897, p. 190.). D i a g n o s i s: Caulis gracilior, foliis concavis interne inflexis, longipilis. Pili spinis maioribus instructi. Habitat in saxis siccis basalticis montis Řip prope Roudnice n. L. in Bohemia centrali.

[5]) Podrobnější údání o oekologických poměrech u tohoto druhu viz ve spise J. VILHELMA: P ř í s p ě v e k k o e k o l o g i i m e c h ů. Kapitola z monograf. studií čsl. druhů čeledi Grimmiaceae. Spisy přírodov. fakulty Karlovy university. 1923, č. 4, str. 31.

však u Mnichova nepřichází na hadcích, ale v blízkém údolí mezi Hořeními a Doleními Hamry se hojně objevuje na žílách snad čedičových nebo amfibolitových. Při prohlédnutí listového tvaru a anatomické struktury listu pod mikroskopem však ihned jest patrný rozdíl mezi oběma druhy. Rovněž generace sporofytní hadcové formy jest odchylná od normálních forem *G. pulvinata*. Tobolka jest podlouhlá se zvláštním kuželovitým víčkem, které není podobné formě nebo varietě *obtusa*. Jest mnohem vyšší a ostřeji zakončené.

Variabilitu *G. pulvinata v Československu*[6]) jsem prostudoval z velice četných, různých lokalit a vyhranil jsem částečně dle rozmanitých substrátů šest forem stálejších, k nimž přistupuje ještě tato nová forma, která jest extremně xerofytní, na níž zejména projevuje se vlivem substrátu hadcového zakrsalý vzrůst. Také tvar víčka jest zvlášť význačný pro tuto formu hadcovou.

Ještě však jinak jest pozoruhodným nález této nové serpentinomorfosy *G. pulvinata* na hadcových skalách u Mnichova. Jest známo, že tento druh jest obecným na skalách a kamení všech různých hornin, může také růsti na taškových a šindelových střechách nebo na plotech a zdích. Ale vždy jeho zeměpisné rozšíření jest omezeno na nížiny a jen nižší pahorkatiny, a dle dosavadních pozorování nepřekročuje nikdy v pohořích nadmořské výšky 627 *m* ve Slezsku dle LIMPRICHTA, podobně i v Harzu dle LOESKEHO. CHALUBIŃSKI ve své monografii »Grimmiae tatrenses« (Varsaviae, 1882) poukazuje na výskyt *Grimmia pulvinata* v Tatrách: »In territorio tatrensi speciem hanc hucusque nonnisi ad saxa granitica inveni et quidem in suprema fere regione campestri« a při stanovení jednotlivých pásem horských týž autor podotýká zejména: »Planiterium incola *Grimmia pulvinata* adhuc ad 830 *m* nobis occurit.« V alpských údolích omezuje se jen tento druh na teplejší části, kdež však není všeobecně rozšířený. V bavorských Alpách pozorován byl LOESKEM na pískovcích u Oberstdorfu ve výšce asi 900 *m*.

V Čechách udává VELENOVSKÝ (l. c. »Mechy české«, str. 181) o rozšíření tohoto druhu »z rovin do podhoří v Krkonoších jen asi do 600—700 *m*, také v Šumavě v horských polohách schází«. Sám nepamatuji se, že bych nalezl někde ve vyšší poloze *Grimmia pulvinata*, a proto nález na skalách hadcových u Mnichova přes 800 *m* vysoko byl mi již při prvním shlédnutí tohoto druhu zde nejvýš zajímavý.

Neobyčejný a zcela zvláštní výskyt *Grimmia pulvinata* v tak značné nadmořské výšce dá se však přece snadno zde vysvětliti, uvážíme-li, že právě edafický vliv hadce působí na zmírnění a překonání klimatických

---

[6]) l. c. J. VILHELM: Variabilita rodu Grimmia v Československu. Věstn. král. čes. společn. nauk. Tř. II. Ročn. 1924. Str. 27—28.

činitelů v této výšce, jistě méně příznivých výskytu tohoto druhu. Výlučně xerofytní *G. pulvinata* na podkladu hadcovém má i ve vyšší poloze nad 800 *m*, kde již horské druhy (na př. *Erica carnea, Pterigynandrum filiforme var. decipiens* a j. v.) se objevují, přece ještě existenční podmínky, dík substrátu, který jest tu rozhodujícím. Druh sám jeví také v tomto směru plastičnost a přizpůsobuje se zvláštní formou k tomuto substrátu, která může se pokládati za význačnou serpentinomorfosu mechovou.

3. Homalothecium sericeum Br. eur. f. pulchella n. f.

Caespites plani, adpressi, sericeo-virides. Caulis tenuior, repens. Folia breviter acuminata, costa magis angusta vel nulla. Cellulae laminae ad basin maiores et latiores.

Habitat in saxis serpentinosis apricis in Bohemia accid. ad op. Mnichov prope Mariánské Lázně.

Tento druh jest hojně rozšířený po celé Evropě, zejména na kmenech stromů a na zdech vůbec z nížin až do hor. Na skalách vyskytuje se řidčeji. Tvoří řadu forem na substrátu zcela suchém, které se habituelně značně liší od typické formy. Druh sám jest xerofytní a snáší poměrně snadněji suchý substrát. Proto také tento druh může růsti na hadcích, neboť jest dosti plastický k přizpůsobení se substrátům zcela suchým.

Následkem tohoto zcela suchého substrátu také jeví zvláštní adaptace morfologické na celkovém svém habitu, zejména drobnými, nízkými, přitisklými k substrátu lodyžkami a větvemi bez vystoupavých větviček, a dále v tvaru listu, kratčeji zašpičatěném, vedle změn anatomických v čepeli listové. Žebro v čepeli listové stává se užším než u normálních rostlin nebo se úplně ztrácí, ale za to rozšiřuje se průměr do šířky buněk, ležících nad střední částí base listové, kterýžto úkaz odpovídá přizpůsobení se k podmínkám xerofytnějším a zvětšené prázdné buňky pak slouží za zásobárny vodní.

I tuto zvláštní novou hadcovou formu *Homalothecium sericeum* možno považovati za serpentinomorfosu, na jejíž vznik hlavně měl největší působivost edafický činitel — skála hadcová.

4. Orthotrichum rupestre Schl. f. humilis n. f.

Pulvinuli condensati, statura humili (15 *mm* long.), mediocriter robusti, foliis sensim anguste acuminatis, cellulis laminae basilaribus hyalinis. Calyptra pilis longis villosa.

Habitat in saxis serpentinosis apricis in Bohemia occid. ad op. Mnichov prope Mariánské Lázně.

Na hadcových skalách v okolí Mnichova u Mariánských Lázní roste *Orthotrichum rupestre* ve formě již na první pohled rozdílné od normálního plemene, rostoucího hojně v nedalekém okolí na rulových skalách v údolí mezi Hořeními a Doleními Hamry. Normální plemeno tvoří zde na rulových skalách trsovité polštářky rozlézavé, často z nesouvislých trsů složené, s lodyžkami obyčejně 3—4 *cm* dlouhými, značně silnými.

Hadcové plemeno tohoto druhu vyskytuje se naopak v hustých polštářcích, habituelně v zakrsalém vzrůstu. Lodyžky této formy jsou poměrně velmi krátké i listy ke špičce více zúžené, na basi s odumřelými, prázdnými buňkami, sloužícími za vodní zásobárny.

Oekologická forma tohoto skalního mechu jest zcela přizpůsobena k poměrům suššího substrátu a proto také její ráz ve všech podrobnostech připomíná dokonalejší xerofytní zařízení rostliny. Substrát hadcový i zde jeví patrnou působnost na změny v celkovém vzrůstu polštářku, dále na morfologické a anatomické složení. Listy u normální formy tohoto xerofytního druhu jsou krátce a trochu tupě zašpičatěny. kdežto u hadcové formy jsou špičky listu dlouze a úzce protažené. Tento změněný tvar listu souhlasí také s dokonalejším xerofytním přizpůsobením této formy, právě tak jako prázdné buňky v basi čepele poukazují na xerofytní zařízení k většímu zadržení vody pro dobu sucha.

Plastičnost *O. rupestre* není sice tak značná, neboť jest to výlučně skalní druh, ale přece jen u něho lze pozorovati, že tu podklad hadcový působí poměrně dosti účinně na tento druh.

5. Schistidium gracile Lmpr. f. longiurna n. f.

Forma habitu Schistidio gracili f. validiori similis, incremento humiliori, pulvinulis laxius confertis, paulum decumbentibus, caulibus mediocriter validioribus, dense foliatis. Folia serrata, superiora pilis hyalinis instructa; capsula (urna) oblonge cylindrica, maior, 1,6—1,7 *mm* longa (apud f. normalem 0,9 *mm* longa!).

Habitat in saxis serpentinosis in Bohemia occd. ad op. Mnichov prope Mariánské Lázně.

Tento druh náleží ku pravým skalním mechům a jest oekologicky velmi zajímavý. Jest xerofytem a celé jeho složení habituelní, morfologické i anatomické přizpůsobuje se v některých formách k různým lokalitám skalním. Formy tohoto druhu lze rozlišovati zejména podle výběru lokalit, které jsou buď výslunné nebo zastíněné, při tom ještě suché

nebo vlhké. Některé formy mohou dokonce růsti na balvanech, ležících přímo v potocích horských. Zpravidla *Sch. gracile* usazuje se na šikmých plochách skalních, z kterých rychle stéká voda nebo tající sníh, zvláště ve vysokých horách.

Forma hadcová roste na podkladě neobyčejně suchém. Vztahy k tomuto edafickému činiteli jsou zejména patrné již na nepříliš hustě stěsnaných polštářcích, jejichž starší lodyžky jsou trochu poléhavé, poměrně však silnější, než u normálních forem a mnohem hustěji olistněné. Špičky zvláště na hořeních listech jsou protaženy v dosti dlouhé, hyalijní chlupy, což nasvědčuje že se tu jedná o výslunnou formu.

Nejzajímavější však vliv substrátu hadcového se jeví u formy této na generaci sporofytní. Tobolky podlouhle eliptické jsou tu neobyčejně velké a sice v takovém poměru, že již tento rozdíl jest již při srovnávání pouhým okem patrný. Normální velikost délky tobolky odvíčkované u forem *Schistidium gracile* obnáší 0,9 *mm*, kteréžto číslo také udává *Limpricht* (l. c. Laubm. I., p. 706). U *f. longiurna* jsou tobolky značně větší a delší, a jejich délka po odvíčkování dosahuje 1,6—1,7 *mm*. Ze známých mi forem tohoto druhu ještě jen u *f. rivularis* VILH.[7]) nalezl jsem delší tobolky, které u této formy, sbírané mezi Pecrem a Maršovem v Krkonoších, měly nejdelší rozměr až 1,4 *mm*. Ale forma tato, velmi tenká, náleží k formám ve vlhčím prostředí se vyskytujícím.

Velikost tobolek u *f. longiurna* jest zcela zvláštním zjevem, poněvadž zdá se také souviseti právě se substrátem. Poměrně při nízkém, zakrslejším vzrůstu gametofytu této formy generace sporofytní vyvinuje se mohutněji zvětšením tobolky, která pak obsahuje větší množství výtrusů.

Jest tato forma *Schistidium gracile* zase jiným, zcela zvláštním tvarem serpentonomorfosy, která vyvolána jest z největší části suchostí podkladu hadcového.

U jiných druhů *bryophyt*, rostoucích na skalách hadcových u Mariánských Lázní, nenalezl jsem odchylnějších forem od normálních typů; byla to zejména jatrovka, *Frullania dilatata* DUM., která nízkými, černavými povlaky těsně přitisknuta bývá na samou skálu. Jest rovněž typem extremně xerofytním.

Podobně u skalního horského mechu *Pterigynandrum filiforme* HDW. var. *decipiens* LIMPR. nelze stanoviti odchylnou formu hadcovou, ač tato měnlivá jinak varieta roste dle udání LIMPRICHTA (l. c. Laubm. II., p. 787) na vlhkých křemičitých horninách a zdích v horách od 900—2808

---

[7]) l. c. J. VILHELM: Variabilité du genre Schistidium en Tchécoslovaquie. — Acta botanica bohemica, Vol. I., p. 50.

metrů. Přece jen zde na skále hadcové nechází se na substrátu po dobu bez atmosférických srážek úplně suchém. Zbarvení tohoto mechu udané v diagnose LIMPRICHTOVĚ jako »živě zelené«, zde jeví se spíše olivově hnědým, na výběžkatých lodyžkách žlutozeleným. Patrně tu na zbarvení může míti vliv buď substrát nebo výslunost stanoviska.

Rovněž nepozoroval jsem nějakých úchylek u druhu *Hymenostomum microstomum* HDW., rostoucího na prsti ve skulinách skalních.

Na humusu lesním přímo nad skalami hadcovými nebo mezi nimi u Mnichova bylo možno ještě zjistiti porosty těchto druhů mechů: *Ceratodon purpureus* BRID. *var. flaviseta* LIMPR. (v celé krajině hojně se objevující), *Polytrichum juniperinum* WILLD., *Hylocomium splendens* BR. eur. (v zakrslejším vzrůstu), *Webera mutans* HDW. (forma s listy, u nichž končí žebro ve špičce listové a s tobolkami různotvárnými) a *Dicranum scoparium* HDW., poslední druh bez sporofytu, rovněž zakrslejšího vzrůstu.

K srovnání bryologické vegetace na hadcích v Čechách zmíním se ještě o této na hadcových skalách u »Pily«, ležících na počátku údolí Švadlenky za Malešovem, blíže Kutné Hory, kterou zjistil tu v roce 1924 prof. dr. K. D o m i n. Tato lokalita vykazuje jen dva druhy mechové, na jejichž formách lze pozorovati také zakrslejší vzrůst. Jsou to tyto druhy: *Leucodon sciuroides* SCHWG., kterýžto druh přichází velmi hojně a obecně na suchém kamení, a *Hedwigia albicans* LINDB., mísí se jen do trsů předešlého druhu ve formě rovněž s poměrně tenkými lodyžkami a listy dlouze chlupatými.

Srovnáváme-li však bryologickou vegetaci na hadcích u Mnichova blíže Mariánských Lázní v Čechách s vegetací mechorostů, kterou shledal PROF. DR. JOS. PODPĚRA[8]) na moravských hadcích v údolí Jihlavky nad Mohelnem nebo u Hrubšic nedaleko Ivančic; z druhů zde zjištěných PODPĚROU na Moravě (l. c. J. SUZA: »X e r o t h e r m n í k v ě t e n a p o d k l a d ů s e r p e n t i n o v ý c h n a d o l n í m t o k u J i h l a v k y.« Zvl. ot. Časop. Morav. Musea zem. Ročn. XX., 1921, str. 13) shodují se na českých hadcích, pokud jsem tyto dosud podrobně prozkoumal, jen tyto tři druhy: *Grimmia pulvinata, Homalothecium sericeum* a *Leucodon sciuroides.*

Moravské skály hadcové u Mohelna jsou svou polohou v mnohem teplejším kraji a chovají dle výčtu PODPĚROVA také druhy teplomilnější, jako na př. *Hymenostomum tortile* Br. eur., *Weissia crispata* JUR. a *Grimaldia fragrans* CORDA, i hojnější výběr jinak obecnějších a

---

[8]) l. c. PODPĚRA JOSEF: V ý s l e d k y b i o l o g i c k é h o v ý z k u m u M o r a v y. I.—VII. (Prostějov, Brno) 1904—1923.

široce rozšířených mechů, zejména u Mohelna tyto druhy: *Leptotrichum flexicaule* HAMP., *Tortella tortuosa* LIMPR., *Eucalypta contorta* LINDB., *Fissidens decipiens* DE NOT., *Orthotrichum anomalum* HDW., *Schistidium apocarpum* Br. eur., u Hrubšic pak ještě *Grimmia campestris* (leucophaea) BURCH. a *G. commutata* HÜB.

Po tomto srovnání bryologické vegetace na hadcích v Čechách ze dvou různých míst, polohou vzdálených a klimatem od sebe se lišících a lokalitami moravskými vysvítá, že společenstva mechová ve svém složení na hadcových skalách jsou velice různá.

Při podrobnějším studiu těchto společenstev skalních bryophyt seznáme, že hadcové skály mají svou bryologickou vegetaci podobnou, která roste na jiných substrátech skalních a složena jest z druhů hojně rozšířených právě v blízkém okolí na skalách složených hlavně z hornin křemičitých nebo jen velmi slabě vápenatých.

Dle podrobného rozboru forem těchto jinak obecne rozšířených mechorostů, které jsou dosti plastické k přizpůsobení se k novým poměrům edafickým, dají se pozorovati, jak jsem vpředu ukázal, zvláštní úchylky jak habituelní, tak morfologické a anatomické, jež svědčí, že tyto formy svým přizpůsobením vytvořují *specifické formy hadcové* neboli *serpentinomorfosy*.

Résumé:

Les bryophytes serpentinomorphes des roches à serpentine des environs de Mariánské Lázně, en Bohême.

Par *Jan Vilhelm*, professeur à l'Université Charles (Prague).

Grâce à l'influence du substratum de roches à serpentine, il s'est formé des espèces dites écologiques ou biologiques parmi lesquelles on connaît depuis longtemps, par exemple, *Asplenium adulterinum* MILDE, *Aspl. serpentini* TAUSCH, *Cerastium alsinefolium* TAUSCH.

Entre autres localités connues, on trouve des habitats classiques de ces plantes dans la Bohême occidentale entre Mnichov (Einsiedl) Rauschenbach et Sangerberk, près de Mariánské Lázně. Sur la crête latérale de la chaîne du Císařský Les (Kaiserwald), s'élèvent deux sommets étendus et boisés, le Vlčí kámen (Wolfsstein, 880 *m*) et la Rauschenbašská lada (Auf der Haide) 865 *m*). Il y a sur les deux sommets des rochers dénudés et une petite roche à serpentine; surtout sur le second il y a un plus grand rocher de ce genre vers l'est.

J'avais déjà étudié ces localités en 1920 et j'y ai fait de nouveau des recherches en 1924 en compagnie du PROF. KAREL DOMIN. Je vouai à ces roches à serpentine une attention particulière, parce que je comptais y trouver chez les bryophytes une variabilité interéssante puisque quelques-unes de leurs espèces présentent une réaction très sensible sous l'influence des facteurs du substratum.

J'ai réussi à découvrir, dans ces localités, chez quelques espèces de bryophytes, croissant sur les roches à serpentine, des formes écologiques que l'on peut considérer comme serpentinomorphes, déterminées qu'elles sont par le substratum en question.

Sur les roches à serpentine la végétation est pauvre et monotone. Les bryophytes n'y sont représentés que par un nombre d'espèces relativement peu élevé, car les rochers exposés au soleil ne portent que des xerophytes extrèmes.

La sécheresse énorme du substratum et sa composition chimique sont la cause que la végétation qui s'y acclimatise forme de nouvelles races (formes, variétés ou espèces biologiques), qui y demeurent de façon permanente et qui si elles vont s'installer sur un autre substratum, peuvent s'y maintenir pendant quelques générations avant de retourner au type primitif d'où elles sont sorties.

Les bryophytes présentent notamment sur les roches à serpentine une taille plus rabougrie et, chez les espèces plastiques, on peut constater aussi des modifications morphologiques et anatomiques d'habitus.

Parmi les bryophytes xérophytes des rochers, j'ai observé des serpentinomorphes dans les espèces suivantes:

1. *Hedwigia albicans* LINDB. *f. nana n. f.*

Planta 5—10 *mm* longa, foliis anguste oblongo-lanceolatis, cellulis per totam laminam tenuioribus, quadratis.

2. *Grimmia pulvinata* Sm. *f. serpentinosa n. f.*

Forma humilis, ad 5 *mm* longa, statura Grimmiae campestri (leucophaeae) similis, longifolia, griseo-atra, urna elongato-oblonga, operculo acute conico.

3. *Homalothecium sericeum Br. eur. f. pulchella n. f.*

Caespites plani, adpressi, sericeo-virides. Caulis tenuior, repens. Folia breviter acuminata, costa magis angusta vel nulla. Cellulae laminae ad basin maiores et latiores.

4. *Orthotrichum rupestre* SCHL. *f. humilis n. f.*

Pulvinuli condensati, statura humili (15 *mm* long.), mediocriter robusti, foliis sensim anguste acuminatis, cellulis laminae basilaribus hyalinis. Calyptra pilis longis villosa.

5. *Schistidium gracile* LMPR. *f. longiurna n. f.*

Forma habitu Schistidio gracili f. validiori similis, incremento humiliori, pulvinulis laxius confertis, paulum decumbentibus, caulibus mediocriter validioribus, dense foliatis. Folia serrata, superiora pilis hyalinis instructa; capsula (urna) oblonge cylindrica, maior, 1,6—1,7 mm longa (apud f. normalem 0,9 *mm* longa!).

Hae omnes formae in saxis et rupibus serpentinosis apricis ad op. Mnichov (Einsiedl) prope Mariánské Lázně in Bohemia occidentali occurunt.

Chez d'autres espèces de bryophytes des roches à serpentine des environs Mariánské Lázně je n'ai pas trouvé de formes qui s'écartassent des types normaux.

C'étaient: *Frullania dilatata* DUM., *Pterigynandrum filiforme* HDW. *var. decipiens* LMPR. Ensuite sur l'humus entre les rochers: *Ceratodon purpureus* BRID. *var. flaviseta* LIMPR., *Polytrichum juniperinum* WILLD.,

Webera nutans HDW., *Hylocomium splendens* Br. eur. et *Dicranum scoparium* HDW., les deux dernières espèces de taille rabougrie.

Le PROF. DOMIN m'a fourni encore d'autres matériaux bryologiques provenant d'autres localités, notamment des roches à serpentine de Malešov, près de Kutná Hora dans le Bohême centrale. Cette localité ne présente que deux espèces de mousses, sur lesquelles on peut également observer le rabougrissement de la taille. Ce sont: *Leucodon sciuroides* SCHWG. et *Hedwigia albicans* LINDB.

La végétation bryologique des roches à serpentine de Moravie a été examinée par le PROF. JOS. PODPĚRA de Brno; elle embrasse aussi des espèces plus thermophiles et plus variées. En comparant la végétation bryologique des roches à serpentine de Bohême, provenant de diverses localités, éloignées l'une de l'autre, mais ne différant pas par le climat, avec celle des localités de Moravie, il appert que les associations de bryophytes sur les roches à serpentine diffèrent beaucoup par leur composition.

En étudiant de plus près ces associations, nous remarquons qu'elles sont composées d'espèces très répandues dans les environs immédiats sur les rochers formés de silicates ou qui ne contiennent que très peu de chaux.

Par une analyse détaillée des formes de ces bryophytes assez répandus du reste, qui ont assez de plasticité pour s'accommoder à de nouvelles circonstances de substratum, on peut observer, comme je l'ai dit déjà, des anomalies particulières, qui témoignent que ces espèces, en s'accommodant au milieu, produisent des formes spécifiques pour les roches à serpentine ou des serpentinomorphes.

Bibliographie.

1. DOMIN KAREL: Císařský Les. Archiv pro výzkum Čech. 1924.
2. EBNER V. VIKTOR: Analyse der Asche von Asplenium Serpentini. Ein Beitrag zur Kenntnis des Bodeneinflusses auf die Vegetation. Verhandl. d. zool.-botan. Gesellsch. in Wien. Bd. XI., p. 375—378.
3. CHALUBIŃSKI T.: Grimmiae tatrenses 1882, p. 9 et 34.
4. KAVINA KAREL: Několik poznámek o slezinníku hadcovém. Časopis Musea král. čes. 1918. Odd. přírod., p. 121.
5. LIMPRICHT GUSTAV: Die Laubmoose. I.—III. Bd. (1890—1904).
6. LOESKE LEOPOLD: Grimmiaceae. 1913, p. 162 et 163.
7. PODPĚRA JOSEF: Výsledky bryologického výzkumu Moravy. I.—VII. (1904—1923.)
8. SCHUSTLER FRANT.: Slezinník prostřední (Asplenium adulterinum Milde) a jeho systematický význam. Věda přírodní. Ročník I., p. 167—171.
9. SUZA JINDŘICH: Xerothermní květena podkladů serpentinových na dolním toku Jihlavky. — Zvl. ot. Časop. Moravského Musea zem. R. XX. (1921), p. 13.
10. VELENOVSKÝ JOSEF: Mechy české. Rozpr. II. tř. Čes. Akad., 1897, p. 190.
11. VILHELM JAN: Příspěvek k oekologii mechů. Contribution à l'écologie des Mousses. — Public. de la facul. des scienc. de l'univ. Charles. 1923, no 4., p. 31.
12. VILHELM JAN: Variabilita rodu Grimmia v Československu. Variabilité du genre Grimmia en Tchécoslovaquie. —. Memoir. de la Société royale des sciences de Bohême. Cl. II., 1924, p. 27 et 28.
13. VILHELM JAN: Variabilité du genre Schistidium en Tchécoslovaquie. Acta botanica bohemica. Vol. I. (1922), p. 50.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 34.

Dr. VLADIMÍR KOŘÍNEK:

Les méthodes de Dirichlet et les formes quadratiques à *n* variables du type

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2.$$



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 34.

Dr. **VLADIMÍR KOŘÍNEK:**

Les méthodes de Dirichlet et les formes quadratiques à *n* variables du type

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots . + x^2_{n-1} - x^2_n.$$



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dr. *Vladimir Kořinek:*

Les méthodes de Dirichlet et les formes quadratiques à *n* variables du type $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2$.

En employant les méthodes de Dirichlet qui servent à calculer le nombre de classes des formes quadratiques binaires, M. G. Humbert a déduit la formule pour la somme des aires non euclidiennes des domaines fondamentaux (domaines de Poincaré) des formes quadratiques ternaires indéfinies, choisies, une par classe, dans un genre donné de l'ordre $[\Omega, \Delta]$. (Comptes Rendus 167, p. 181, 1918).

Dans la présente note je me propose d'étendre le résultat obtenu par M. G. Humbert aux formes quadratiques à *n* variables qui peuvent être transformées par une substitution réelle en somme de $(n-1)$ carrés positifs et d'un carré négatif. Pour éviter les formules et les équations trop longues je donnerai la démonstration seulement pour les formes à quatre variables, ce cas étant déjà assez compliqué pour que toutes les difficultés y paraissent.

1. **Le domaine fondamental du groupe reproductif arithmétique.** Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$*) une forme quadratique quaternaire du type $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ aux coefficients entiers. L'équation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \qquad (1)$$

représente dans l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4) un cône ayant le sommet à l'origine. On peut diviser l'intérieur de ce cône, c'est-à-dire la partie de l'espace où l'inégalité

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) < 0$$

est satisfaite, en infinité de domaines, limités par des hyperplans à trois dimensions passant par l'origine. Ces domaines possèdent la propriété suivante: Deux points quelconques, intérieurs à un de ces domaines,

---

*) Dans cet article j'écris toujours une forme quadratique sous la forme $a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \cdots$, les coefficients auprès des produits de deux variables étant multipliés par 2.

ne peuvent être transformés, l'un à l'autre, par aucune substitution du groupe reproductif arithmétique Γ**) de la forme f, et chaque point à l'intérieur du cône (1), situé au dehors d'un de ces domaines choisi á l'avance, peut être transformé en un point de ce domaine par une substitution du groupe Γ. (Voir Fricke-Klein Automorphe Funktionen T. I. p. 577.)

Nous appelerons le domaine fondamental à quatre dimensions (domaine de Bianchi) de la forme f un des domaines tout-à-l'heure définis, choisi une fois pour toutes, et nous le désignerons par R. R est alors un angle polyèdre à quatre dimensions ayant le sommet à l'origine et allant à l'infini. Il se transforme par la substitution semblable de la forme f:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en angle polyèdre qui lui est symétrique par rapport à l'origine.

Si, au lieu d'un espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4), on envisage l'espace à trois dimensions avec un système de coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3, x_4), l'équation (1) représente une surface quadratique, à l'intérieur de laquelle on peut définir de la même manière un domaine fondamental à trois dimensions qui est maintenant un polyèdre limité par des plans ordinaires. Nous le désignerons par ∇. En cas de la surface quadratique $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1) = 0$

∇ est la section, par hyperplan $x_4 = 1$, du domaine fondamental R.

Enfin nous entendrons par l'aire non-euclidienne du domaine ∇ et nous désignerons également par ∇ l'integrale

$$\nabla = \int_{(\nabla)} \frac{\sqrt{\Delta}}{f^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1)} d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3, \qquad (2)$$

où Δ signifie la valeur absolue du discriminant de la forme f,

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{x_4}, \quad \xi_3 = \frac{x_3}{x_4},$$

et l'integration s'étend à ∇. J'ajoute que la différentielle

$$\frac{d\xi_1 \; d\xi_2 \; d\xi_3}{f^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1)}$$

est invariante par rapport au groupe Γ.

**) C'est-à-dire du groupe des substitutions semblables à coefficients entiers ayant le module $+1$.

2. **L'équation fondamentale.** Soient

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots f_h \qquad (f)$$

des formes quadratiques quaternaires, choisies une par classe dans un genre donné, appartenant à l'ordre:*)

$$1\left\{\begin{matrix} o_1, & o_2, & o_3 \\ 1, & 1, & 1, \end{matrix}\right\}.$$

Nous désignerons par

$$\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \ldots\ldots \mathfrak{F}_h \qquad (\mathfrak{F})$$

les formes réciproques aux formes (f) et par

$$R_1,\ R_2,\ \ldots\ldots R_h \qquad (R)$$

leurs domaines fondamentaux à quatre dimensions. Ces formes appartiennent à l'ordre

$$1\left\{\begin{matrix} o_3, & o_2, & o_1 \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix}\right\}.$$

La forme réciproque est définie par l'équation $\mathfrak{F}_i = (-1)^\tau f_i^{(2)}$, où τ signifie l'indice d'inertie. (Voir Bachman l. c. IV. 1., p. 429.) Le genre envisagé est déterminé par les caractères génériques suivants:

$$\left(\frac{f}{p_1}\right),\quad \left(\frac{f^{(1)}}{p_2}\right),\quad \left(\frac{f^{(2)}}{p_3}\right), \qquad (C)$$

p_i désigne tout nombre premier contenu dans o_i.

Je me bornerai dans ce qui suit aux formes (f) proprement primitives et aux invariants o_i impairs. Les formes improprement primitives et les invariants pairs n'éxigent aucune modification essentielle de la démonstration.

Pour qu'un nombre $-M < 0$, premier à $2\,o_1\,o_2\,o_3$, soit susceptible d'une représentation propre par les formes $(\mathfrak{F})$, il faut et il suffit que $-M$ ait les caractères quadratiques suivants:

$$\left(\frac{-M}{p_3}\right) = \left(\frac{\mathfrak{F}}{p_3}\right) = \left(\frac{-f^{(2)}}{p_3}\right) \qquad (3)$$

(Bachmann l. c. IV. 1 p. 566, § 5.—9.).

*) J'emploie la notation de M. Paul Bachmann Zahlentheorie IV. Teil. 1. Abteilung p. 427. Le chiffre devant le crochet signifie l'indice d'inertie des formes (f) o_1, o_2, o_3 désignent leurs invariants arithmétiques. Enfin les 1 à la seconde ligne du crochet signifient que les formes (f) ainsi que leurs premières et deuxièmes adjointes sont propres. Le chiffre 2 à la même place signifiera que les formes (f) ou leurs adjointes sont impropres. Je désignerai par $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ la première et la seconde adjointe primitive de la forme f.

Pour calculer la somme des aires non euclidiennes $\sum_k \nabla_k$ des domaines fondamentaux appartenant aux formes $(\mathfrak{f})$ on part de l'équation

$$\varrho \sum_{k=1}^{h} \sum_{X_i} \frac{1}{|\mathfrak{f}_k(X_i)|^{2+\varrho}} = \varrho \sum_{M} \frac{P(M)}{M^{2+\varrho}}. \qquad (4)$$

Au premier membre de cette équation on fait d'abord la sommation pour toutes les valeurs entières de X_1, X_2, X_3, X_4:

1. qui font la $\mathfrak{f}_k(X_i)$ négative et première à $2\, o_1 o_2 o_3$ et

2. dont le point représentatif dans l'espace à quatre dimensions (X_1, X_2, X_3, X_4) est situé dans R_k. Ensuite on fait la sommation pour toutes les $\mathfrak{f}_k$ de $(\mathfrak{f})$. Au second membre la somme est étendue à tous les nombres M positifs, premiers à $2\, o_1\, o_2\, o_3$, qui possèdent les caractères quadratiques donnés par la formule (3). $P(M)$ signifie le nombre de représentations, propres ou non, du nombre $-M$ par les formes $(\mathfrak{f})$ qui sont situées dans (R).

On obtient la formule pour la somme $\sum_k \nabla_k$ lorsque dans l'équation (4) on fait tendre φ vers zéro et puis on égale la limite du premier membre à celle du second.

3. **La limite du premier membre.** On peut partager au moyen de la condition 1° tous les systèmes (X_1, X_2, X_3, X_4) sur lesquels porte la somme

$$\varrho \sum_{X_i} \frac{1}{|\mathfrak{f}_k(X_i)|^{2+\varrho}} \qquad (5)$$

en un certain nombre N de groupes. Tous les systèmes appartenant à un de ces groupes sont congrus, l'un à l'autre, mod A, où $A = 2\, o_1\, o_2\, o_3$. Ils sont fournis par les formules

$$X_i = \alpha_i + n_i A, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \qquad (6)$$

où les n_i représentent des entiers quelconques. Nous calculerons d'abord la limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_{X_i}' \frac{1}{|\mathfrak{f}_k(X_i)|^{2+\varrho}}, \qquad (7)$$

où la somme Σ' porte sur tous les systèmes (X_i) d'un certain groupe qui satisfont à la condition 2° du paragraphe précédent. D'après les principes de Dirichlet cette limite est égale à

$$\lim_{t \to \infty} \frac{2\, T}{t^2},$$

où T est le nombre de systèmes (X_i) contenus dans les formules (6)

et satisfaisant à la condition 2° pour lesquels

$$| \mathfrak{F}_k (X_i) | < t.$$

On peut écrire cette dernière inégalité sous la forme

$$| \mathfrak{F}_k (\Xi_i) | < 1,$$

où

$$\Xi_i = \frac{X_i}{\sqrt{t}} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{t}} + \frac{n_i A}{\sqrt{t}}. \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Ces équations représentent dans l'espace à quatre dimensions des hyperplans à trois dimensions qui forment une grille. T est égal au nombre de points de la grille qui sont situés dans R_k à l'intérieur de la surface

$$- \mathfrak{F}_k (\Xi_i) = 1.$$

On en tire

$$\lim_{t \to \infty} \frac{2\,T}{t^2} = \frac{2\,V}{A^4},$$

où V, qui reste à calculer, est le volume de l'angle polyèdre R_k limité par la surface mentionnée. Je désignerai ce domaine par R'_k. On a alors:

$$V = \int_{R'_k} dX_1 \; dX_2 \; dX_3 \; dX_4 .$$

Si, dans l'integrale, on effectue la transformation

$$X_1 = r\,\xi_1, \;\; X_2 = r\,\xi_2, \;\; X_3 = r\,\xi_3, \;\; X_4 = r,$$

on obtient

$$V = \int_{(R'_k)} r^3 \; dr \; d\xi_1 \; d\xi_2 \; d\xi_3 .$$

On a maintenant à integrer $r^3\,dr$ entre les limites $r = 0$ et

$$r = \frac{1}{\mathfrak{F}_k (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1) \,|^{1/2}}$$

et l'integrale devient

$$V = \frac{1}{4} \int_{(\mathcal{V}_k)} \frac{1}{\mathfrak{F}_k^2 (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1)} \; d\xi_1 \; d\xi_2 \; d\xi_3 .$$

Cette integrale multipliée par $4\sqrt{\Delta}$ est précisément l'aire non euclidienne du domaine fondamental. (Voir la formule (2)).

La limite (7) est égale alors à

$$\frac{\mathcal{V}_k}{2\,A^4 \sqrt{\Delta}} .$$

Cette expression étant la même pour tous les N groupes des systèmes (X_i), on obtient la limite de l'expression (5) en ajoutant le facteur N:

$$\frac{N}{2A^4\sqrt{\Delta}}\,V_k.$$

Enfin, si l'on fait la sommation pour toutes les formes $\mathfrak{f}_i$ de $(\mathfrak{f})$, on obtient la limite du premier membre de l'équation (4):

$$\frac{N}{2A^4\sqrt{\Delta}}\sum_{k=1}^{h} V_k. \tag{8}$$

Le calcul de la mesure $\mathfrak{M}_4$ du genre des formes quadratiques quaternaires positives, qui est de l'ordre

$$0\begin{Bmatrix} o_3, & o_2, & o_1 \\ 1, & 1, & 1 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

et possède les mêmes caractères génériques (C) que le genre envisagé, se fait au moyen d'une équation analogue à l'équation (4). La limite du premier membre de cette équation est

$$\frac{2N}{A^4}\,V'\,\mathfrak{M}_4, \tag{8'}$$

où

$$V' = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\Delta}}.$$

(Bachmann l. c. IV. 1., str. 633, Bachmann: l. c. II. str. 446 (92).)

4. **La représentation du nombre $-M$ par les formes $(\mathfrak{f})$.** Dans le second membre de l'équation (4) nous pouvons écrire

$$P(M) = \sum_{d^2} P'\left(\frac{M}{d^2}\right). \tag{10}$$

Dans cette expression la somme porte sur tous les diviseurs-carrés de M, l'unité y compris, et $P'(M)$ signifie le nombre de représentations propres de $-M$ par les $(\mathfrak{f})$ qui sont situées dans les domaines fondamentaux (R). Tandisque, en cas des formes ternaires, $P'(M)$ se détermine aisément, on ne sait pas calculer $P'(M)$ en cas des formes quaternaires ce qui constitue la principale différence et difficulté pour les formes à quatre ou à plusieurs variables. Pour exposer comment on peut se passer de la connaissance exacte de $P'(M)$, il faut rappeler quelques théorèmes relatifs à la représentation de M par les $(\mathfrak{f})$.

Lorsque le nombre $-M < 0$ est susceptible d'être représenté par les formes $(\mathfrak{f})$, il existe un genre des formes quadratiques ternaires positives appartenant à l'ordre

$$0\begin{Bmatrix} o_1 & , & Mo_2 \\ 1 & , & 1 \end{Bmatrix}.$$

Soient

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_H \tag{φ}$$

les formes réduites de ce genre et

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots .\ \Phi_H \qquad (\Phi)$$

leurs réciproques. Les caractères du genre sont déterminés par les équations:

$$\left(\frac{\varphi}{p_1}\right) = \left(\frac{f}{p_1}\right), \qquad (11)$$

$$\left(\frac{\Phi}{p_2}\right) = \left(\frac{f^{(1)}}{p_2}\right), \qquad (12)$$

$$\left(\frac{o_3\ \Phi}{\mu}\right) = 1, \qquad (13)$$

où μ signifie tout nombre premier contenu dans M. (Voir Bachmann l. c. IV., 1, p. 566, § 5—9, p. 581, 583.)

En vertu des équations (13) on peut resoudre identiquement par trois entiers $b_{1i},\ b_{2i},\ b_{3i}$ les congruences

$$o_3\ \Phi_i\ (y_1, y_2, y_3) \equiv (b_{1i}\, y_1 - b_{2i}\, y_2 + b_{3i}\, y_3)^2 \qquad \text{mod } M$$
$$i = 1, 2, \ldots n \qquad (14)$$

pour toutes les valeurs entières de y_1, y_2, y_3. Ces congruences possèdent 2^ν systèmes de solutions en trois nombres entiers $b_{1i},\ b_{2i},\ b_{3i}$. ν signifie le nombre de diviseurs premiers de M. Nous déterminons maintenant les formes quadratiques quaternaires

$$f'_1,\ f'_2,\ \ldots .\ f'_l \qquad (f')$$

avec leurs réciproques

$$\mathfrak{F}'_1\ \mathfrak{F}'_2\ \ldots .\ \mathfrak{F}'_l \qquad (\mathfrak{F}')$$

de la manière suivante. On prend pour les coefficients

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{matrix}$$

des formes (f') les coefficients de (φ) et pour les coefficients A_{14}, A_{24}, A_{34} de leurs réciproques $(\mathfrak{F}')$ chaque fois un autre système de racines b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} des congruences (14). Ces conditions déterminent complètement les autres coefficients de (f') et $(\mathfrak{F}')$. Notamment le coefficient A_{44} est égal à M dans toutes les formes $(\mathfrak{F}')$. Pour la prochaine fois nous dirons que les formes (f') contiennent comme partie les formes (φ) et que leurs réciproques $(\mathfrak{F}')$ appartiennet à un système de racines des congruences (14). Le nombre de formes (f') est $l = 2^\nu H$, où H signifie le nombre de formes (φ), c'est-à-dire le nombre de classes ternaires positives du genre consideré. Enfin les équations (3), (11), (12) montrent que les formes (f') appartiennent au genre des formes (f).

On a maintenant le théorème suivant: Les substitutions qui transforment les formes (f) en (f') nous donnent dans leurs trois premières colonnes toutes les représentations propres des formes (φ) par les formes (f) et chacune une fois seulement. (Bachmann l. c. IV. 1. p. 570.)

Par exemple toutes les représentations propres de la forme φ_1 par la forme f_1 sont données par les substitutions qui transforment f_1 en

$$f'_1,\ f'_2,\ \ldots\ f'_{2^\nu}\,. \tag{15}$$

Ce sont celles des formes (f') qui contiennet la forme φ_1 comme partie. Soit

$$\begin{pmatrix} q_{11}, & q_{12}, & q_{13}, & q_{14} \\ q_{21}, & q_{22}, & q_{23}, & q_{24} \\ q_{31}, & q_{32}, & q_{33}, & q_{34} \\ q_{41}, & q_{42}, & q_{43}, & q_{44} \end{pmatrix}.$$

une telle substitution qui transforme f_1 en f'_1. La représentation respective de φ_1 par f_1 est donné par la matrice:

$$\begin{pmatrix} q_{11}, & q_{12}, & q_{13} \\ q_{21}, & q_{22}, & q_{23} \\ q_{31}, & q_{32}, & q_{33} \\ q_{41}, & q_{42}, & q_{43} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Les trois déterminants du troisième degré formés de cette matrice nous donnent une représentation propre du nombre $-M$ par la forme $\mathfrak{F}_1$ qui correspond à la représentation (16) de φ_1 par f_1.

Formons maintenant toutes les substitutions de la forme

$$\begin{pmatrix} r_{11}, & r_{12}, & r_{13}, & q_1 \\ r_{21}, & r_{22}, & r_{23}, & q_2 \\ r_{31}, & r_{32}, & r_{33}, & q_3 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

où l'on pose pour

$$\begin{pmatrix} r_{11}, & r_{12}, & r_{13} \\ r_{21}, & r_{22}, & r_{23} \\ r_{31}, & r_{32}, & r_{33} \end{pmatrix}$$

toutes les substitutions semblables entières de la forme φ_1 à déterminant $+1$. q_1, q_2, q_3 sont trois entiers choisis par la condition que la substitution doit transformer la forme f'_1 en une forme de (15) ce qui est toujours possible et d'une seule manière. (Bachmann l. c. IV. 1., p. 568 § 6). Le nombre de substitutions (17) est égal au nombre t_1 de substitutions semblables entières de la φ_1 à déterminant $+1$.

Maintenant deux cas peuvent se présenter:

1°. Toutes les substitutions de la forme (17) changent f'_1 en elle-même.

2°. Les substitutions (17) changent f'_1 en r formes de (15), f'_1 y compris. En ce cas $t_1 = rs$ et s substitutions de (17) changent f'_1 en elle-même.

Le premier cas se présente toujours, lorsque la forme réduite φ_1 est située soit à l'intérieur du champ de réduction à six dimensions des formes quadratiques ternaires définies, soit sur une face à cinq dimensions qui limite ce champ,*) car en ce cas $t_1 = 1$. Lorsque la forme φ_1 appartenant au contour du champ de réduction est située sur une arête à 4, 3, 2 ou 1 dimensions,**) c'est en général le second cas qui se présente, puisque $t_1 > 1$.

Nous grouperons maintenant les formes (15) en groupes de la manière que les substitutions (17) changent seulement une forme (15) en formes appartenant au même groupe. Soit p_1 le nombre de ces groupes. On partagera les formes de (f') qui contiennent une autre forme φ_i de (φ) en p_i groupes de la même manière. Soient par exemple f'_1, f'_2 deux formes (15) du même groupe. Il suit des théorèmes connus sur la représentation que les représentations propres de $-M$ par $\mathfrak{F}_1$ qui correspondent aux transformations de f_1 en f'_1 sont identiques à celles qui correspondent aux transformations de f_1 en f'_2. De même on voit aisément que parmi toutes les représentations propres de $-M$ par $\mathfrak{F}_1$ correspondant aux transformations de f_1 en f'_1 il n'y a q'une représentation qui appartient au domaine R_1. Il en suit immédiatement que le nombre de représentations propres de $-M$ par $(\mathfrak{F})$ appartenant aux domaines (R) est égal à

$$\sum_i p_i,$$

la somme portant sur toutes les formes (φ). À la place des nombres p_i nous introduisons les nombres q_i par la relation

$$p_i = \frac{2^\nu}{q_i}.$$

Les q_i peuvent être des nombres fractionnaires et ils satisfont à l'inégalité

$$1 \leqq q_i \leqq t_i. \tag{18}$$

Nous pouvons maintenant écrire pour $P'(M)$ la formule suivante:

$$P'(M) = 2^\nu \left(H_0 + \sum_i \frac{1}{q_i} \right), \tag{19}$$

*) Au point de vue arithmétique cela veut dire que les conditions de réduction de la forme ne contiennent aucun signe d'égalité on en contiennent un.

**) Cela signifie que parmi les conditions de réduction on trouve 2, 3, 4 ou 5 équations indépendantes. J'emploie le langage géométrique pour abréger les considerations, mais on peut très bien s'en passer.

où H_0 désigne le nombre de formes φ n'ayant qu'une substitution semblable entière à déterminant $+1$ et la somme $\sum\limits_i \frac{1}{q_i}$ porte sur les formes (φ) qui en ont plusieurs. En général on ne sait pas calculer les nombres p_i et q_i.

5. **La limite du second membre de l'équation** (4). En vertu de l'équation (10) le second membre de l'équation (4) peut être écrit sous la forme

$$\varrho \sum_M \frac{\sum\limits_{d^2} P'\left(\frac{M}{d^2}\right)}{M^{2+\varrho}}$$

et tenant compte de la manière suivant laquelle on fait les sommes $\sum\limits_M$, $\sum\limits_d$, on a

$$\varrho \sum_M \frac{\sum\limits_{d^2} P'\left(\frac{M}{d^2}\right)}{M^{2+\varrho}} = \varrho \left\{ \sum_d{}' \frac{1}{d^{2(2+\varrho)}} \right\} \left\{ \sum_M \frac{P'(M)}{M^{2+\varrho}} \right\},$$

où la somme Σ' porte sur les entiers positifs, premiers à $A = 2\, o_1\, o_2\, o_3$, l'unité y compris. Lorsqu'on fait dans l'équation précédente ϱ tendre vers zéro, on obtient:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum \frac{P(M)}{M^{2+\varrho}} = \sum_d{}' \frac{1}{d^4} \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{P'(M)}{M^{2+\varrho}}. \tag{20}$$

Pour évaluer la limite du second membre de cette équation on la divisera, en utilisant l'équation (19), en deux parties:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{P'(M)}{M^{2+\varrho}} = \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{2^\nu H_0(M)}{M^{2+\varrho}} + \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{2^\nu \sum\limits_i \frac{1}{q_i}}{M^{2+\varrho}}. \tag{21}$$

Je désignerai par L la seconde limite de cette expression et je démontrerai d'abord que L est égale à zéro. En vertu de l'inégalité (18) on peut écrire

$$\sum_i \frac{1}{t_i} \leqq \sum_i \frac{1}{q_i} \leqq k, \tag{22}$$

où k est le nombre de formes (φ) ayant deux ou plusieurs substitutions semblables. Par conséquent la série

$$\sum_M \frac{2^\nu k(M)}{M^{2+\varrho}} >> \sum_M \frac{2^\nu \sum\limits_i \frac{1}{q_i}}{M^{2+\varrho}}$$

est une série majorante à la série qui figure dans la limite L. Toutes les formes de (φ) ayent deux ou plusieurs substitutions semblables sont

situées sur les arêtes du contour du champ de réduction. On peut écrire

$$k = \sum_j H_j,$$

où H_j est le nombre de formes (φ) qui sont situées sur une arête bien déterminée j et la somme porte sur toutes les arêtes non équivalentes du champ de réduction. Ces arêtes sont à 4, 3, 2 ou 1 dimensions. Par conséquent nous pouvons écrire la série majorante

$$\sum_M \frac{2^\nu k(M)}{M^{2+\varrho}} = \sum_j \sum_M \frac{2^\nu H_j(M)}{M^{2+\varrho}}$$

et nous avons

$$0 \leqq L \leqq \sum_j \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{2^\nu H_j(M)}{M^{2+\varrho}}.$$

Posons encore

$$l_j = \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{2^\nu H_j(M)}{M^{2+\varrho}}. \tag{23}$$

La proposition enoncée sera démontrée, si l'on démontre que toutes les l_j sont égales à zéro. Au lieu de la limite l_j nous envisagerons cette autre:

$$l'_j = \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{2^\nu H'_j(M)}{M^{2+\varrho}}, \tag{24}$$

où H'_j désigne le nombre de formes ternaires, positives, réduites, primitives ou non, du discriminant $o_1^2\ o_2\ M$ qui sont situées sur la j-ième arête du champ de réduction. La série qui figure à (24) est une série à termes positifs et la série qui figure à (23) y est contenue comme une série partielle. Il suffit alors de démontrer que la limite (24) est égale à zéro.

Suivant les principes de Dirichlet nous pouvons écrire

$$l'_j = \lim_{t \to \infty} \frac{2T}{t^2},$$

où T désigne le nombre de termes $\frac{1}{M^{2+\varrho}}$ de la série pour lesquels $M \leqq t$. Nous avons alors

$$T = \sum_{M \leqq t} 2^\nu H'_j(M) < 2^x \sum_{M \leqq t} H'_j(M),$$

où x est un entier défini par les inégalités

$$x! \leqq t < (x+1)!\ .$$

En introduisant cette expression dans la limite, on obtient

$$0 \leqq l'_j \leqq 2 \lim_{t \to \infty} \frac{2^x}{t^{1/2}} \cdot \lim_{t \to \infty} \frac{\sum_{M \leqq t} H'_j(M)}{t^{3/2}}.$$

Puisqu'on voit aisément que

$$0 \leqq \lim_{t \to \infty} \frac{2^x}{t^{1/2}} \leqq \lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{(x!)^{1/2}} = 0,$$

il reste à examiner la limite

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sum_{M \leq t} H'_j(M)}{t^{3/2}}. \qquad (25)$$

Dans cette expression $\sum_{M \leq t} H'_j(M)$ est le nombre de systèmes de six entiers $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. $D = a_1 a_2 a_3 + 2 b_1 b_2 b_3 - a_1 b_1^2 - a_2 b_2^2 - a_3 b_3^2 \leqq o_1^2 o_2 t.$ (26)
D étant positif, impair.

2°. La forme positive ternaire réduite $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix}$ est située sur la j-ième arête du contour du champ de réduction.

3°. Soit p_i un nombre premier de $o_1^2 o_2$ et $p_i^{e_i}$ la plus haute puissance de p_i qui figure dans $o_1^2 o_2$, $p_i^{e_i}$ est aussi la plus haute puissance qui divise D.

4°. Soit q'_i un nombre premier do o_3 qui ne figure pas dans $o_1^2 o_2$, D est premier à q_i.

Les conditions 3° et 4° nous permettent de diviser tous les systèmes $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix}$ en un certain nombre fini de groupes. Les systèmes d'un de ces groupes sont tous congrus entre eux mod B, où $B = 2\, o_1^2\, o_2\, o_3$ et ils sont donnés par les formules:

$$a_1 = \alpha_1 + m_1 B, \quad a_2 = \ldots\ldots\ldots,$$
$$b_1 = \beta_1 + m'_1 B, \quad b_2 = \ldots\ldots\ldots,$$

les m_i et m'_i étant des entiers quelconques. Les nombres $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ doivent satisfaire encore aux conditions 1° et 2°. L'inégalité (26) peut être écrite sous la forme

$$\frac{D}{t} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 + 2\, \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1^2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2^2 - \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3^2 \leqq o_1^2 o_2,$$

où

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt[3]{t}} + m_1 \frac{B}{\sqrt[3]{t}}, \quad \mathfrak{A}_2 = \ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt[3]{t}} + m'_1 \frac{B}{\sqrt[3]{t}}, \quad \mathfrak{B}_2 = \ldots\ldots\ldots \qquad (27)$$

Ces équations nous représentent dans l'espace à six dimensions $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3)$ des hyperplans à cinq dimensions qui forment une grille.

Nous décomposons la somme qui figure dans la limite (25) en sommes partielles. Une telle somme nous représente le nombre T' de systèmes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ d'un groupe qui satisfont aux conditions 1° et 2°. Pour démontrer que la limite (25) est égale à zéro, le nombre de groupes étant fini, il suffit évidemment de démontrer que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{T'}{t^{3/2}} = 0.$$

T' signifie le nombre de points de la grille qui sont situés sur la j-ième arête à l'intérieur de la surface

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 + 2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1^2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2^2 - \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3^2 = o_1^2 o_2 . \quad (28)$$

Supposons d'abord que la j-ième arête est une arête à quatre dimensions. Le nombre T' de points de la grille deviendrait maximum, si l'arête envisagée était l'intersection de deux hyperplans de (27). En ce cas le nombre T' croîtrait avec t à l'infini de la même manière que l'expression

$$\frac{V t^{4/3}}{B^4},$$

où V signifie le volume de l'espace à quatre dimensions formée par l'arête et limitée par la surface (28). V est une quantité finie. (Voir Humbert: Comptes Rendus 168, 974, 1919.) On a alors:

$$0 \leqq \lim_{t \to \infty} \frac{T'}{t^{3/2}} \leqq \frac{V}{B^4} \lim_{t \to \infty} \frac{t^{4/3}}{t^{3/2}} = 0.$$

Si l'arête envisagée était une arête à trois, deux ou une dimensions, on aurait au numérateur de la dernière limite $t^{3/3}$, $t^{2/3}$ ou $t^{1/3}$ et la limite serait a fortiori égale à zéro.

Nous avons alors démontré que la limite L est égale à zéro. Or, dans la limite du second membre de l'équation (4) les termes qui figurent dans L de (21) n'importent pas. Ce sont les termes qui proviennent de la seconde partie $\sum_i \frac{1}{q_i}$ de la formule (19). Nous pouvons alors, sans changer le résultat, remplacer $\sum_i \frac{1}{q_i}$ par un nombre positif plus petit. En vertu de (22) nous choisissons pour ce nombre $\sum_i \frac{1}{t_i}$ ce qui revient à remplacer au second membre de l'équation (4) $P'(M)$ par $2^\nu \mathfrak{M}_3(M)$, 2^ν fois la mesure des formes (φ). Par conséquent la limite (20) du second membre de l'équation (4) est égale à la limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum \frac{P(M)}{M^{2+\varrho}} = \sum_d{}' \frac{1}{d^4} \cdot \lim_{\varrho \to 0} \varrho \sum_M \frac{2^\nu \mathfrak{M}_3(M)}{M^{2+\varrho}}.$$

Mais celle-ci est de la même forme comme la limite du second membre

de l'équation analogue à (4) qui sert à calculer la mesure $\mathfrak{M}_4$ du genre des formes quaternaires positives ayant les mêmes caractères génériques (C) que le genre (f) et appartenant à l'ordre (9). Seulement, dans cette dernière limite, $\mathfrak{M}_3\,(M)$ signifie la mesure du genre des formes ternaires positives qui est donné par les équations (11), (12) et par la suivante

$$\left(\frac{-\,o_3\;\Phi}{\mu}\right) = 1, \tag{29}$$

qui vient à la place de (13). Or, en tenant compte de cette différence, on n'a qu'à refaire les calcules qui conduisent à la limite du second membre de l'équation pour la mésure $\mathfrak{M}_4$. (Voir Bachmann l. c. IV. 1. p. 611 et suiv.)

À la fin on obtient la formule suivante (Cf. (8) et (8'))

$$\sum_k \Gamma_k = 2\,\pi^2\, E_4, \tag{30}$$

où E_4 est l'expression qui a la même forme comme celle qui donne $\mathfrak{M}_4$. On s'assurera aisément que la différence entre (13) et (29) ne produit aucun effet puisque le discriminant $D = -\,o_1{}^3\,o_2{}^2\,o_3$ des formes (f) est ici un nombre négatif. En cas de D impair et des formes (f) proprement primitives nous avons pour E_4 (Voir Bachmann l. c. IV. 1. p. 620)

$$E_4 = \frac{\zeta\, o_1{}^{3/2}\, o_2{}^2\, o_3{}^{3/2}}{24\,\pi^2\, 2^{\iota+\varkappa+\lambda}} \prod_{q_2} \frac{\left[1+\left(\frac{-\,o_1 f^{(1)}}{q_2}\right)\frac{1}{q_2}\right]\left[1+\left(\frac{-\,o_3 f^{(1)}}{q_2}\right)\frac{1}{q_2}\right]}{\left(1-\frac{1}{q_2{}^2}\right)} \times$$

$$\times \prod_{q_{12}}\left[1+\left(\frac{-\,o_3 f^{(1)}}{q_{12}}\right)\frac{1}{q_{12}}\right] \prod_{q_{23}}\left[1+\left(\frac{-\,o_1 f^{(1)}}{q_{23}}\right)\frac{1}{q_{23}}\right] \times$$

$$\times \prod_{q_{13}}\left[1+\left(\frac{-\,o_2 f f^{(2)}}{q_{13}}\right)\frac{1}{q_{13}}\right] \prod_{q_{123}}\left(1-\frac{1}{q^2_{123}}\right) \sum_M \left(\frac{D}{M}\right)\frac{1}{M^2}.$$

Ici q_2 signifie chaque nombre premier qui est contenu seulement dans o_2; q_{ik}, chaque nombre premier qui est contenu en même temps dans o_i et dans o_k; q_{123}, chaque nombre premier qui est contenu à la fois dans o_1, o_2, o_3. ι est le nombre de nombres premiers distincts de o_1; $\varkappa$ et λ, les mêmes nombres pour o_2 et o_3. ζ est égal à

$$\zeta = 2 + (-1)^{1/4\,(o_1+1)\,(o_2+1)\,+\,\psi(0,\,3)}, \qquad \text{quand } D \equiv 1 \mod 4,$$

$$\zeta = 1, \qquad \text{quand } D \equiv 3 \mod 4.,$$

$(-1)^{\psi(0,3)}$ étant le caractère simultané des formes (f) et $(\mathfrak{F})$. La somme $\sum_M$ s'étend à tous les entiers, positifs premiers à $2D$.

On voit aisément que les suppositions de o_1, o_2, o_3 impairs et des formes (f) proprement primitives ne sont pas essentielles et que la relation (30) subsiste encore en cas du discriminant pair et d'un ordre improprement primitif.

6. **Les formes quadratiques à *n* variables.** La méthode que je viens d'exposer se laisse immédiatement appliquer aux formes quadratiques à n variables du type $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2_{n-1} - x^2_n$ ce qui ne présente aucune nouvelle difficulté. Par conséquent j'indiquerai ici seulement les définitions et les résultats.

L'existence du domaine fondamental du groupe des substitutions semblables à coefficients entiers et à déterminant $+1$ de la forme à n variables du type envisagé est assurée par les principes géneraux établis par M. G. Giraud dans son livre „Leçons sur les fonctions automorphes" 1920. En effet, on vérifiera aisément que le groupe réproductif arithmétique satisfait aux hypothèses (H) du Chap. I. de ce livre. (Cf. aussi Chap. II. § 1—7.) On peut alors définir à l'intérieur du cône

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

c'est-à-dire dans la region, où

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0,$$

un domaine fondamental R à n dimensions de la même manière comme en cas d'une forme quaternaire. Ce domaine possède les propriétés énoncées à la page 3. Seulement en cas de n impair ce sera l'ensemble d'un angle polyèdre ayant le sommet à l'origine et de son symétrique par rapport à l'origine. On definira de la même manière un domain fondamental ∇ à $(n-1)$ dimensions. En cas de la surface

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, 1) = 0$$

ce sera toujours la section, par l'hyperplan $x_n = 1$, de l'angle polyèdre à n dimensions qui forme le domaine R, soit seul (n étant pair), soit joint à son symétrique par rapport à l'origine (n étant impair). Enfin on définira l'aire non euclidienne du domaine fondamental ∇ par l'integrale

$$\nabla = \int_{(\nabla)} \frac{\sqrt{\Delta}\; d\xi_1\; d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{f(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{n-1}\, 1)\,|^{n/2}}.$$

Δ étant la valeur absolue du discriminant de la forme f.

Un genre des formes (f) étant donné, on formera une équation fondamentale analogue à l'équation (4) et on obtiendra comme la limite du premier membre de cette équation:

$$C \frac{1}{n\sqrt{\Delta}} \sum_k \varphi_k \tag{31}$$

en cas de n pair et

$$C \cdot \frac{2}{n\sqrt{\Delta}} \sum_k \varphi_k \tag{31'}$$

en cas de n impair, C étant un certain facteur. La limite du premier membre de l'équation qui sert à calculer la mesure du genre des formes positives ayant les mêmes invariants arithmétiques et les mêmes caractères génériques est

$$C\, V_n\, \mathfrak{M}_n. \tag{32}$$

V_n est le volume d'un certain hyperellipsoide

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n\,(n-2)\,(n-4)\,\ldots\ldots\,(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right])}.$$

(Voir Bachmann l. c. IV. 1. p. 633.)

Quant à la limite du second membre de l'équation fondamentale on procédera de la même manière comme au § 5. On s'assurera que les limites du second membre de l'équation pour les formes indéfinies $\tau = 1$ et de celle pour les formes positives conduisent à la même expression. De la comparaison de (31) ou (31') à (32) on obtiendra enfin la formule

$$\sum_k \varphi_k = \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-2)\,(n-4)\,\ldots\,(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right])} E_n. \tag{33}$$

E_n est une expression de la même forme comme celle qui donne la mesure $\mathfrak{M}_n$ du genre des formes positives ayant les mêmes caractères génériques et les mêmes invariants arithmétiques. Voir Bachmann l. c. IV. 1. p. 624 la formule (48) et p. 626 les formules (51*a*, *b*); conformer aussi H. Minkowski: Untersuchungen über quadratische Formen. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält. Acta math. 7, 291, 1885. Gesammelte Abh. I. p. 157.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 35.

Dr. JULIE MOSCHELES:

Etudes des plates-formes non-structurales.

Méthodes-Résultats.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 35.

Dr. JULIE MOSCHELES:

Etudes des plates-formes non-structurales.

Méthodes-Résultats.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Dr. *Julie Moscheles*:

Etudes des plates-formes non-structurales.

Méthodes-Résultats.

La géomorphologie est l'étude des formes du terrain dans leur origine, leur distribution et leurs relations mutuelles. La plupart des formes que nous voyons, soit qu'elles soient contemporaines, soit qu'elles appartiennent à des cycles précédents, sont dues à l'eau, d'une ou d'autre façon. L'eau de la mer et des lacs, des fleuves et des ruisseaux, enfin l'eau solidifiée des glaciers, est le grand sculpteur et ciseleur de la face de la terre. A côté d'elle, le vent, l'air en mouvement ne joue qu'un rôle médiocre. Les dunes, formations du vent, quoique très répandues elles-aussi, représentent un phénomène assez éphémère. L'influence du vent sur la sculpture de la surface du globe, sur la formation de pénéplaines, de monadnocks, de vallons est encore très controversée. Les montagnes à champignon des déserts doivent sans doute leur forme actuelle au vent, mais leur existence même en tant qu'élévation du terrain est probablement due à une époque d' érosion fluviale précédente.

Ce n'est pas seulement le fait qu'elles sont aussi répandues qui explique la grande importance des formes sculptées par l'eau, mais bien le fait, qu'elles sont fort sensibles à tout mouvement tectonique, à tout changement de niveau soit local, soit régional. De petites dénivellations insaisissables soit à cause de leur faible amplitude, soit à cause de phénomènes de plus grande amplitude ayant eu lieu auparavant et qui ne permettent pas de distinguer les changements tectoniques plus récents dans l'allure des roches, sont nettement indiquées par les altitudes relatives des formes sculptées par l'eau, des plates-formes marines, lacustres et fluviales.

L'étude morphologique des dénivellations récentes et subrécentes s'est développée dans les régions de mouvements épeïrogéniques, c'est-à-dire à grande amplitude qui, par ce fait même, ne s'accentuent pas dans l'allure des roches, mais qui s'indiquent à de plus grandes distances

par des changements de niveau. C'est l'Amérique qui nous en a fourni les deux types dans l'histoire des lacs quaternaires de Lahontan et de Bonneville par Russel[1]) et Gilbert.[2]) Une autre région classique pour l'étude morphologique des dénivellations est la Scandinavie. Les oscillations du niveau de la mer ont laissé leurs marques tout le long des côtes sous forme de plates-formes d'abrasion et de sédiments littoraux, objets de l'étude morphologique est stratigraphique. C'est là que l'étude comparative des relations mutuelles des formes du terrain m'a frappé comme étant la plus typique.

En Norvège, dans le fjord de Kristiania Hansen[3]) a démontré le premier que pour l'époque post-glaciaire il n'y a point une série de sédiments marins dont le caractère devient de moins en moins arctique au cours de l'élévation progressive de la Scandinavie, comme on l'avait cru auparavant, mais bien deux séries, correspondant à des élévations et séparées l'une de l'autre par une submersion ignorée jusqu'alors, dont chacune commence avec des sédiments à fossiles arctiques pour finir avec des sédiments à fossiles indiquant un climat tempéré. Il va sans dire que des études stratigraphiques et paléontologiques ont été necessaires pour parvenir à cette conclusion, mais en même temps il a fallu aussi employer la méthode morphologique qui, ainsi, apparaît comme une vraie méthode géologique et comparable aux autres, plus anciennes et plus cultivées. Dans le cas spécial que nous avons en vue, la méthode morphologique était indispensable. Car, nulle part, on ne trouve une suite complète des sediments marins. Au lieu de cela, on trouve des lignes de rivage à différentes altitudes et nous constatons que, à la même altitude, nous trouvons quelquefois des faunes d'un caractère climatique différent. Cela s'explique en partie par le bombement de la Scandinavie et l'élévation plus forte des parties centrales.

Mais, même, si nous tenons compte de ce bombement, il reste encore un nombre assez considérable de cas où une faune arctique semble correspondre d'après sa situation à une faune tempérée. Et la question se pose donc de savoir, s'il y avait des dénivellations locales, ou si l'élévation s'accentuait plutôt à un endroit qu'à un autre? Voilà en tout cas comment la plupart des savants Scandinaves se sont expliqués se phénomène. Il m'est tout-de même difficile d'y croire. Les cartes d'isoanabases, dont un grand nombre ont été construites pour la Scandinavie

---

[1]) J. C. Russel, Geological History of Lake Lahontan, U. S. Geol. Surv. Monogr. XI., 1885.

[2]) G. K. Gilbert, Lake Bonneville, ibid. I. 1890.

[3]) A. M. Hansen, Fra Istiderne, Vest Raet. Norges Geol. Unders. no. 54.

entière et aussi pour plusieurs régions spéciales nous montrent que le parcours des isoanabases est fort régulier, et que toutes ces lignes sont distinctement parallèles au rivage actuel. Il est fort improbable que l'effet total de mouvements dont l'amplitude changeait le long d'une isoanabase actuelle de lieu en lieu et celui de mouvements qui commençaient à des moments différents, ait produit une telle régularité. Mais ce n'est que la méthode morphologique qui peut nous donner la reponse définitive.

Les sédiments marins de la première phase d'élévation ne se trouvent dans la région du fjord de Kristiania qu'au Sud, c'est-à-dire dans l'avant-pays du glacier qui a laissé ses traces dans le rempart des »raer« qui représentent non de vraies moraines terminales, mais des argiles marines de la première submersion et réélévation éraflées par l'avancée subsequente des glaciers et entassées en digue terminale, recouverte par une croûte assez mince de débris morainiques. Ces argiles stratifiées formant la plus grande partie des raer ont aussi donné lieu à l'opinion d'ailleurs non justifiée, que les raer sont des moraines terminales déposées dans la mer pendant une submersion.

Par suite de cette avancée des glaciers jusqu'au raer, seuls les sédiments marins de la deuxième phase d'élévation se trouvent in situ à l'intérieur de l'arc des raer. Ce sont ceux qui n'ont plus été recouverts et remaniés par une avancée de la glace. La ligne de rivage indiquant le maximum de la submersion avant la deuxième phase d'élévation est entaillée dans les moraines terminales, entourant les extrémités méridionales des grands lacs du Sud de la Norvège.

Quelles sont maintenant les conclusions qui résultent de ces données? L'existence de deux submersions d'une amplitude à peu près égale, séparées l'une de l'autre par une élévation au moins jusqu'au niveau actuel et probablement jusqu'à un niveau plus élevé, élévation que les études stratigraphiques avaient déjà fait soupçonner (existence de faunes d'un caractère différent dans le même niveau, mais en différents endroits), toutefois sans la prouver (possibilité d'une seule élévation inégale qui ne commença pas partout au même moment), est maintenant déterminée par l'étude des relations mutuelles des formes dues au travail marin et glaciaire. L'avancée des glaciers au Sud de la Norvège est plus récente que la première phase de submersion et de réélévation suivante, car elle a causé le déblaiement des sédiments marins alors déposés et à l'époque de la formation des raer, la ligne de rivage se trouvait plutôt audessous de la ligne de rivage actuelle, assurément pas au-dessus, car les raer situés tout près de la côte et actuellement en partie submergés ont été déposés comme formations subaériennes. Puis l'avancée des glaciers au Sud de la Norvège doit être plus récente que la dernière glaciation de la

Suède centrale aux environs des grands lacs Suédois, où ces mêmes sédiments n'ont plus été franchis par la glace, et antérieure au maximum de la seconde transgression, dont la ligne de rivage a été entaillée dans les moraines terminales.

La dite relation morphologique entre les moraines terminales de cette phase du Quaternaire et les plates-formes littorales de la seconde transgression m'a servi de guide dans mes études du Quaternaire en Scandinavie. Dans la région du Nordfjord, située juste dans le saillant de la côte Norvégienne, où sa direction Sud-Nord change vers le NNE nous trouvons deux séries de moraines: l'une antérieure à la transgression, dont la ligne de rivage est entaillée dans ces moraines, l'autre représentant une nouvelle avancée des glàciers pendant le maximum de la submersion, car ces moraines passent imperceptiblement à des terrasses marines correspondant à la ligne de rivage la plus élevée.

Dans cette région, nous n'avons plus de preuves stratigraphiques pour déterminer l'âge des sédiments et nous n'avons pas trouvé non plus des fossiles caractéristiques. Ce n'est que par la méthode morphologique que la position géohistorique de ces deux séries de moraines a pu être établie. D'après elle, la première série des moraines situées au Nordfjord, de celles dans lesquelles la ligne de rivage du maximum de la transgression est entaillée, correspond aux moraines du Sud de la Norvège, qui sont dans le même rapport vis-à-vis de cette ligne de rivage, tandis que la seconde série représente une phase plus récente à savoir la troisième phase postglaciaire.

J'essaie depuis longtemps d'adapter les expériences que j'ai faites en Scandinavie, aux conditions continentales, dans lesquelles les terrasses et plates-formes fluviales remplacent les plates-formes d'abrasion marine et les terrasses marines. Déterminer la position exacte de ces formes dans le système stratigraphique est une question très difficile vu le manque de fossiles caractéristiques. A cet égard, nous n'avons obtenu jusqu'à présent que des résultats rélatifs. Mais, pendant ces recherches nous avons développé ce que nous voudrions appeler la méthode du »nivellement morphologique«, c'est-à-dire une méthode permettant de déterminer le nombre des cycles indépendants, dont le début date d'un changement du niveau de base, de distinguer les terrasses et plates-formes fluviales représentant un tel cycle de celles qui ne sont dues qu'à des phénomènes locaux, terrasses de méandres etc. Ayant une fois déterminé le nombre exact des terrasses réprésentant des cycles indépendants, il devait être assez facile de constater les mouvements locaux des massifs, les élévations et affaissements qui avaient eu lieu le long du fleuve en question et qui, le plus souvent, me semblent n'être que des

variations d'intensité des mouvements régionaux. Au cours de ces études, dont la publication présente peut être considérée seulement comme faisant partie des travaux préparatoires, on peut espérer qu'on parviendra à dresser une carte d'isoanabases des régions continentales, comme on l'a fait déjà à plusieurs reprises pour les régions plus rapprochées de la mer.

De mes travaux antérieurs entrepris pour ce but dans la région du Massif de Bohême, le premier devait établir si la pénéplaine oligocène a été vraiment la dernière pénéplaine qui se soit formée en Bohême, car naturellement la dernière pénéplanation devait servir comme point de départ en comptant les cycles indépendants depuis révolus. J'ai donc commencé mes études dans le Císařský les,[4]) où j'ai pu constater une pénéplaine plus récente au-dessous de celle dont l'âge oligocène était incontestablement établi par des sédiments à lignites. Les deux pénéplaines ont été disloquées, morcelées par des failles et les différents massifs soulevés à des altitudes différentes. Mais pour la deuxième pénéplaine, ces dislocations ont été bien plus faibles que pour la première.

Ces deux pénéplaines peuvent aussi être suivies dans les Rudohoří et sur leur bordure septentrionale, la seconde pénéplaine est d'une vaste étendue. C'est elle qui, seule, est représentée dans les Středohoří, les montagnes volcaniques situées des deux côtés du Labe. Là, nous pouvons préciser son âge avec un peu plus d'exactitude. Les coulées de lave réduites à l'état de pénéplaine renferment des couches du miocène inférieur. La pénéplaine doit être donc plus récente, nous pouvons provisoirement la désigner sous le nom de pénéplaine postbasaltique.

Cette pénéplaine postbasaltique, c'est-à-dire plus récente que le miocène inférieur, a été morcelée par des failles. Mais ce morcellement n'a point été trop intensif. Comme je l'ai montré dans une autre publication,[5]) on peut distinguer au Sud de la ligne des vallées Bělá-Labe trois massifs, qui se sont élevés à la suite d'un soulèvement plus important au-dessus de l'ensemble, où la pénéplaine se trouve invariablement à des altitudes de 480 à 520 mètres. Il n'existe pas jusqu'à présent en Bohême d'autre région, où l'âge de la pénéplaine puisse être déterminé avec cette exactitude d'après la nature des roches mêmes. En outre, autre avantage, dès les temps où se formait la pénéplaine, un fleuve y suivait déjà distinctement le cours actuel du Labe. C'est ce fleuve qui à la suite de l'élévation de la région s'est creusé la vallée actuellement suivie

---

[4]) Die geologische Geschichte des Kaiserwaldes seit dem Alttertiär, Verhandl. d. geolog. Reichsanstalt, Vienne 1918.

[5]) Das Böhmische Mittelgebirge, Zeitschrift d. Ges. f. Erdkunde, Berlin 1920.

par le Labe de nos jours. Que le cours du Labe dans les Středohoří existât déjà au cours de la formation de la pénéplaine, le fait est prouvé par les traces des anciennes lignes de partage des eaux, que j'ai reconstruites d'après les monadnocks-mosors de la région. Je me sers de cette double désignation car, quoique ces hauteurs coincident toujours avec les roches les plus résistantes de la région, ces mêmes roches ont été pénéplanées ailleurs dans la même région. Cela se comprend, d'ailleurs: pendant la formation d'une pénéplaine, les fleuves, et en général tout le réseau fluvial s'adapte de plus en plus à la résistance différente des roches. Ce sont les roches les plus dures qui formeront ainsi la ligne de partage et c'est la ligne de partage que la pénéplanation envahit le plus tard.

Au nord d'Ústí, où à gauche de la vallée du Labe, la pénéplaine se développe d'une façon parfaite, ces hauteurs indiquant la ligne de partage de l'époque de la pénéplaine s'élèvent parallèlement à la vallée du Labe actuelle et cela dans son voisinage immédiat. On peut suivre cette ligne d'altitudes aujourd'hui interrompue par suite de l'érosion régressive des petits affluents du Labe, du Staudenberg (553 *m*) par le Kočkov (548 *m*) et le Lerchenberg (615 *m*) jusqu'au Sněžník de Děčín. En toute probabilité, cette ligne d'altitudes nous représente l'ancienne ligne de partage des eaux entre le réseau fluvial de Malé Chvojno et le prédécesseur du Labe. Mais ce Labe primitif des Středohoří qui existait au temps de la formation de la pénéplaine semble avoir été assez insignifiant. Vers le Sud-Est son ancienne vallée est bientôt bordée par les monadnocks du Zinkenstein (684 *m*), Math Röllig et du Bauermatzenstein (548 *m*). Donc, les lignes de partage sont le plus éloignées l'une de l'autre là où aujourd'hui, il n'existe que des cours d'eau assez peu considérables, au contraire, elles sont très rapprochées des deux côtés du fleuve principal actuel. La signification des cours d'eau a donc depuis bien changé. Aux temps de la formation de la pénéplaine le Labe avait un débit bien inférieur à celui des autres cours d'eau des Středohoří. Depuis, son débit s'est accru relativement, — et probablement aussi positivement — et le fond de sa vallée datant de l'époque de la pénéplaine, d'ailleurs déjà moins large que celle des autres fleuves, a été beaucoup plus découpé.Cette augmentation du débit du Labe est d'ailleurs très compréhensible: c'est Dědina [6]) qui dans plusieurs publications a tiré l'attention sur le fait qu'une grande partie du bassin du Labe actuel avait son écoulement vers la mer miocène dans le corridor Morave. Le

---

[6]) V. Dědina: Příspěvek k poznání morfologického vývoje české tabule křídové, I, II, III, IV. Rozp. č. akad. 1914—1918.

Labe en amont de Roudnice est d'origine assez récente. Mais nous reviendrons plus tard sur cette question.

Tout le long de la vallée du Labe à travers les Středohoří, nous trouvons des restes de la pénéplaine à des altitudes d'environ 500 mètres, donc à une altitude normale pour cette région. Nulle part, le Labe n'entre dans un des trois blocs que nous avons dit soulevés. Au-dessous de cette pénéplaine, nous trouvons des depôts de graviers et nous pouvons même dire qu'au-dessous de 340 mètres, il n'y a pas une seule isophyse où on ne puisse trouver des cailloutis, c'est-à-dire des terrasses fluviales. Mais la puissance de ces couches de cailloutis n'est jamais considérable; il est impossible de penser à de grandes époques d'érosion et d'accumulation alternant comme dans l'avantpays des Alpes. On pourrait plutôt penser à un approfondissement des vallées à la suite de phénomènes tectoniques, approfondissement au cours duquel des cailloutis furent parfois déposés sur les talus en pente douce des méandres. L'approfondissement des vallées a été interrompu par des phases d'érosion latérale, d'élargissement des fonds desdites vallées et sur ces fonds des cailloutis furent encore déposés. Ce sont les restes de ces fonds de vallée élargis qui représentent les cycles indépendants dont nous voulons déterminer le nombre.

Dès le debut, j'ai cru pouvoir distinguer sept séries de plates-formes fluviales au-dessus du niveau actuel du Labe dans les Středohoří. Mais je n'en étais pas absolument sûre, car quoiqe les deux séries les plus élevées ne soient pas à méconnaître, il n'en est pas de de même cas pour les cinq plates-formes plus basses. Il fallait donc chercher une méthode de vérification.

Les réflexions suivantes nous en ont fourni une. Tout approfondissement du réseau fluvial progresse de l'aval vers l'amont. Un cycle depuis longtemps »fossile« pour le fleuve principal peut être encore en action sur un affluent ou près de la source. L'abaissement du niveau de base (= élévation d'un massif) peut se faire si lentement qu'un grand fleuve peut approfondir sa vallée dans la même proportion sans qu'une brisure du profil intervienne. La dénivellation est compensée à mesure qu'elle se forme. Mais dans chaque réseau fluvial, on trouvera des points assez nombreux où la force des cours d'eau cesse d'être capable de cette compensation. Alors une rupture de profil se forme à ces endroits. Le résultat est le même que si la dénivellation avait été brusque plus en aval: elle s'entasse. En amont, l'ancien cycle avec son fond de vallée subsiste. En aval, au contraire, un nouveau cycle, un nouveau fond de vallée se developpe. Entre ces deux régions, la pente du lit étroit est très forte, et il semble que de telles ruptures de profil ne diminuent pas.

mais qu'elles reculent vers l'amont dans toute leur altitude. L'équivalent des plates-formes fluviales emboîtées les unes dans les autres dans la vallée du fleuve principal sera alors une suite d'élargissements dans les vallées des petits affluents, dont les fonds à pente faible seront séparés les uns des autres par des ruptures de pente que le ruisseau traverse en gorges plus ou moins étroites, le tout donnant l'impression d'un grand escalier.

Nous avons suivi les vallées d'environ vingt cours d'eau et partout, nous avons pu constater plus ou moins nettement cet arrangement en escalier à sept marches. Mais nulle part l'évidence n'est apparue aussi bien que dans le cas du ruisseau de Býčkovice, qui, ayant ses sources aux environs de Třebušín, dans les Středohoří se jette dans le Labe en amont de Litoměřice, c'est-à-dire dans l'avant-pays Sud-Est des Středohoří. Son cours est donc bien plus important que celui de la plupart des autres petits affluents du Labe dans notre région et grâce à cela, les ruptures de pente sont plus éloignées les unes des autres, et plus distinctes que dans les courtes vallées des ruisseaux dont l'embouchure se trouve dans le défilé même du Labe.

Pour démontrer et la méthode de nos recherches et les résultats obtenus, nous voulons donc choisir le cours du ruisseau de Býčkovice comme exemple typique. Dans le triangle formé par l'embouchure du ruisseau de Býčkovice dans le Labe, le Křemin s'élève à 239 mètres d'altitude, environ 100 mètres au-dessus du niveau actuel du Labe. Vu du Sud, il donne l'impression d'un neck volcanique, comme nous en trouvons tant dans les Středohoří, qui semble s'élever grâce à sa résistance plus considérable au-dessus des régions voisines plus dénudées. Mais si nous l'examinons de près, nous voyons qu'il ne se compose que de marnes calcaires et argileuses du Crétacé, portant les restes peu considérables d'une ancienne couverture de cailloutis. Comme ailleurs, dans les régions marneuses, cette couverture perméable semble d'être responsable pour la conservation de cette élévation contre la dénudation.

Juste à l'Est du Křemin, entre celui-ci et le dôme phonolithique de la montagne de Holey, les couches Crétacées forment une vallée sèche à environ 180 mètres, dont la grand'route de Křešice à Zahořany profite. Des galets isolés de basalt que nous trouvons dans cette petite vallée sèche prouvent indubitablement qu'elle était d'origine fluviale. Elle est la continuation directe de la vallée du ruisseau de Býčkovice, situé plus en amont et le ruisseau semble avoir une fois suivi cette vallée jusqu'à son confluent dans le Labe, jusqu'à ce que l'érosion régressive l'ait capturé et détourné autour du pied Nord du Křemin.

En amont de ce coude de capture, le ruisseau de Býčkovice coule dans une vallée mûre qui, vers l'amont, s'élargit de plus en plus jusqu'à former à environ 185 mètres, près de Velký Újezd, un élargissement considérable. Là, le ruisseau se sert encore d'un fond de vallée qui repond à la terrasse moyenne du Labe, à la deuxième série de plates-formes fluviales que nous pouvons y distinguer, et dont nous avons constaté la continuation aujourd'hui inutilisée à 180 mètres, près du Labe.

A Velký Újezd, sur la rive gauche, nous voyons un petit lobe aplati de méandre à pente douce s'élever au-dessus du fond de la vallée jusqu'à une plate-forme située à 220 mètres d'altitude. Elle est récouverte de loess, sous lequel on peut constater des galets de basalte. Sur la rive opposée, au-dessus de l'abrupt de l'amphithéâtre correspondant, une plate-forme de la même hauteur occupe la partie méridionale du plateau de Sedlec. Par rapport au ruisseau de Býčkovice, ces terasses et plates-formes ont une altitude relative de 35 mètres. Ajoutons encore l'altitude de la première rupture de pente à l'ancien confluent, soit 40 mètres! Nous trouvons alors un ancien fond de vallée à 75 mètres au-dessus du niveau actuel du Labe, c'est justement le niveau de la terrasse intermédiaire (210 mètres).

En amont de Býčkovice, notre cours d'eau porte le nom de ruisseau de Třihory. Sa vallée est étroite, en gorge, sa pente très considérable. Les versants abrupts s'élèvent d'un côté jusqu'à la terrasse, que nous avons décrite pour les environs de Velký Újezd à une altitude de 220 mètres, mais qui se trouve ici déjà à 230 mètres, de l'autre côté jusqu'au sommet du Vinice (254 mètres). Vers l'amont, la vallée devient de moins en moins profonde et enfin un nouvel élargissement de la vallée se montre, qui par son altitude d'environ de 230 mètres correspond et avec les terrasses et plates-formes entre 220 et 230 mètres de notre ruisseau, et avec la terrasse intermédiaire à 210 metres dans la vallée du Labe.

Plus en amont encore, près du »Leopoldův mlýn«, en aval de Nový mlýnec nous trouvons encore une rupture de pente d'environ 25 mètres de hauteur. Vers l'amont, cette rupture de pente se termine d'un côté par l'élargissement de Vinné, de l'autre sur le ruisseau de Dubové křoví par celle de Třebušín. Les deux élargissements se trouvent à une altitude de 290 mètres. Ils font partie du même niveau de fond de vallées comme la plate-forme du sommet du Vinice, qui s'élève aussi exactement à 25 mètres au-dessus du niveau suivant (terrasse à Velký Újezd et élargissement en amont de Býčkovice, les deux à 230 mètres). En reconstruisant le profil d'équilibre pour cet ancien fond de vallée jusqu'au Labe, nous y trouvons comme niveau de base un niveau à 100 mètres au-dessus du thalweg actuel du Labe: c'est juste le niveau du Křemín.

Vers l'amont, le ruisseau de Třihory montre encore une rupture de pente d'environ 60 mètres. Puis, nous entrons dans l'élargissement de Rydeč à 410 mètres d'altitude. Jusqu'à cet élargissement, la totalité de toutes les ruptures de pente s'élève à 160 mètres. C'est exacement l'altitude relative de la phase plus ancienne de la terrasse supérieure du Labe dans les Středohoří, dont nous trouvons les graviers sur le Dobrai à 295 mètres.

Apparement, cette rupture semble de ne pas être représentée dans la vallée du ruisseau de Dubové křoví (en amont de Třebušín). En amont de l'élargissement de Třebušín, nous trouvons une rupture de 90 à 100 mètres, s'ouvrant à 430 mètres à l'élargissement de Řepčice. Selon toute apparence, cette rupture de pente représente deux ruptures de ce genre entassées, dont l'inférieure correspondrait à la rupture de 60 mètres en aval de Rydeč, tandis que la supérieure monte jusqu'à un niveau de fond de vallée de 30 à 40 mètres environ plus élevé. Comment ces deux ruptures ont-elles pu se rapprocher et se réunir comme on l'a observé? A Řepčice, une petite vallée sèche débouche un peu au-dessus du fond actuel de la vallée à Řepčice et elle nous mène dans une direction Sud-Ouest jusqu'au ruisseau de Třihory, cependant à une altitude de 30 mètres environ au-dessus du fond de l'élargissement de Rydeč. La réunion des deux ruptures de pente d'âge différent est donc produite par une capture. Si nous reconstruisons encore l'ancien profil d'équilibre pour l'élargissement de Řepčice, nous trouvons son niveau de base à 190 à 200 mètres au-dessus du niveau actuel du Labe: à ce niveau appartient aussi le tronçon de vallée de Dubice, que nous considérons comme pliocène. De la même façon, l'élargissement de Rydeč et la terrasse sur le Dobrai correspondent à la phase supérieure de la terrasse supérieur.

Enfin, un dernier échelon, une dernière rupture de pente nous mène de Řepčice sur la pénéplaine à 500 mètres. Cette rupture a environ 40 mètres d'altitude. (L'altitude de la rupture est naturellement toujours ce dont la pente du thalweg dépasse un profil équilibré, ce dernier étant assez raide près de la source.)

Pour le réseau du ruisseau de Býčkovice, la pénéplaine représente donc en ce lieu (près de la source) le niveau correspondant à un niveau de base de 240 mètres au-dessus du Labe de nos jours. C'est justement le niveau représenté par la série la plus élevée des plates-formes fluviales du Labe dans les Středohoří. Faut-il croire alors que cette série des plates-formes les plus élevées représente le fond de la vallée du Labe à l'époque de la pénéplaine? Nous trouvons pour ces plates-formes une altitude de 370 mètres, la vallée était donc encaissée dans la pénéplaine à une profondeur de 130 mètres. D'ailleurs, la pente de ses ver-

sants est bien trop accentuée pour un fleuve sénile. Nous trouvons une autre explication de cette corrélation entre pénéplaine et série de plates-formes fluviales encaissées en nous représentant l'état probable du réseau fluvial sur une pénéplaine.

Le réseau fluvial d'une région quelconque atteint l'apogée de son développement pendant la phase de maturité d'un cycle d'érosion fluviale. Pendant la jeunesse, nous trouverons assurément trop de formes convexes, trop de pentes non sculptées ou seulement peu sculptées par l'eau courante. Cette indigence, ce développement incomplet du réseau fluvial qui ne se compose que de quelques affluents du cours d'eau principal sera marqué surtout, quand la forme originale de la région est plus ou moins une plaine, donc dans le cas où aucun réseau de vallées (fluviales ou autres, car un réseau fluvial peut occuper aussi un réseau de vallées fort développé en succédant à des glaciers) n'a été herité du cycle précédant. Plus le cycle avance, plus la région sera modelée par l'eau courante. Des affluents se jetant dans les fleuves principaux se développent et s'allongent en faisant reculer leurs sources. Des pentes nouvelles apparaissent, et sur ces versants, le ruissellement creuse encore des rigoles, qui s'approfondissent et se développent en ruisseaux plus ou moins considérables. C'est pendant la maturité que le réseau fluvial devient ainsi le plus ramifié. Puis, quand le cycle avance encore, les cours d'eau diminuent de longueur. Les sources sont poussées en aval par les produits de décomposition qui s'amassent. Il n'y a plus de sources d'affleurement, car les décombres couvrent complètement le sous-sol, mais seulement des sources de surface. L'eau descend les versants adoucis par le manteau de produits de décomposition et nous ne la voyons surgir à la surface que dans les vallées principales, formant plutôt des marais et des tourbières que de vraies sources. Seuls les fleuves principaux peuvent dans ce cas conserver un cours subaërien, non étouffé par l'amas de décombres.

Il nous faut aussi admettre un tel état du réseau fluvial pour l'époque, où la pénéplaine postbasaltique des Středohoří était encore en formation. Alors les petits ruisseaux, comme celui de Býčkovice n'existaient pas. Les eaux étaient retenues et filtrées par une couverture de décombres, qui s'étendait alors sur le sous-sol, actuellement révélé et formant notre pénéplaine.

Ce fut seulement au cours de l'approfondissement de la vallée principale du Labe, quand l'érosion de celui-ci eut été rajeunie par un affaissement du niveau de base, soit réel, soit provoqué par un soulèvement de la région même, donc apparent, que le ruisseau de Býčkovice et bien d'autres petits affluents se créèrent et s'allongèrent en faisant reculer

leur source. Pendant ce premier cycle qui se plaça après la formation de la pénéplaine postbasaltique, c'est-à-dire pendant la formation d'un fond de vallée aujord'hui représenté dans la vallée du Labe par des plates-formes fluviales situées à une altitude de 370 mètres, notre petit ruisseau se formait aussi une vallée à profil d'équilibre dont la base d'érosion était donnée par le thalweg du Labe d'alors (à 370 mètres), et dont la source était par nécessité située à l'endroit, où le profil d'équilibre coupait la pénéplaine.

Outre les six séries de plates-formes fluviales marquées par six ruptures de pente correspondantes dans les vallées des petits affluents nous avons encore une septième terrasse moins marquée, peu élevée au-dessus du fleuve (environ 10 mètres), la terrasse inférieure.

Ayant une fois établi le nombre exact des cycles dont les séries de plates-formes fluviales et les ruptures de pente nous font preuve, il fallait savoir si ces vieux fonds de vallées ont souffert beaucoup de déformations, surtout des bombements, ou bien s'ils ont conservé, sauf quelques mouvements orogéniques locaux d'un caractère plus ou moins vertical, leur pente originale. Dans notre étude sur les Středohoří (l. c. p. 135—140) nous avons démontré que les deux terrasses et plates-formes fluviales à 370 et 330 mètres peuvent être suivies à travers les Středohoří le long du Labe sans donner signe de la moindre déformation, bombement ou inclinaison. S'il en est ainsi pour les fonds de vallées les plus élevés, il en est naturellement bien aussi pour toutes les séries de terrasses et plates-formes fluviales inférieures.

En même temps, nous savons que les forces orogéniques ne dormaient point en Bohême pendant le vaste espace de temps, séparant la formation de la pénéplaine de nos jours. Purkyně[7]) nous a fait connaître de tels affaissements très récents dans le bassin de Plzeň, où ils avaient pour conséquence la formation de lacs étendus. L'affaissement quaternaire du bassin du Labe dans la Bohême centrale a été étudié par Sokol,[8]) celui du bassin de Pardubice par Dědina.

Outre les mouvements assez uniformes qui semblent avoir affecté tout l'ensemble de la région géographique que nous sommes accoutumés d'appeler le Massif de Bohême, il y a eu donc encore des mouvements d'un caractère plus local. Tandis que les premiers se sont manifestés par l'inauguration de sept cycles d'érosion, représentés par des séries

---

[7]) C. Purkyně: Terasy Mže a Vltavy mezi Touškovem u Plzně a Prahou, Sbor. č. spol. zem. 1912. Geologie okresu plzeňského, 1913. Plistocaen na Plzeňsku. Rozpr. Č. Akad. 1904.

[8]) R. Sokol: Tarasy středního Labe v Čechách, Rozpr. Č. Akad. 1912. Příspěvek ku geolog. výzkumu okolí Sadské, Rozpr. Č. Akad. 1909.

de terrasses et de plates-formes fluviales, les seconds se revèlent à nous par des variations dans les relations mutuelles des formes du terrain appartenant à des cycles différents.

L'étude de ces formes et de leurs relations mutuelles n'est pas encore assez avancée pour qu'on puisse tenter de construire une carte où les mouvements des blocs différents seraient indiqués. Mais déjà nous pouvons distinguer les mouvements régionaux de ceux d'un caractère plus local. De même, nous pouvons déjà reconnaître les phases principales de ces mouvements locaux et même déterminer avec une très grande probabilité l'âge de la pénéplaine du centre de la Bohême, quoique nous ne puissions nous servir d'aucun indice stratigraphique pour cette détermination.

Pour cela, j'ai comparé les altitudes actuelles des sept fonds de vallées de la Vltava-Labe en trois endroits, étudiés en détail. Outre les Středohoří, où j'ai commencé mes études, continuées depuis pendant plusieurs années, j'ai choisi la région du Říp, qu'a explorée infatigablement B. Zahálka,[9]) et le district de la Vltava au Nord de Prague, sujet de nombreux travaux de O. Kodym[10]) et A. Matějka,[11]) puis récemment d'un essai de O. Matoušek.[12])

Dans le premier des ces trois cas, les formes correspondant à nos sept cycles sont encaissées dans la pénéplaine postbasaltique, dans le second, nous nous trouvons dans la région d'affaissement représentée par la table crétacée située entre les Sudètes, les Středohoří et la région de roches anciennes (»varisques) du centre de la Bohême. Les environs du Říp font déjà partie de cette région qui a été soumise à un affaissement, qui d'ailleurs n'a pas été assez fort en ce lieu pour causer une inversion complète de l'activité du fleuve. Les formes appartenant à des cycles différents se trouvent les unes au-dessous des autres, quoique à une moindre distance qu'à l'ordinaire. Aucun des cycles dûs aux mouvements régionaux n'a été supprimé, l'affaissement local n'a jamais paralysé l'effet des surélévations régionales, comme ce fut par

---

[9]) B. Zahálka: O geologických poměrech okolí Roudnice a Řípu. Knihovna stát. geol. ústavu ČSR., t. 5, Praha 1923 (voir surtout p. 18).

[10]) O. Kodym-A. Matějka: Geologicko-morfologický příspěvek k poznání štěrků a vývoje říčních toků ve střed. Čechách. Sborník čes. spol. zeměv., Praha 1920.

[11]) A. Matějka: O geologických poměrech severního Povltaví. 1 partie: Sborník stát. geol. ústavu ČSR., 1919—1920, t. 1, pp. 49—81 (pour les terrasses voir pp. 72—76). 2. partie: ibid. 1923, t. 3, pp. 65—90 (spécialement pp. 82—85).

[12]) O. Matoušek: Vltavské tarasy u Levého Hradce. Sborník čsl. spol. zeměpisné, 1923, pp. 153—158.

exemple le cas plus à l'Est dans les environs de Mělnik. En ce qui concerne enfin les terrasses de la Vltava au Nord de Prague, celles-ci sont encaissées dans une pénéplaine, considérée autrefois comme d'âge précrétacé et revélée, mise à jour par la dénudation depuis les temps que l'érosion des fleuves a provoqué l'affleurement de la base des couches crétacées transgressives. Actuellement, la pénéplaine est désignée comme oligocène, étant evidemment plus récent que les couches Crétacées tranchées par elle de la même façon que les roches varisques plus au Sud. Nous allons voir que l'âge de cette pénéplaine tertiaire est postbasaltique, c'est-à-dire plus récent que les éruptions inframiocènes des Středohoří.

Pour la description des terrasses aux environs du Řip nous renvoyons le lecteur à la publication de Zahálka (l. c.), dont nous avons emprunté les désignations de terrasses inférieures, moyennes, intermédiaires, et phases inférieures et supérieures des terrasses supérieures pour les niveaux dont l'origine quaternaire est universellement accepté. C'est M. Purkyně, qui le premier s'est occupé de l'étude des terrasses en Bohême, qui à plusieurs reprises[13]) a exposé l'âge quaternaire des terrasses en question, qu'il a divisées en trois étages, en insistant toutefois sur le fait qu'un étage, une série de terrasses comprend plusieurs niveaux plus ou moins discernables. C'est le cas pour sa terrasse supérieure (à comparer phase supérieure et inférieure de ce niveau chez Zahálka), mais aussi pour sa terrasse moyenne (comparable aux terrasses moyennes et intermédiaires de Zahálka).

Il nous faut tenir compte de ce que Purkyně, ce fin observateur du modelé du terrain, dit du nombre des terasses. Nulle part, la distinction des différentes terrasses n'est aussi difficile qu'aux environs de Prague, où tous les auteurs sont d'accord pour ne distinguer que 6 niveaux différents (2 niveaux tertiaires et 3 niveaux quaternaires avec un redoublement de la terrasse supérieure). Seul Purkyně parle d'une terrasse appartenant à un septième niveau. D'après lui[14]) on trouve sur la rive droite entre Bráník, Vyšehrady, Michle et Krč, donc à la peripherie Sud de Prague un champ étendu de cailloutis de la terrasse supérieure, dont le centre est la plaine de Pankrác, et dont des branches recouvrent les roches de Bráník et de Dvorec. L'altitude de cette terrasse varie d'après lui entre 261 (Dvorec) et 265 mètres (Bráník), soit 83 à 86 mètres au-dessus du niveau actuel de la Vltava.

Selon la description de Purkyně, la surface de cette terrasse s'abaisse

---

[13]) C. Purkyně: Terasy Mže..., Sbor. č. spol. zem. 1912, pp. 156—157, où les autres ouvrages de cet auteur, traitant de l'âge de ces terrasses, sont cités,

[14]) C. Purkyně, l. c. 7 (pp. 154—155).

vers le Nord d'environ 20 mètres jusqu'à une altitude d'environ 240 mètres comme par exemple au Nord de la maison de correction de Pankrác, situées au-dessus de Podolí. Purkyně remarque encore, qu'il est peut-être juste de regarder cette terrasse comme faisant partie des terrasses moyennes, qui se trouvent à 230 mètres, donc 10 mètres au-dessous, à une altitude de 53 mètres au-dessus du niveau actuel de la Vltava sur le rocher de Vyšehrad entre la Vltava et la vallée du Botič.

Nous sommes donc pleinement d'accord avec Purkyně, quand nous parlons d'un plus grand nombre de niveaux de terrasses dans les environs de Prague, qu'il n'est coutume. En même temps, nous voudrions insister sur un autre fait. Pour caractériser la physiographie d'une région, il vaut mieux de parler de quelques groupes de terrasses caractéristiques, influençant et l'aspect du paysage et la vie humaine (agglomérations, parcours des lignes de communication, exploitation du sol: champs au lieu de forêts, etc.). De même celui qui s'intéresse aux depôts de cailloutis en tant que couches d'une valeur stratigraphique, pourra se contenter d'un nombre limité de groupes de terrasses. Mais, pour le nivellement morphologique, pour constater les mouvements différentiels, il faut tenir compte aussi des terrasses moins marquées.

Pour déterminer nos sept niveaux de terrasses au Nord de Prague, nous commençons avec la terrasse inférieure, à environ 20 mètres au-dessus du niveau actuel de la Vltava (Kodym-Matějka, l. c., altitudes à Roztoky: Vltava 172 mètres, terrasse inférieure 190 mètres, Matoušek, l. c., altitudes à Levý Hradec: Vltava 171 mètres, terrasse inférieure 191 mètres).

La terrasse moyenne d'une puissance moyenne de 6 mètres (selon Matoušek, l. c.) se trouve à une altitude relative d'environ 50 mètres (selon Matějka: sur la rive gauche de la Vltava au Nord de l'embouchure du ruisseau de la Šárka à 223 mètres et à environ 225 mètres au Nord de Roztoky, sur la rive droite entre 223 et 229 mètres à l'embouchure du ruisseau de Bohnice, selon Kodym-Matějka, l. c., à 230 mètres à Selc, Roztoky et Husinec, selon Matoušek à 222 mètres dans l'amphithéatre de Levý Hradec).

C'est là que commencent les difficultés, juste où déjà Purkyně a intercalé la terrasse faisant peut-être partie du groupe moyen. Selon la terminologie de Zahálka nous l'appelerons la terrasse intermédiaire. Son altitude relative est à Podolí, où elle a été décrite par Purkyně, de 64 mètres environ. Elle correspond donc très bien à la »nouvelle terrasse« de Matoušek à Levý Hradec (à 239 mètres, c'est-à-dire 68 mètres au-dessus du niveau actuel de la Vltava et avec une puissance d'environ 5 mètres). Cette terrasse de Matoušek n'est pas si »nouvelle« que cela. Elle a été

déjà décrite par Matějka (cailloutis près de l'église de Žalov et au-dessus de la gare de Žalov entre 240 et 244 mètres, environ 70 mètres au-dessus du niveau de la Vltava), qui la regarde comme représentant la phase inférieure de la terrasse supérieure. Vers le Nord, cette terrasse se prolonge, selon Matějka, par les graviers de Letky entre 235 et 240 mètres, puis à l'Est de Chvatěruby et au Sud-Est de Kralupy par des cailloutis entre 230—234 et entre 228 et 235 mètres, donc avec des altitudes relatives de 61 à 68 mètres. Ces altitudes relatives très constantes me semblent être un fort indice, qu'il s'agit vraiment de la continuation de la terrasse intermédiaire, au-dessous du groupe supérieur, dont Purkyně a été le premier de reconnaître l'existence.

Notre terrasse supérieure, stade inférieur ne correspond donc pas aux terrasses ainsi désignées par Matějka, et elle ne correspond pas non plus à sa phase supérieure. Au Sud, aux environs de Roztoky Matějka me semble identifier cette terrasse avec le stade supérieur. Plus au Nord, il combine notre stade supérieur avec les cailloutis de Zdiby. Nous considérons comme appartenant à notre niveau ses cailloutis situées à Velký Přílep, s'étendant de là vers Žalov. La puissance de ces graviers est entre 8 et 10 mètres, la base de la terrasse est à 248 mètres, comme le dit Matoušek, 77 mètres au-dessus du niveau actuel de la Vltava. La continuation de ce niveau est formée par les graviers que Matějka décrit plus au Nord comme faisant partie de son niveau supérieur: graviers de Chýnov entre 240 et 248 mètres, donc 70—78 mètres au-dessus de la Vltava. La base de ces graviers n'affleure nulle part sous l'épaisse couverture de limon. Les graviers isolés à 240 mètres correspondent peut-être à notre niveau intermédiaire, ceux à 248 mètres déjà avec notre phase inférieure de la terrasse supérieure. Puis ce sont les cailloutis qu'il décrit de Zlončice entre 240 et 248 mètres, donc 72 à 80 mètres au-dessus de la Vltava.

Où avons nous maintenant le stade supérieur de la terrasse supérieure. Dans la ville de Prague même nous le trouvons sur le plateau d'Olšany à 265 mètres, 89 mètres au-dessus de la Vltava (voir Kodym-Matějka, l. c.). A Roztoky, on trouve des cailloutis à 260 (Matějka) et 264 mètres (Matoušek), donc 89 à 93 mètres au-dessus du niveau actuel de la Vltava. Tous les deux auteurs n'y voient point de niveau spécial. Mais juste en face sur la pente au-dessus de Husinec la base des cailloutis est mise à nu à cette altitude. (Sur sa carte, Matějka montre ces cailloutis comme formant un ensemble avec les cailloutis moins élevés près de la côte 251 mètres. Il les designe comme nous sous le nom de terrasse supérieure, mais ne distingue pas les deux phases différentes.) Vers le Nord, le bord inférieur de ces cailloutis, désignés ici comme cailloutis de

Zdiby par Matějka, suit très régulièrement le niveau de 260 mètres, comme il le remarque lui-même. N'oublions pas non plus de mentionner la localité fort intéressante de Selc, où ces mêmes graviers descendent jusqu'à la côte 261 sur la rive gauche, jusqu'à la côte 266 sur la rive droite.

Quelle est maintenant la terrasse pliocène de Zdiby? Matoušek la voit à Levý Hradec dans les cailloutis les plus élevés de cette localité, autour de l'élévation »Na vrškách«, au Sud de Levý Hradec à 296 mètres d'altitude. Il n'est pas sûr, cependant si ce dépôt en question représente vraiment des graviers fluviaux ou si ce ne sont pas plutôt des conglomérats-récifaux formées dans la mer crétacée autour du monadnock lydditique de Na vrškách. Notons cependant, que l'altitude relative de ce dépôt au-dessus du niveau actuel de la Vltava est de 125 mètres. La même altitude relative de 115 mètres est approximativement donnée par Kodym et Matějka pour la base en roche de la terrasse de Zdiby à Kobylisy (290 mètres). Et de plus nous trouvons entre 290 et 300 mètres de vastes plaines d'érosion et d'accumulation, les roches anciennes s'élevant jusqu'à 300 mètres, tandis que les sillons d'érosion entre ces élévations isolées sont remplis jusqu'à la même hauteur à peu près avec des graviers. Selon un renseignement que M. Matějka a eu l'amabilité de me donner, l'épaisseur maxima des cailloutis de Zdiby atteint à Kobylisy 28 mètres. Nous croyons qu'il y a eu une phase d'érosion, causée par le soulèvement régional qui inaugura le cycle morphologique de Zdiby. Mais avant que ce cycle ne fût terminé, un affaissement local causa l'accumulation, le remplissage des sillons creusés, de façon que les plaines nivelées et par l'accumulation et par l'érosion à environ 300 mètres nous indiquent le niveau définitif du fleuve en ce temps-là.

Y a-t-il des indices qu'un tel affaissement d'environ de 20 mètres ait eu lieu avant la formation définitive du thalweg de Zdiby? Seules, les terrasses de Klinec pourront nous le dire. Ce niveau n'a pas encore été reconnu à Prague et en aval de la ville jusqu'au Řip. Les deux points les plus rapprochés, où ce niveau ait été constaté, sont d'une côté Roudnice où nous trouvons — d'après Zahálka et Kodym-Matějka — la terrasse correspondant à ce cycle à environ 60 à 65 mètres au-dessus de la terrasse de Zdiby, et de l'autre côté Davle et Hodkovičky (voir Kodym-Matějka) où la distance de ces deux niveaux fait de 40 à 45 mètres (I[e] niveau à Klinec 357 mètres, à Slivenec 351 mètres; II[e] niveau à la chapelle de Chuchle 310 mètres, à Záběhlice, terrasse en roc sur le rive droit à 305 mètres). Il est remarquable que l'altitude relative du niveau de Klinec au-dessus du niveau de Zdiby atteint dans les Středohoří, 40 mètres, tout comme dans la région de Prague. Ces faits me

semblent indiquer, qu'un mouvement différentiel a élevé la région du Řip d'environ 20 mètres après la formation du niveau de Klinec et avant la formation du thalweg definitif de Zdiby, ou, plus correctement, que cette élévation a atteint la région du Řip et celle de Prague et qu'un affaissement de 20 mètres l'a compensée dans la région de Prague à cette époque. Nous aurons encore l'occasion de parler du mécanisme interessant, ainsi révélé, des mouvements différentiels.

Mais auparavant nous voudrions donner un tableau synoptique de l'altitude des fonds de vallée, distingués dans les trois régions des Středohoří (environ de Litoměřice), de Roudnice (environ du Řip), et du district de la Vltava au Nord de Prague (environ de Roztoky). Nous nous servirons des désignations introduites par Zaháika en ce qui concerne la triple terrasse supérieure, mais au point de vue morphogénétique, ces trois phases me semblent indépendantes les unes des autres et correspondant à trois initiations de cycles différents.

	Roztoky	Roudnice	Litoměřice
I. de Klinec	??	320—325	370
II. de Zdiby	290—300	260	330
III. supérieure, stade supérieur .	264	240	295
IV. supérieure, stade inférieur .	248	225	240
V. intermédiaire	239	200	210
VI. moyenne	222	187	180
IVI. inférieure	191	158	150
niveau actuel	171	145	138

Pour la terrasse inférieure et moyenne, la pente du thalweg entre le Řip et les Středohoří est la même que celle que nous voyons au fleuve actuel (environ 7 mètres). L'altitude de ces deux niveaux est de 10 et 40 mètres. Pas de doute possible qu'il n'y a point eu de mouvements différentiels entre ces deux régions depuis les temps de la formation de la terrasse moyenne. Il en est un peu autrement pour la partie située entre Prague et le Řip. La pente actuelle du thalweg n'est que de 25 mètres environ, mais pour les fonds des vallées représentées par les séries de la terrasse inférieure et moyenne la pente va jusqu'à 35 mètres, et l'altitude relative de ces deux niveaux n'est pas 10 et 40 mètres, mais 20 et 50 mètres à Roztoky. Pour expliquer ce phénomène, il faut croire qu'un soulèvement a eu lieu après la formation de la terrasse inférieure, donc un mouvement différentiel entre la région de Prague et celle du Řip-Středohoří.

Tout autres sont les résultats que nous obtenons en comparant les altitudes relatives de la terrasse intermédiaire aux trois endroits en

question. A Roztoky et dans les Středohoří, elle se trouve à environ 70 mètres au-dessus du niveau actuel du fleuve. A Roudnice, elle n'a qu'une altitude relative de 55 mètres. Depuis la formation de cette terrasse, la région du Řip a été donc affaissée ou plutôt moins élevée de 15 mètres que les deux autres régions qui la flanquent. (Il vaut mieux parler non d'un affaissement, mais d'un soulèvement moins fort, car dans le cas d'un affaissement réel, il faudrait s'attendre à une phase d'accumulation manifestée, tandis que nous trouvons en réalité en cet endroit exactement les mêmes phases d'érosion, quoique naturellement moins fortes qu'ailleurs.)

Pour le mécanisme des mouvements différentiels, il est fort intéressant de noter, que l'effet de l'élévation des flancs au-dessus du noyau du synclinal (région du Řip) est de la même grandeur, quoique les mouvements différentiels, qui ont eu lieu après la formation de la terrasse intermédiaire n'ont point été simultanés (voir la dénivellation de la terrasse inférieure entre Prague et Roudnice).

Il est maintenant facile de reconstituer la pente du thalweg pendant les cycles représentés par les deux phases des terrasses supérieures. En admettant un affaissement relatif (c'est-à-dire en comparaison avec les ailes plus fortement élevées) de la région du Řip d'environ 15 mètres, et cela après la formation de la terrasse intermédiaire, nous voyons la pente du thalweg représentée par les terrasses supérieures diminuée entre Roztoky et Roudnice de 25 mètres (indiqués par l'altitude actuelle des terrasses au-dessus du niveau de la mer) à environ 10 mètres seulement. Entre Roudnice et Litoměřice la pente était (d'après le même calcul) presque égale à zéro pendant la phase inférieure de la terrasse supérieure. Pour la phase supérieure, la pente du thalweg ne peut pas être reconstruite de cette manière à cause d'une élévation des Středohoří après la formation de cette terrasse.

La pente du thalweg était donc pour les deux séries des terrasses supérieures bien inférieure à celle du thalweg actuel. Comment expliquer ce phénomène? D'abord il faut prendre en considération que plus les terrasses et plates-formes fluviales sont anciennes, moins elles correspondent exactement avec le thalweg même de leur temps. Assurément la pente était plus grande que les altitudes des terrasses que nous observons aujourd'hui ne nous le laissent soupçonner. Mais tout-de-même, il semble bien que la pente du thalweg n'atteignait guère que la moitié de la pente actuelle. Il est probable que le fleuve avait alors plus d'eau que plus tard, car la phase inférieure de la terrasse supérieure nous semble correspondre le mieux avec le temps de la glaciation maxima aussi bien dans les Alpes que dans l'Europe septentrionale. Comme glaciation

maxima nous entendons celle de Mindel. Elle est la glaciation maxima dans les Alpes orientales et si dans les Alpes occidentales, la glaciation de Riss la surpasse quelquefois, il faut attribuer ce phénomène à un soulèvement interglaciaire de cette région, par suite de laquelle une aire plus vaste fit partie de la région au-dessus de la limite des neiges pendant la deuxième partie du Quaternaire. Pour l'Europe septentrionale, c'est aussi pendant la glaciation de Mindel, que la glace a eu son extension maxima. C'est Leverett qui a démontré que la boulder clay inférieure de la plaine allemande représente la glaciation de Mindel, la boulder clay supérieure celle de Würm, tandis qu'une couche mince de boulder clay, négligée par les glaciologues allemands serait l'équivalent de la glaciation de Riss.

Toutefois le débit plus grand soit par suite d'un coëfficient d'écoulement plus élevé grâce à la baisse de la température, soit par suite de précipitations plus abondantes ne saurait suffire à expliquer une pente du thalweg qui n'aurait été que la moitié de celle des périodes glaciaires et postglaciaires suivantes.

Tout en acceptant pour la partie située entre de Řip et les Středohoří l'explication fournie par un débit plus considérable et l'inexactitude des données devant laquelle on se trouve toujours en ce qui concerne des terrasses plus anciennes; nous voudrions expliquer l'adoucissement apparent de la pente du thalweg des terrasses supérieures en comparaison de la pente des terrasses plus récentes entre Roztoky et Roudnice par un changement dans la longueur du fleuve, changement très considérable et qui s'est produit après la formation des terrasses supérieures.

Ce changement dans la longueur du fleuve est dù à la capture de la Vltava par un petit affluent du Labe, qui a détourné l'ancien fleuve principal se dirigeant directement vers le Nord, vers l'Est en doublant ainsi la longueur de son cours entre Roztoky et Roudnice. Cette capture introduite comme explication n'est point un expédiant avancé au hasard, mais elle a été prouvée, étudiée et décrite depuis longtemps. C'est O. Kodym et A. Matějka qui dans leur étude fondamentale sur le développement des cours d'eau du centre de la Bohême ont attiré l'attention sur le fait que ni les terrasses du cycle de Zdiby, ni les terrasses supérieures n'accompagnent la vallée actuelle de la Vltava à l'endroit où (Kralupy) celle-ci se tourne vers l'Est, vers le Labe. Selon eux,[15]) ce fut seulement après la formation des terrasses supérieures que la Vltava fut détournée vers Mělnik, et ils expliquent cette capture par un affaissement diluvial après la faille de Břežany, continuation directe de la faille quaternaire située

[15]) voir 10.

entre Hostivař et Prosek, d'après laquelle le massif oriental, contenant le cours du Labe, s'affaissa par rapport à la région de la Vltava. Cet affaissement du niveau de base représenté par le thalweg du Labe a eu pour conséquence que la Vltava a été capturée par un affluent du Labe qui s'est formé comme cours d'eau conséquent sur l'escarpement de la faille de Břežany.

Ainsi, le parcours du fleuve, entre Roztoky et Roudnice, a été à peu près redoublé. Ce doublement de la longueur du fleuve, la formation des terrasses supérieures une fois établie, il ne nous est plus difficile d'expliquer également le doublement apparent de la pente dans la partie en question entre Roztoky et Roudnice. Reste encore à savoir, quand cet affaissement si important pour le développement du réseau fluvial du centre de la Bohême a eu lieu. Pendant la formation des terrasses supérieures et jusqu'après la formation de la terrasse intermédiaire, aucun mouvement différentiel ne semble avoir eu lieu entre la région de Roztoky et celle du Řip, c'est-à-dire, que pendant ce temps, les deux régions en question ont conservé leur position relative. Mais ce n'était pas le cas pour notre troisième région. Dans les Středohoří, le système de terrasses et plates-formes fluviales représentant la phase supérieure de la terrasse supérieure prouve par leur altitude absolue et relative, que les Středohoří ont subi une élévation d'environ 40 à 45 mètres au-dessus du Řip et des environs de Prague après la formation de ce fond de vallée représenté par la-dite série de terrasses. Il est fort probable que cette élévation des Středohoří fait partie d'une phase orogénique de mouvements différentiels qui est également responsable de l'affaissement de la région du Labe à Mělník et donc aussi de la capture de la Vltava. Que ces mouvements aient eu lieu après la formation de la phase supérieure de la terrasse supérieure tandis que la capture de la Vltava ne se faissait qu'après la formation de la phase inférieure de la terrasse supérieure cela n'empêche point d'établir un parallèle entre ces deux événements. Il ne faut pas oublier que l'érosion regressive ne fait reculer la source d'un ruisseau que bien lentement. C'est comme dans le cas des ruptures de pente qui reculent si lentement que le cycle actuel d'une partie d'un ruisseau peut correspondre à un cycle déjà fossile plus en aval, comme nous l'avons déjà expliqué (voir p. 9).

Il ne faut donc pas s'étonner que le petit affluent du Labe qui se formait sur l'escarpement de la faille de Břežany n'arriva qu'assez tard, après la formation de la phase inférieure de la terrasse supérieure à faire reculer sa source au point de provoquer la capture de la Vltava, tandis que l'escarpement lui-même était déjà formé par un mouvement diffé-

rentiel après la formation de la phase supérieure de la terrasse supérieure.

Un fait nous prouve encore que les Středohoří ont subi un soulèvement d'environ 45 mètres en comparaison à la région de Prague. Dans les environs le Prague M. Daneš[16]) a signalé la pénéplaine à une altitude d'environ 450 mètres. Dans les Středohoří nous avons pu reconnaitre la pénéplaine postbasaltique à des altitudes de 480 à 520 mètres, et cela dans les massifs situés de long du Labe. (Nous ne parlons donc pas des massifs que nous avons constatés comme plus élevés, voir p. 9, mais qui ne sont pas traversés par le Labe, et dont les mouvements différentiels sont donc sans aucune influence sur l'altitude des terrasses du Labe.) Abstraction faite du mouvement différentiel qui, selon nous, a élevé les Středohoří après la phase supérieure de la terrasse supérieure de 45 mètres au-dessus de la région du centre de la Bohême, la pénéplaine des Středohoří se trouverait à des altitudes variant entre 435 et 475 mètres, donc à la même altitude que le centre de la Bohême. L'élévation différentielle des Středohoří de 45 mètres nous semble donc être un fait établi, et comme c'est juste la différence entre les altitudes relatives de la phase supérieure (au-dessus de la phase inférieure) à Litoměřice et à Roztoky, il n'y a pas de doute possible sur l'époque, où ce mouvement différentiel a eu lieu. Nous ne croyons donc pas devoir expliquer la pente de la série des terrasses supérieures, phase supérieure entre Roudnice et Litoměřice, et naturellement aussi celle des terrasses encore plus élevées, inverse à celle de nos jours, par une inversion de la direction du fleuve.

Il est intéressant que cette méthode de nivellement morphologique nous permet aussi de déterminer l'âge de la pénéplaine du centre de la Bohême. Dans les Středohoří, la pénéplaine est postbasaltique, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas avoir été formée avant le miocène. La pénéplaine du centre de la Bohême, abstraction faite de l'élévation des Středohoří de 45 mètres après la phase supérieure de la terrasse supérieure, se trouve exactement à la même altitude et aussi au-dessus des 7 systèmes de terrasses de la Vltava-Labe. Il est difficile de croire que dans de telles circonstances, analogues à tout point de vue, la pénéplaine du centre de la Bohême soit d'un autre âge que sa continuation morphologique des Středohoří. La pénéplaine postbasaltique, appartenant au terme supérieur du tertiaire, est donc très répandue et la dernière pénéplanation du centre de la Bohême paraît donc être beaucoup plus récente qu'on ne l'a cru jusqu'à présent.

[16]) M. Daneš: Morfologický vývoj středních Čech, Sborník č. spol. zem. 1913

Pour le thalweg définitif représenté par les terrasses de Zdiby, la reconstruction de la pente originale est maintenant facile à donner. Prenant en considération et l'affaissement relatif de la région du Řip, affaissement de 15 mètres après la formation de la terrasse intermédiaire, et l'élévation des Středohoří d'environ 45 mètres après la phase supérieure de la terrasse supérieure, il ne nous reste qu'à admettre encore un affaissement relatif de la région du Řip d'environ 15 mètres pour l'époque ayant suivi la formation de la terrasse de Zdiby afin d'obtenir le profil d'équilibre pour le cycle représenté par les terrasses et plates-formes fluviales dites de Zdiby, naturellement plus doux que la pente actuelle, surtout entre Roztoky et le Řip, de même que la longueur du cours était alors bien inférieure à celle de nos jours.

Pour les terrasses de Klinec, nous avons déjà supposé une élévation de la région du Řip de 20 mètres (voir p. 20). Nous avons maintenant à parler du mécanisme des mouvements différentiels. Si on la compare aux régions de Prague et des Středohoří, la région du Řip a subi un affaissement relatif de 15 mètres après la formation de la terrasse intermédiaire. Si l'on ne prend en considération que la région du Řip et celle des Středohoří, ce mouvement a eu lieu avant la formation de la terrasse moyenne. Par rapport à la région de Prague, l'affaissement du Řip s'est effectué cependant en deux phases: après la formation de la terrasse intermédiaire et surtout après celle de la terrasse inférieure. L'affaissement du Řip est absolument le même par rapport aux Středohoří et aux environs de Prague. Pour le mouvement qui a eu lieu après la formation des terrasses de Klinec et avant la formation du thalweg de Zdiby, c'est encore la même chose. Le Řip a été surélevé par rapport aux deux autres régions de 20 mètres. Mais tandis que cette élévation s'est faite nettement par rapport aux Středohoří, la région de Prague a d'abord subi la même surélévation et ne s'est affaissée que après une érosion suivie d'une puissante accumulation. Nous regardons l'aire composée de nos trois régions comme un vaste géo-pli, qui s'accentue tantôt en géosynclinal (depuis la formation de la terrasse de Zdiby), tantôt en géoanticlynal (avant la formation de ce niveau). J'ai montré d'ailleurs,[17]) que la région du Labe en amont de Litoměřice a été une région de surélévation en comparaison des Středohoří, après la formation de la pénéplaine postbasaltique. Ce n'est que de cette manière que nous pouvons expliquer le phénomène en vertu duquel les sédiments tertiaires des Středohoří se terminent en abrupt avec une puissance de 150 mètres à son bord Sud-Est. Le déblayement complet de ces sédiments dans le bassin du Labe et

---

[17]) l. c. 5.

même à grande distance du fleuve principal ne pouvait se faire que pendant une époque où cette région était plus élevée que les Středohoří.

Dans ce géo-pli, les environs du Řip représentent le noyau, les régions de Prague et des Středohoří les ailes. Il est compliqué de failles. Les forces orogéniques avaient tendance à maintenir l'équilibre. Mais l'aile des Středohoří seule pouvait répondre immédiatemment à ces forces. La région de Prague restait pour ainsi dire comme accrochée au noyau: elle ne se dégageait du poids du noyau que lentement, en cas de mouvements différentiels après la formation de la terrasse intermédiaire. Elle fut d'abord incluse dans la surélévation du noyau après la formation de la terrasse de Klinec et l'équilibre entre les deux ailes ne fut raccordé qu'immédiatement avant la formation du thalweg définitif de Zdiby. Aussi les Středohoří sont ils les seuls qui aient subi un mouvement indépendant, sans connexion avec les tendances gouvernant le géo-pli (élévation de 45 mètres) après la formation de la phase supérieure de la terrasse supérieure. Nous pouvons en inférer que le caractère de pli est mieux gardé entre le centre de la Bohême et le Řip, tandis que du côté des Středohoří, le caractère de massif l'emporte.

Nous avons essayé de raccorder les terrasses observées le long de la Vltava-Labe entre Prague et les Středohoří. Nous avons pu établir l'existence de quatre phases de mouvements différentiels, plus fréquentes et plus considérables pendant les temps plus anciens que pendant la seconde moitié du Quaternaire. Ces mouvements sont en accord avec tout ce que nous savons des évènements géologiques depuis les grandes révolutions tectoniques du miocène et avec les observations faites en Bohême et ailleurs dans la région varisque.

Récapitulons maintenant, ce que nous avons dit des mouvements tectoniques prouvés par les altitudes des terrasses: Altitudes relatives (distances entre deux niveaux avoisinants):

Niveaux:	Roztoky		Řip		Litoměřice	
Klinec — Zdiby	40 (à Chuchle)		60—65		40	
Zdiby — terrasse supérieure, phase supérieure	26—36		20		35	
terrasse supérieure: phase supérieure — phase inférieure	16		15		55	
terrasse supérieure: phase inférieure — terrasse intermédiaire	9		25		30	
terrasse intermédiaire — terrasse moyenne	17		13		30	
terrasse moyenne — terrasse inférieure	31	68	29	55	30	72
terrasse inférieure — niveau actuel	20		13		12	

Ce tableau synoptic montre très nettement que:

1. Depuis la formation du niveau de la terrasse intermédiaire, la région du Řip a été moins élevée de 15 mètres par rapport aux deux autres régions. Le mouvement différentiel s'est fait d'un seul coup pour les Středohoří et cela après la formation de la terrasse intermédiaire, en deux phases pour les environs de Prague, et cela après la formation des niveaux de la terrasse intermédiaire et inférieure. Entre la formation des niveaux de la terrasse moyenne et inférieure il n'y a évidemment point eu de mouvement différentiel.

2. La distance verticale entre les niveaux de la terrasse supérieure phase inférieure et de la terrasse intermédiaire est presque la même dans les régions du Řip et des Středohoří. Dans les environs de Prague, elle ne fait pas même la moitié. Nous avons expliqué cela par un changement marquant de la longueur du fleuve entre Roztoky et Roudnice, redoublant la longueur du fleuve entre ces deux points. Ce changement est dû à la capture de la Vltava après la formation de la terrasse supérieure, phase inférieure signalée et expliquée par M. Kodym et Matějka. Il nous semble impossible de parler d'une convergence des niveaux de terrasses en amont vers Prague en comparaison avec les régions du Řip et des Středohoří. Car la convergence observée des niveaux de la terrasse supérieure, phase inférieure et de la terrasse intermédiaire est un phénomène isolé qui ne se répète ni entre les niveaux inférieurs, ni — et c'est plus important — entre les niveaux plus élevés.

3. Déjà la distance entre les deux niveaux suivants des deux phases des terrasses supérieures est la même aux environs de Prague et du Řip. Si pour les Středohoří cette distance est 40 mètres plus grande, il faut expliquer cette particularité par un mouvement différentiel, simultané au mouvement sur la faille de Břežany et ayant pour conséquence que la pénéplaine du centre de la Bohême se trouve actuellement de 40 mètres environ moins élevée que celle des Středohoří.

4. La distance entre les niveaux de la terrasse de Zdiby et ceux de la terrasse supérieure, phase supérieure prouve encore un affaissement de la région du Řip, affaissement d'environ 15 mètres qui suivit la formation du niveau de Zdiby. Pour les régions de Prague et des Středohoří, la distance entre ces deux niveaux est la même.

5. Entre la formation des niveaux de Klinec et Zdiby la région du Řip a subi une surélévation de 20 mètres. Cette surélévation s'est d'abord accentuée aussi dans la région de Prague, où une phase d'érosion a été suivie par une phase d'accumulation entre la formation des niveaux de Klinec et de Zdiby. La plate-forme fluviale du niveau de Zdiby se trouve située plus haut que les cailloutis qui remplissent les sillons fluviaux.

Institut géographique de l'Université Charles.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 36.

Nové geologické studie v Jugoslavii.

Doplněk k publikaci „Geologické studie v severní Adrii".

Résumé:

Nouvelles Etudes en Jougoslavie.

Supplément à la publication „Etudes Géologiques dans la Région Adriatique Septentrionale".

(S mapami, profily a fotografiemi. — Avec cartes, profiles et photographies.)

Podává — Par

Dr. OTAKAR MATOUŠEK.

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 36.

Nové geologické studie v Jugoslavii.

Doplněk k publikaci „Geologické studie v severní Adrii".

Résumé:

Nouvelles Etudes en Jougoslavie.

Supplément à la publication „Etudes Géologiques dans la Région Adriatique Septentrionale".

(S mapami, profily a fotografiemi. — Avec cartes, profiles et photographies.)

Podává — Par

Dr. OTAKAR MATOUŠEK.

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

V publikaci »Geologické studie v severní Adrii, hlavně na ostrově Krku« (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Karlovy university čís. 16., Praha 1924), jsem shrnul v přehledu poznatky, jichž jsem nabyl roku 1921 a 1922 mapováním jižní části ostrova Krku a jeho okolí.

Od vydání této publikace prostudoval jsem podrobně paleontologický materiál a vypracoval i kraje vzdálenější, pokud jsem je r. 1922 poznal. Letošního roku jsem podnikl nová studia a to na širším podkladě, jež měla si všímati hlavně otázky příkryvové teorie, o níž jsem měl několikrát příležitost diskutovati.

V přehledu jsou tyto nové výsledky patrny z předložené práce.

ČÁST POPISNÁ.

Geologie ostrova Prviče.

Ostrov Prvić byl jen zcela zběžně zmapován Waagenem jakožto hřbet, pokračující z ostrova Krku, složený vesměs ze svrchních rudistových vápenců, zapadajících celkem k severovýchodu. Na západním pobřeží pak znázornil Waagen úzký pruh vápenců spodnorudistových v jejich podloží.

Roku 1922 jsem nalezl však právě v těchto místech poměry zcela jiné: Místo starých křídových vápenců, jež měly být obnaženy jako jádro antiklinály, zjistil jsem naopak až paleogen. Nález tento jsem publikoval co do rozšíření jednotlivých souvrství; zároveň jsem však poznamenal, že orientační průřez, připojený k mapce, nemá za úkol podati obraz tektonický, který mi nebyl jasný a odkázal k publikacím dalším.

Letošního roku zmapoval jsem ostrov celý. Výsledky ukázaly, že Waagenova mapa odpovídá skutečnosti pouze na severu ostrova v okolí majáku, kdežto jinde jsou vesměs skoro poměry odlišné, a umožnily zároveň podati správný tektonický výklad předešlého výskytu eocenu.

Zjištěné poměry geologické ukazuje připojená mapa.

Nejsevernější (na severním pobřeží dost i plochá, jinak vesměs skalnatá a mnohdy značně strmá) část ostrova je složena z typických svrch-

ních rudistových vápenců. Severně od Val Veliboče*) probíhá zřetelný příčný zlom *h2*, patrný mocnou rýhou a z toho, že kdežto na sever odtud je bílá stěna křídová, je jih budován krou z facie červené. Neobvykle dobře je možno zjistiti směr a sklon vrstev a to podle úzkých, velmi zřetelných červenavých poloh (beauxitové barvy), jež tvoří jakési pestré pásky. Celkem zapadají vrstvy kolem 70° a to od ostrova; k severovýchodu. U pobřeží, pokud je vůbec možno k němu bez lodi sestoupiti, jsou vrstvy rozervány v ostré krasové hroty.



Přesun křídy. Západní hřbet ostrova Krku, asi východně od hory Orljak. — Charriage du Crétacé. Chaine occidentale de l'île de Krk, à l'Est de la montagne de Orljak, Trt Botsine.

Drobné skalisko těsně u břehu, severně od Val Veliboče, je rovněž křídové.

Zmíněné zapadání (které souhlasilo by s představou, že ostrov Prvić je tvořen antiklinálou, jejíž osa je při západním pobřeží) nalezneme ještě v severní části zátoky Val Veliboče. Naproti tomu v jižní části této zátoky je dosti zřetelně viděti zapadání do ostrova, t. j. k jihozápadu, jež pak o něco dále zjistíme zcela bezpečně.

Rozhraní toto i morfologický vzhled ukazuje zřetelně na dislokaci příčnou; přesná její povaha však není dobře zjistitelná.

Velmi strmá stěna jižně odtud, vysoká několik set metrů, je místy naprosto nepřístupná se shora; je budována rovněž křídovými vrstvami a to bílými, velmi čistými vápenci. Příčné zlomy a diaklasy v ní, a to

*) Užívám názvů často italských, uvedených v mapě, neznám-li spolehlivě pojmenování opravdu užívaného.

jak *h2* tak *h4*, jsou velmi hojné; do mapy jsem zanesl pouze ony, jež jsem mohl zjistiti nejen z morfologického vzhledu, nýbrž i dislokací. Obtížné je však správné lokalisování.

Asi uprostřed mezi Val Veliboče a Pta Samognin je odkryto dobře zapadání vrstev 48° k jihozápadu.

V diaklase *h2* vytéká z pod ssuti drobný pramen, a to i v létě; severně od něho je podél zlomu *h4* vržena k pobřeží kra dolomitičtější povahy, odlišná od čistě bílých vrstev žlutavým zabarvením.

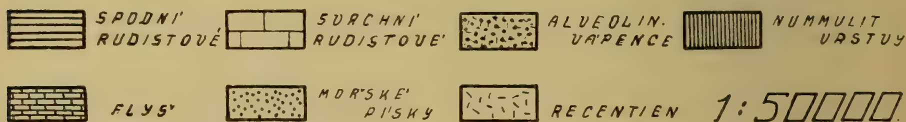
V okolí Pta Samognin je možno opět velmi dobře sledovati zapadání k jihozápadu podle střídajících se pestrých poloh červenobílých; při pobřeží samém probíhá směrný zlom, jenž přeráží výběžek Samognin. Z jižní strany je ve výběžku vyhlodána nevelká jeskyně.

Pta Samognin i nejbližší okolí jeho tvoří nejvzdálenější body od osy křídového hřbetu. Poněvadž se mi nezdařilo sestoupiti až k pobřeží do těchto míst z ostrova, studoval jsem podrobně z lodi celé pobřeží. Na celém tomto východním břehu Prviće nenalezl jsem a n i n e j m e n š í s t o p y p o e o c e n u; celé pobřeží je křídové. Kdyby platilo, že eocen se usadil v synklinále (či vůbec depresi), jež dnes je representována baščanským údolím, pak nutně i v jeho pokračování, na východním břehu Prviće, by se usadil eocen a to jistě vrstvy alveolinové a nummulitové a velmi pravděpodobně i aspoň část flyše.

Nenacházíme-li jich, nýbrž křídu, která zapadá do ostrova, je zřejmo, že je úplně přikryt eocen (který ovšem se tu usadil) křídou. Jsou dvě možnosti: 1. Křída by prostě byla nutně překocena přes něj. 2. Křída tvoří regionální příkrov, daný přesunem a příkrov ten nebyl proražen, takže eocen je neviditelný. Skoro soustavné zapadání křídy do ostrova (přes hypotetický eocen) svědčí, že jde o dislokaci značných rozměrů; naproti tomu severně od Val Veliboče zapadá křída od ostrova v podloží předpokládaného paleogenu. Řešením obou možností se budeme zabývati po dalších poznatcích.

Geologické poměry zůstávají nezměněny až k Val Pećnia. V něm nalezneme brekcie více méně recentní, jež známe skoro ze všech okolních krajin; jsou stmeleny červenavým tmelem (terra rossa) ze spadlých balvanů i drobných úlomků.

Materiál těchto brekcií je částečně typicky svrchnorudistový vápenec, ale převládají úlomky tmavé, šedé, jež beze sporu nutno zařaditi k vápencům spodno-rudistovým. Úlomky ty spadly ovšem se shora a dokazují, že tam vystupuje křída s p o d n o-r u d i s t o v á, jak skutečně je se možno (u koty 185 *m*) přesvědčiti. A odtud počínaje k jihu je budováno d a l š í v ý c h o d n í p o b ř e ž í P r v i ć e v á p e n c i s p o d n o-r u d i s t o v ý m i, nikoliv svrchnorudistovými, jak bylo předpokládáno.



Mapka ostrova Prviče. — Carte de l'île de Prvič. Legenda: Calcaire inférieur à rudistes, calcaire supérieur à rudistes, calcaires alvéoliniques. Calcaire sableux à nummulites, flych, sables marins Quaternaires, récentien.

Pouze ojedinělé tektonické kry poblíž Val Pećnia jsou svrchnorudistové.

Celý charakter morfologický je zřejmě odlišný. Vápence jsou tmavé poměrně, namnoze tence a dosti vrstevnaté; svrchnorudistové vápence vrstevnaté téměř nejsou a zřetelnou vrstevnatost vidíme spíše jen pestrými vložkami, jako u Pta Samognin.

Všimneme-li si poměru obojích rudistových vápenců, vidíme, že svrchní vápence netvoří plášť spodním vápencům, neboť zapadají p o d n ě, tvoří jejich nadloží. Jsou tedy zřejmě překoceny a překocení to je značné rozlohy. Je ovšem možno vysvětliti celý zjev směrnými zlomy (a ojedinělé tektonické kry by podporovaly tento názor), ale nelze zamlčeti, že představa příkryvu vysvětlí zjev ten uspokojivěji: Jde buď o příkrov obojí třídy a to překocení (spodní část vrásy) najednou, nebo spíše o d v a p o s t u p n é p ř í k r o v y: svrchních křídových vápenců přes paleogen a spodních vápenců křídových přes svrchní.



Pta Samognin, výběžek ostrova Prviče, je budován křídou. Morfologicky je patrný malý směrný zlom. — Pta Samognin, promontoire de l'île de Prvič, formée de couches Crétacées. Dans la morphologie du terrain une petite faille longitudinale est à reconnaître.

Severně od Pta Silo, nejjižnějšího výběžku Prviće, jsou vyvinuty hrubé brekcie, tmavé, jaké jinde jsem položil za rozhraní obou pásem křídových; Pta Silo však je tvořeno ještě spodními rudistovými vápenci.

Jihozápadní pobřeží Prviće je nejprve budováno ještě jimi poblíže Pta Silo, ale málo severněji jsou opět vápence svrchní, zřetelné již svou jasnou barvou. Zdáli je viděti (což možno snadno pak zjistiti), jak bílé svrchnorudistové kry postupně se objevují na pobřeží, a mezi nimi je ještě několik ker spodnorudistových. Zlomy, podél nichž jsou vrženy, jsou vesměs příčné, jednak *h2*, jednak *h*4.

Svrchní křída buduje další pobřeží, kdežto nad ní je křída spodnorudistová (Šikovac glava 342 *m*). Asi jihozápadně od tohoto kopce (je velmi obtížno se přesně orientovati v těchto těžce přístupných skalách, kde není takřka pomocných bodů) nalezneme na pobřeží vystupovati z p o d v á p e n c ů f l y š o v é vrstvy, a hned dále, přerušeny občas posunutými krami křídovými, i vrstvy alveolinové a nummulitové.

Paleogen je nejlépe pak vyvinut v okolí Pta Gnivica (jenž je sám zakryt mladými písky, patrně mořského původu, asi 10 *m* mocnými) a

táhne se k Pta Samotorec; tam jsem jej již popsal a zakreslil na mapě v práci zmíněné dříve.

Možno dodati jen několik poznámek:

Ostrůvek Gnivica, jejž jsem navštívil loďkou, je složen opět z vápenců alveolinových. Všechny vrstvy a to jak flyš, tak nummulitové a alveolinové vápence i křída zapadají do ostrova (značně kolmo), k severovýchodu, takže flyš je přikryt staršími vrstvami. Jsou tedy tyto vrstvy buď odděleny stále se opakujícími směrnými zlomy, anebo jsou vrstvy překoceny. Pokud zlomů se týče, zjistil jsem je sice, ale rozhodně ne v počtu, který by bylo nutno předpokládati. Proto také nepodal jsem v práci, kde jsem na tento nález eocenu upozornil, výkladu tektonického, který působil obtíže.

Věnoval jsem této otázce znovu pozornost letošního roku a snažil se zjistiti hranice jednotlivých vrstev, pokud to bylo možno na skalách bez použití provazu. Zjistil jsem, že alveolinové vrstvy jsou přikryty křídou, že zřejmě zapadají pod ní, aniž by byly rozděleny větší dislokací (blíže pobřeží však skutečně dislokace směrné existují). Jednotlivé výskyty ker křídových blíže pobřeží, které jsem již roku 1922 měřil, jsou dány jednak příčnými zlomy, velice hojnými, ale mimo to i prostým zasahováním příkryvu dále či blíže.

I další poměry geologické byly naznačeny již ve zmíněné publikaci. V okolí Val Dubac objevují se již znovu tmavé vápence spodnorudistové a severněji u Val Stražica u majáku a dále svrchnorudistové.

Vnitřek ostrova je jednotvárně skalnatý a dán oběma rudistovými vápenci, jak znázorněno na mapě; odděleny jsou namnoze brekciovými polohami. Pro poznání stavby je málo instruktivní, poněvadž je skryt krasovými zjevy, jež nedovolují zjistiti obyčejně ani sklon.

Resumujeme-li tyto poznatky, dojdeme asi k tomuto závěru: V podstatě zapadají vrstvy křídové na jihozápadním pobřeží do ostrova (k sz.), na pobřeží severovýchodním rovněž do ostrova (k jv.); jednotlivé úchylky není možno vyložiti jinak než jako lokální zjev, obrácené kry, omezené příčnými zlomy a p.

Tvoří tedy svrchnokřídové vrstvy synklinálu, ovšem velmi porušenou. V jádře této synklinály jsou obsaženy vápence spodnorudistové. Celek je tudíž překocen nebo jde o příkryvy dva. Překocení to je viděti i z toho, že v podloží křídy leží paleogen; z moře je velmi dobře viděti hranice tohoto přesunu.

Vidíme tedy, že jednoduchá představa stavby baščanského údolí pro ostrov Prvić nestačí. V jižní části baščanského údolí uspokojovala proto, že zlomy popříkryvové byly tak značné a hojné, že zakrývaly doklady

pro přesun. Naproti tomu na Prvići je jasno, pokusíme-li se sestrojiti profil, že bez připuštění příkryvu křídového by bylo třeba výkladů velmi nepravděpodobných.

Ukazuje nám tedy mapa Prvića, že v podstatě byl budován paleogenem, kdežto křída není autochtonní, nýbrž přesunutá. Otázkou je pouze ještě vzájemný poměr souvrství eocenních, která zapadají rovněž k jihozápadu a postupně k jihozápadu jsou (až k Pta Gnivica) mladší. Pomůckou je zjištění alveolinových vrstev na ostrůvku Gnivica, vzdáleném





Směrný zlom na vých. pobřeží Prviče. Zlomy ty podmínily dnešní rozlohu ostrova Krku a moře (deprese, pokračující z ostrova Krku). — Dislocation longitudinale sur la côte orientale de Prvič. A ces dislocations la distribution actuelle des îles et de la mer est due (la dépression se continue de l'île de Krk).

Fratar u Pta Samognin, budovaný křídou (nejzazší část ostrova Prviče). — Le Fratar à Pta Samognin, forme de couches Crétacées (promontoire meridional de l'île de Prvič).

několik set metrů od pobřeží. Spojíme-li je s alveolinovými vrstvami na oddělených zlomem.

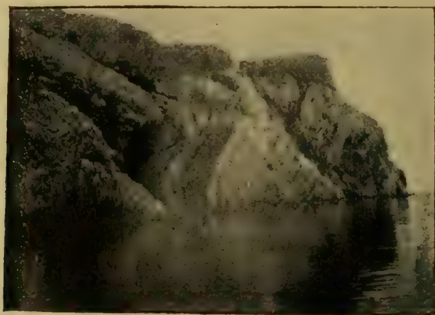
Poznatky nejjižnější části ostrova Krku jsou pomůckou k stanovení pravděpodobného průběhu eocenu pod křídovou pokrývkou i na Prvići. Otázkou paleogenu se budeme zabývati souhrně dále.

Celková stavba ostrova, jak vyplývá z nové geologické mapy, je vystižena přiloženým profilem napříč Prvića. Je jasno, že z mapy W a a g e n o v y dojdeme k představám docela jiným, jež šariážové teorie ne-Prvići, dostaneme obraz eocenní synklinály, zpola překocené, smačknuté se strany přesunu křídových vrstev od severovýchodu, nebo dvou ker, odůvodňují.

Ostrov S. Grgur (Gregorio).

Podle mapování Waagenova je ostrov S. Grgur, ležící mezi Krkem a Rábem, budován křídou, kterou prý nebylo možno rozlišiti (v jinde všude známé) oddělení spodních a svrchních vápenců rudistových. Na jihozápadním pobřeží pak je v nadloží křídy vyvinut eocen a to vápenci alveolino-nummulitovými.

Letošního roku podnikl jsem mapování na tomto ostrově a zjistil poměry dosti odlišné. Vysvitne to z přiložené mapy a z popisu.



Vých. břeh ostrova S. Grgur, budovaný jednak křídou, jednak alvelinovými vápenci pod nimi (ohnuté vrstvy, dříve neznámo). — Côte orientale de l'île de S. Grgur, formée en partie du Crétacé, en partie des calcaires à alvéolines de son mur (couches recourbées, ignorées auparavant).

Ostrov Grgur je značně zarostlý (na rozdíl od zcela pustého Prvíće nebo sousedního Goli) a rozrušený povrchovými zjevy tak, že nejlépe vynikne jeho stavba při pobřeží.

Nejsvernější cíp ostrova, Pta Kosača, je budován bílými vápenci, v některých polohách narůžovělými, které bez nejmenší pochyby nutno prohlásiti za svrchnorudistové vápence. Zapadají do ostrova k jihozápadu a to pod úhlem malým.

Severovýchodní pobřeží je jižně od Pta Kosača porušeno opět příčnými zlomy (dobře viditelný je na př. zlom *h*4, jenž působí depresi v půdě), podél nichž jsou vrženy k pobřeží místy žlutější kry. Málo jižněji v okolí skaliska v moři u pobřeží je zapadání o něco kolmější, ale zřejmě do ostrova; je to zase jen důsledek malých příčných poruch. Zapadání je možno velmi dobře sledovati na červených pásech, jež podobně jako na východě Prvíće prokládají bílé vrstvy a jsou zároveň důkazem svrchní křídy rudistové.

Avšak východně asi od Pta Plitvac (jenž je na opačném pobřeží), je pobřeží budováno pojednou vrstvami a l v e o l i n o v ý m i, tedy eoce-

nem, jenž na této straně ostrova nebyl vůbec znám. Je to nejprve kra asi třicetimetrová, ale pak se objevují střídavě kry křídové a alveolinové, alveolinové hlavně na hrotech ostrova. V křídě je řada jam, v nichž byl za války těžen beauxit; k jamám těm jsou upraveny pěšiny, které dovolují sledovati svrchní rudistové vápence do vnitra ostrova; jinak jsou v těchto místech příkré stěny skal značně rozervané, skoro nepřístupné a přes 200 metrů vysoké. Zapadání je sice velice kolmé, ale zřejmě do ostrova (k jz.); obnáší 70—75°; směr měří nejčastěji *h*9, méně *h*10. Hora 11, která na ostrově Krku převládá, se tu nevyskytuje skoro vůbec.

U moře je velmi dobře možno sledovati vliv příboje na skály, které jsou v šíři několika metrů úplně podemlety, takže takořka »plovou« na vodě.

Alveolinové vrstvy zapadají, pokud jsem mohl zjistiti, různě, jsou zprohýbány patrně vlivem křídové pokrývky, z pod níž vystupují. Délka jejich vystupování není veliká, neboť již severně od Val Banja je opět souvisle křída až k moři, a to zřetelně svrchní vápenec.

Tyto vrstvy přecházejí ještě na druhé (jižní) straně výběžku, tvořícího zátoku, a jsou tam skoro kolmé. Naproti tomu v zářezu touto zátokou učiněném jsou vzadu (západně) odkryty nápadně tmavé vápence, které nutno asi přičísti křídě spodnorudistové. Pozoruhodno je, že (pokud jsem mohl zjistiti), nenalezneme tu vždy přechodních krekcií, jež bývají mezi nimi obvyklé. Jde tu o hranici tektonickou spíše než o facii.*) Oboje souvrství je dosti dobře rozeznatelno. Vrstvy ty budují jen malou část ostrova.

Potoky Smokova, který protéká ve směru vrstev z ostrova a jenž má na opačné straně pendant v potoku Travizza, jsou zřejmě předurčeny tektonicky, jak ukazuje již topografická mapa.

Jižní, resp. jihozápadní pobřeží ostrova S. Grgur je budováno opět svrchní křídou rudistovou a severněji eocenem, jehož jižní rozšíření zanesl W a a g e n do mapy. Jsou to vrstvy alveolinové a v jich nadloží nummulitové, zapadající souhlasně s křídou. Avšak severněji v těch místech asi, kde podle W a a g e n a eocen končí, jsou v nadloží jich i flyše. O něco severněji pak je opět nummulitový vápenec, jehož pokračování je přerušeno křídovou krou. Ještě několik set metrů jižně od Pta Plitvac nalezneme flyš.

Je tedy rozšíření paleogenu i na tomto pobřeží větší, než značil W a a g e n a mimo to jsou zastoupeny i vrstvy flyšové, nejen alveolino-nummulitové.

---

*) O významu těchto brekcií zmíníme se ke konci.

Výběžek Pta Plitvac a část dalšího pobřeží budujícího západní břeh zátoky Porto S. Gregorio, jsou tvořeny typickou svrchnorudistovou křídou. Jen střední pás ostrova, táhnoucí se přes Glavicu Gaj, je složen z vápenců starších. Zjištění přesného rozhraní všude by vyžadovalo značně času.

Hojné jsou na ostrovu S. Grgur beauxity; jejich jámy nalezneme při obou pobřežích a to vesměs ve svrchních vápencích rudistových; také při potoku Travizza jsou odkryty. Jako všude v okolí nemají většího významu.

Shrneme-li tyto poznatky, vidíme, že po obou stranách ostrova S. Grgur je odkryt eocen, méně však na východním pobřeží, kde křída je velmi skrovná. Celek je tvořen svrchními rudistovými vápenci, které jsou vyvinuty v typické formě a zapadají k jihozápadu. V nich je pruh vápenců tmavých, které sice vzbuzují určité pochybnosti, ale náležejí přece pravděpodobně vápencům spodnorudistovým.

Zapadání vrstev je takové, že není naprosto možno mluviti tu o antiklinále a jejím spodnorudistovém jádře, a o eocenu uloženém při jejím úbočí. Vrstvy zapadají vesměs k jihozápadu. Pouze na jihovýchodním pobřeží zapadají alveolinové vrstvy (alespoň částečně) obráceně. Jak patrno, je i v tomto případě nejjednodušší výklad, že křída je přesunuta odjinud; vysvětlí nám to uspokojivě i výskyt spodních šedých vápenců.

Ostrov Goli.

Goli je malý, zcela holý a neobydlený ostrov severovýchodně od Rábu, jižně od Prviće; vypíná se jen do výše 151 *m* a 230 *m* (hory Goli). Podle Waagenovy mapy, jediné, kde byl studován geologicky, je budován vesměs křídou, v níž není možno rozeznati svrchní a spodní rudistové oddělení.

Studoval jsem ostrov ten při pobřeží i uvnitř. Výsledek nového mapování byl opět zjištění jiných poměrů geologických. Patrně byly tyto krajiny Waagenovy málo přístupny.

Nejzápadnější a nejsevernější bod ostrova Goli je plochý, skalnatý výběžek Pt. Sajalo, který je složen z typické bílé křídy svrchnorudistové. Tato křída táhne se celým ostrovem. U Pta Sajalo je v ní ve směru *h*9 jeskyně. Avšak na severním pobřeží, severovýchodně a severně od této boky, vyskytuje se pod křídou (zapadající vesměs do ostrova, k jihozápadu) alveolinový vápenec. Vápenec tento buduje i dvě skaliska (Scc. Macigno v mapě) nedaleko pobřeží. O něco východněji jsou odkryty částečně i vrstvy nummulitové. Podél příčných dislokací (*h*4) vých. od koty 83 *m* vyskytují se mezi tímto eocenem kry křídy, které konečně severovýchodně od koty 151 opět budují další pobřeží.

Po celém tomto pobřeží jsou roztroušeny jámy na beauxit, většinou nepříliš hluboké. Tuto křídu nalezneme i po dalším pobřeží, pokud jsem mohl zjistiti; pouze v okolí 108 *m* na jihovýchodní straně jsou vápence šedé, které snad odpovídají spodním vápencům rudistovým. Přesné zjištění v těchto nejvýchodnějších krajinách při pobřeží mi nebylo možno pro bouřlivé počasí.

Avšak již u Pta Blažna je opět typická svrchní křída rudistová, která se táhne až k Val Tatinja. V této zátoce totiž pozorujeme na severu kru alveolinovou, která s obou stran vězí mezi křídou. Křída stále typicky



Paleogenová kra (dříve neznámá) ve Val Tatinja mezi svrchní rudistovou křídou. Ostrov Goli. — Massif Paléogène (auparavant ignoré) dans le Val Tatinja dans le Crétacé à Rudistes supérieur. Ile de Goli.

svrchnorudistová táhne se i dále; avšak výběžek Pta Melna je opět alveolinový; podobně i nejbližší výběžek od něho na sever. Mezi těmito útržky paleogenu a křídou je zřejmě dislokační plocha, odpovídající asi *h*10; sklon její však není zřetelný.

Svrchnorudistové vápence jsou tu nápadně pěkně bílé. Dále uvnitř ostrova, asi 500 *m* od břehu, byl na ně otevřen lom, jáma asi 3 *m* hluboká, opuštěná. Kámen z ní je mramor krásně bílý; je značně křehký a rozpadá se snadno podle viditelných i neviditelných diaklas. Podle sdělení, těsně před válkou bylo tu těženo.*) Mramor je sice velmi pěkný a jeho výskyt dosti široký, avšak doprava pro vzdálenost i od velkých ostrovů a pobřeží (Krk, Ráb, Dalmacie) obtížná. Přes to by se jeho těžení asi dobře honorovalo při vhodné organisaci.

Západní část (Domolo) dále je velmi plochá a je budována úzkým pruhem šedavých vápenců, odpovídajících oněm, jež jsme poznali u Pta Smokova na ostrově S. Grguru a jež se táhnou dále do ostrova. Patří-li

*) Dva veliké balvany byly dopraveny prý do Ameriky.(?)

skutečně spodním vápencům rudistovým, je těžko s určitostí prohlásiti. Paleontologických nálezů (vyjma neurčitelných rudistů v některých po-



Svrchnorudistové vápence v místech, kde nebyly rozrušeny intensivněji krasovými zjevy, porušené četnými diaklasami. U Kalun Glavica záp. od Vela Luka. — Calcaires supérieurs à rudistes en endroits où ils ne sont pas très karstiques, traversés par des nombreuses diaclases. Près de Kalun Glavica à l'Ouest du Vela Luka.

lohách) není, petrologicky na spodní rudistové vápence upomínají však značně.

V těchto místech, jihových. od Pta Sajalo, značí Waagen zapadání k jihozápadu, což odpovídá skutečnosti skoro pro celý ostrov, pokud vím; zde však nalezl jsem pouze krasové balvany, u nichž nebylo mi možno sklon změřiti. Waagenovo měření (patrně v náhodném

odkryvu) považuji však — soudě podle zjištění v sousedství — za správné. Ve vápencích rudistových poblíže břehu je malá deprese, kde se udržuje často voda; nenalezl jsem však ani stopy po vodonosném eocenu. Jde patrně jen o nadržení v depresi, kam se svádí řada rýh.

Malá směrná rýha, která řeže tu ostrov, zdá se býti pokračováním z ostrova S. Grgur (Trt. Smokova). Na ostrově převládají dislokace směru *h*4, z nichž hlavní, pokud jsem je mohl zjistiti, jsou na mapě zakresleny.

V přehledu vidíme, že ostrov Goli je budován bílou svrchnorudistovou křídou, někdy až krásnými mramory; uprostřed je nesouvislý pruh či ostrovy šedých vápenců, jež nejspíše náleží křídě spodnorudistové a dají se stotožniti s vrstvami na S. Grguru. Na obou pobřežích, severním i jižním, vystupují místy nehojné vrstvy alveolinové a nummulitové, jež zapadají pod křídu. Flyš odkryt nikde není (pokud vím).

O tektonické povaze těchto výskytů je usuzovati analogicky jako na ostrovech S. Grgur a hlavně Prvići. Jde nejspíše o příkryv křídy, z pod níž po straně, kde křídový plášť je erodován, vystupuje přikrytý eocen. V tomto smyslu je řešen i profil.

Není ovšem pochyby, že ani S. Grgur a tím méně ostrov Goli nejsou tak stavěny, aby je nebylo možno vysvětliti bez šariáží. Neváhal bych tak učiniti, kdybych neznal z přízniběji utvořeného okolí (příklad Prvić), že eocen vystupuje v erodovaných oknech zpod křídových příkryvů.

Geologie severní části ostrova Rábu.

Nejsevernější část Rábu tvoří horský hřbet, budující jižněji východní část ostrova, značně vysokou (Tignarossa sv. od Rábu 408 *m* atd.); z něho vybíhá široký poloostrov Loparský směrem k severovýchodu, poměrně nápadně plochý (Kučina glava 91 *m*).

Horský hřbet je tvořen křídou, již W a a g e n mapuje na rozdíl od ostrova Krku společně bez rozlišení; po stranách jsou uloženy alveolinové a nummulitové vápence. Naproti tomu poloostrov Loparo je tvořen flyšem.

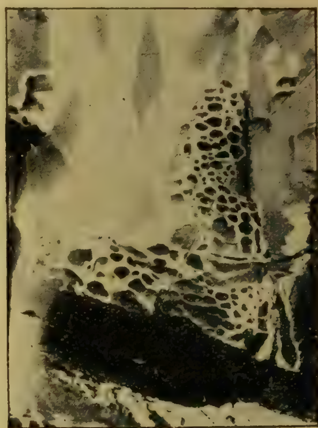
Mimo orientační exkurse po ostatním ostrově zmapoval jsem detailněji severní část Rábu. Srovnáme-li připojenou mapu s Waagenovou, je zřejmo, že rozdíly jsou značně menší než na velmi povrchně povšimnutých malých ostrovech. Přes to však dlužno o nich krátce pojednati.

Loparo je jednotvárně složeno vesměs z flyše, případně recentních vrstev; jiných uloženin na něm skutečně není. Popíšeme stručně profil kolmý na vrstvy od jz. k sv. jdoucí přes výběžek Pta Saramić.

Tento výběžek (podobně jako ostatní pobřeží okolní) je budován z pískovců, velmi dobře vrstevnatých a sklánějících se nepatrně dovnitř

poloostrova. Je na nich možno pozorovati řadu zjevů geologických. Při pobřeží jsou hojné hluboké aeroxysty na jejich povrchu. Stratigraficky odpovídají flyši, známému na ostrově Krku, avšak ono detailní rozdělení, jež bylo možno tam ve flyši rozeznati, nemá tu již platnosti. Facie petrologické se liší a to hlavně tím, že vrstvy jsou značně písčité, kdežto slinité polohy jsou méně zastoupeny. Je méně slínů vlastních, poloha jurandvorská rovněž je zastoupena facií písčitou. Nummulitové vrstvy svatomichelské jsou zastoupeny značně podobně. Ve spodním flyši, resp. pís-



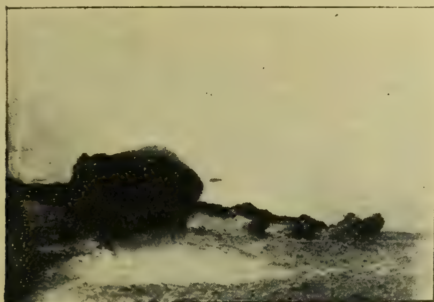


Povrchové zjevy ve slinitých pískovcích jurandvorských. Vých. od hory Pago v zátoce baščanské. Dříve neznámý výskyt. — Phénomènes de surface dans les sables marneux de Jurandor. A l'Est de la montagne de Pago dans le baie de Baška. Inconnus jusqu'à présent de cet endroit.

Aeroxysty ve flyši »Na korah« (ostrov Krk). Jejich genese je rozhodně ve vztahu s činností mořské vody (méně atmosferilií) k petrologické povaze povrchu skály. — Aeroxystes dans le flych »Na korah« (île de Krk). Leur formation est sans doute due à l'action de l'eu a de la mer (moins à celle de l'eau atmosphérique) en relation avec le caractère lithologique de la surface des roches.

kovcích ve Val Saramić, jež patrně jim odpovídají, nalezl jsem však valouny velikosti několika centimetrů až pěsti. Je to dosud jediný příklad, jejž znám z ostrova Rábu, Krku i pobřeží dalmatského a drobných ostrovů, a překvapuje proto, že zjištěné valouny jsou z hornin, jež jsou mi naprosto n e z n á m y v t ě c h t o k r a j í c h. Není pochyby o tom, že jde o zjev šířícího se příboje moře počátkem flyšového období, který sbrousil vyčnívající ještě tenkrát monadnocky starších hornin a to buď mladopaleozoických nebo spíše mesozoických. Horniny ty dnes nevystupují leč v krajích velmi značně vzdálených. Zde jsou příkryty sedimenty paleogenními a nad nimi i křídovými příkryvy.

Jdeme-li směrem dovnitř ostrova, nalezneme zajímavé zjevy dynamické geologie, upomínající na svědky resp. zemní pyramidy. V některých měkčích polohách jsou pískovce rozvětrány v písek, který je porostlý keři. Písky se rozpadávají skoro kolmo a pod přikrývkou keřů zachovají se svědky vysoké kolem 2 metrů v podobě sloupů či jakýchsi stolů. Tak zvláště poblíže Pta Stolac je budován takřka pouze z těchto svědků. Dole u pobřeží nalezneme zase jehlance až 3 metry vysoké, upomínající zcela na »demoiselles non coiffées«.



Svědky, pískovcové stoly, chráněné navrch rostlinným přikryvem, význačné pro povrch poloostrova Loparo na Rábu. Vých. od Pta Stolac. — Témoins, tables de grès, qui sont protégés en haut par une nappe de végétation, caractéristique pour la peninsule de Loparo à Ráb. A l'Est de la Pta Stolac.

Směrem ke kotě 91 nalezneme polohy přeplněné drobnými nummulity druhu Nummulites laevigatus Lam (lutétien!) a j., snad jde o ekvivalent svatomichelských vrstev, jimž i petrologicky odpovídají.

Pískovce budující tento kraj nalezneme i na druhé straně nízkého hřbetu (koty 90, 91, 92 *m*) a to stále zapadající do ostrova pod úhlem kolem 10°. V nižších polohách jsou zakryty pískovcovou ssutí, namnoze žluto-červenavě zbarvenou. Ve výši kolem čtyřiceti metrů, na př. ve vsi Gusović a okolních domkách, nalezneme tyto pískovce ještě místy vystupující a stále stejně skloněné. Avšak hned o několik metrů jižněji stojí skoro kolmo. Toto kolmé zapadání, či sklánějící se naopak poněkud k severovýchodu, nalezneme všude u západní části Loparského poloostrova. Také ostrůvek Planina (Sc. Castellina) je budován pískovci takto zapadajícími. Rozdíl je tak náhlý a patrný i z tvaru ostrova, že je zřejmo, že jde o směrný zlom, ssutí zakrytý.

Od výše asi 35 metrů nenalezneme pískovců v další části jihozápadní již nikde, poněvadž jsou pokryty recentními písky nanesenými mořem. W a a g e n klade rozhraní mezi recentiem a flyš poněkud nízko. — Ve svahových píscích, pokud ještě jsou rozvětralým flyšem, jsou vyryty

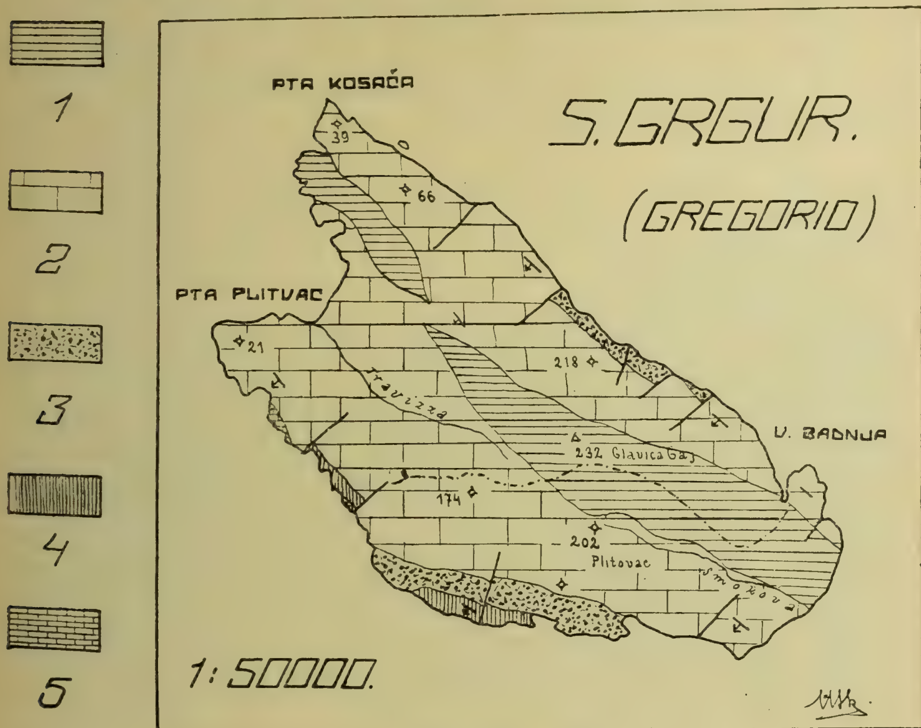
ostré kaňony drobnými potoky. Naproti tomu doleji v naplavených pís-cích rozlévají se vody velmi mělce a široce. Nikde tam nenalezneme skal odkrytých. Pískové toto plateau je porostlé většinou loukami; písek je žlutavý, značně zemitý. Ploty kamenné, jimiž jsou ohražena pole, jsou stavěny z kamenů křídových, méně z vápenců eocenních, sesutých a dopravených ze západního břehu; nikde skoro není pískovcových balvanů. Při pobřeží tvoří plateau široký strand, v němž ploše ústí říčky.

Všimněme si dále základních rysů vlastního horského hřbetu, z něhož Loparský poloostrov vybíhá a od něhož je vlastně oddělen tímto recentním pruhem písků. Mapa Waagenova znázorňuje jej schematicky. Zakresluje po jeho hřbetu směrem k Loparskému poloostrovu pruh eocenu. Nejjižnější jeho výskyt je podle něho ještě na Loparském poloostrově a to v podobě flyše. Ve skutečnosti sahá eocen ještě daleko na jih podél pobřeží Val Cernica a to v podobě nummulitových a jižněji alveolinových vrstev. Zapadá podobně jako křída (a jako flyš v západní části Loparského polostrova) k severovýchodu.

Jdeme-li severněji, nalezneme nummulitové vrstvy a alveolinové celkem výše; flyš je vyvinut pod nimi až později, kdežto s počátku zakryt ještě holocenními písky a sutí. Průběh paleogenu je přerušován příčnými zlomy, které tu se dají snadno zjistiti díky četným rozhraním a snadné přístupnosti (malé výšce); odpovídají hlavně *h*4. U potoku Janina je částečně zakryt paleogen recentními brekciemi z křídového materiálu hlavně; křída je krásně bílá, podobná mramoru, o němž jsme se zmínili při ostrově Goli. Mezi Janinou a Viselicou vystupují do popředí (zlomy *h*4) vrstvy nummulitové nejlépe a to svrchním svým oddělením, značně písčitým, vlastně skoro konglomeráty nummulitů; i velké měkkýše chovají. Pískovce nevystupují, jsouce kryty písky. Zapadání až na některé drobné kry je stále k severovýchodu; směr vrstev *h*10. Tak dají se vrstvy sledovati až k Val Mahučina. Poučná je erosivní rýha Viselica. Se strany je dobře patrný příkryv bílé křídy přes eocen. Vzadu (západně) v údolíčku pak vystupují zřetelně odlišné šedé vápence, jež odpovídají vrstvám, o nichž jsme se zmínili na drobných ostrovech jako nejspíše spodnorudistových.

Projdeme-li tímto údolíčkem a pokračujeme-li dále napříč horského hřbetu, vidíme, že budují uprostřed jeho povrch. Přijdeme-li k Porto St. Pietro, nalezneme znovu vrstvy svrchnorudistové a blíže břehu alveolinové a nummulitové. Vrstvy ty zapadají tam převážně k jihozápadu; zapadání to je běžné po délce hřbetu i dále k jihu. Flyš je odkryt více až jižněji. Svrchní rudistové vápence vypínají se tu na výšku 131 *m* (M. Sovigna). Čím jižněji (dále od pobřeží), tím je průměrná výška větší: stoupá ze sta metrů na 300 i více během několika kilometrů. —

Máme-li přehlédnouti poznatky o severu Rábu, jejž jsme popsali, vidíme, že celý hřbet tvoří antiklinálu, která sahá až do západní části Lopara, kdež končí tektonicky a pokračuje snad ve vrstvách synklinálně uložených. Toto uložení platí pro paleogen. Křída je pouze na vlastním hřbetu; její zapadání je namnoze těžko přesně zjistitelné, vrstevnatost je nezřetelná. Je však místy viděti, jak jsme se zmínili, že eocen leží přímo



Mapka ostrova S. Grgur. 1. = Spodní rudistové vápence, 2. = svrchní rudistové vápence, 3. = alveolinové vápence, 4. = nummulitové písčité vápence, 5. = flyš. — Carte de l'île de S. Grgur. 1. =Calcaire inférieur à rudistes 2. = calcaire supérieur à rudistes, 3. = calcaire à alvéolines, 4. = calcaire à nummulites, 5. — flych.

pod ní tak, že bylo by třeba výkladů velmi obtížných, kdyby měla býti stavba vysvětlena jinak než příkryvy. U Val Viselica je příkryv křídový zřetelně viditelný právě tak jako na Prviči. Na připojeném profilu je výklad tektonický patrný.

Pro úplnost dlužno se zmíniti, že na Rábu v obojích svrchních vápencích křídových jsou řady jam beauxitových. Pěkně jsou patrny na př. z Lopara při pohledu k západu.

*

Vidíme tedy, že zmíněná řada ostrovů je stavěna příkryvy křídovými a to někdy tak, že příkryvy jsou zcela otevřeny a přímo patrny, jindy ovšem jen předpokládatelny. V některých případech bylo by možno dobře vysvětliti stavbu i bez připuštění šariáží (díky detailní tektonice), v určitých případech však nikoliv.

Jižní polovina ostrova Krku, část západní.

Podle Waagena je západní část ostrova Krku jižně od Krku budována svrchními rudistovými vápenci, tvořícími antiklinálu, v jejímž jádru vynikají obnažené spodní vápence rudistové.



Majka Boží z Baščanského údolí. Pod křídovým hřbetem je dislokačně oddělený (ssuťové linie směrné) paleogen. Kostelík však stojí na křídové nappě, tvořící vrchol kopečku a isolované paleogenem ze všech stran. — Majka Boží dans la vallée de Baška. Au pied de la chaine Crétacée le Paléogène en est séparé par une dislocation (ligne longitudinale de décombre). Mais l'église s'élève sur la nappe Crétacée formant le sommet de la colline isolée de tous côtes par le Paléogène.

Po obou stranách hřbetu je eocen.

V Rozpravách České Akademie pojednal jsem o nejjižnější části ostrova, kde jsem nalezl poměry značně složitější a to zjištěním dokonce až vrstev paleogenních uprostřed horského hřbetu; mimo to zjistil jsem ve dvou pruzích spodnorudistové vápence. Pokusil jsem se podati výklad opakování i neočekávaného výskytu směrnými zlomy.

Doplňuji tuto publikaci o mapu jižní polovice Krku. Z ní je patrno přibližné rozšíření jednotlivých vrstev.*) Poněvadž ve zmíněné dřívější práci jsem popsal výskyty podél pobřeží, zmíním se tu doplňkem o profilové cestě severněji. Nejlépe se k tomu hodí cesta Batomalj-Stará Baška; mimo větší cesty není možno popsati orientační body. Profil jiný, na př. vedený východně přes Ponte, je analogický, pouze krasové zjevy jsou ještě nápadnější (na mapě »Krase«).

Dále připojím vysvětlivky výskytu od Staré Bašky přes Negrito směrem ke Krku.

Batomajl sama leží na eocenu, jak se zmíníme později, který zapadá ve výši kolem 210 metrů pod svrchní rudistové vápence. Avšak ve výši asi 280 *m* nalezneme opět brekcie, charakterisující rozhraní křídy a eocenu a alveolinový pruh, jenž však je málo mocný. Asi v 310 metrech je znovu a to definitivně přikryt křídou.

Tento výskyt terciéru ve výši tak značné (uvážíme-li, že jdeme téměř od výše mořské hladiny), je tektonicky velmi pozoruhodný. Kdybychom se přidrželi jednoduché teorie, že eocen vyplňoval deprese v křídě (která pro baščanské údolí vyhovuje), značilo by to, že eocen sahal skoro až do výše hřbetů křídových, tím spíše, že nad vrstvami alveolinovými mají následovati teprve nummulitové vrstvy a mocný flyš. Celkové zapadání pod křídu, jež se dvakrát opakuje, činilo by výklad ještě složitější. I když připustíme zdvižení, přesmyk přes hory východnější (baščanské údolí), narazíme na obtíž vysvětliti poměr ke křídovému hřbetu.

Jak bude zřejmo z dalšího, je nutno přiznati, že jde tu o příkrov křídový; spodní výskyt křídy (opakování) je dislokovaná kra. Nalezneme ji ještě jinde v baščanském údolí.

Rudistové vápence jsou vyvinuty v typické podobě. Na křídovém plateau (nejprve asi 330 *m* vysokém, pak stoupajícím) je možno po stranách sledovati vrstvy skoro kolmo postavené, zřetelné ze střídání bílo-červených pruhů. Na těchto pruzích je možno pozorovati i příčné posuny.

Dále (za kamenným plotem) je viditelno rozhraní těchto vrstev se šedými spodními vápenci rudistovými. Poněvadž nejsou zakryty ničím, je zdáli možno dobře sledovati jejich rozlohu. Vidíme, že hranice je dána sklonem vrstev a tvarem povrchu (hloubka denudace), a to tak, že nalezneme jednotlivé malé ostrůvky kolem hlavního pásu.

Velmi hojně jsou vyvinuty tmavé brekcie, jež značí celkem rozhraní obou rudistových pásem; budují i kopeček, přes nějž vede cesta ve

---

*) Pro rozlehlost jižní poloviny ostrova Krku, jíž se popis týká, připojuji jen schema, nutné k porozumění textu. Detailní mapu bude mi snad možno vydati jindy; malé části jí byly publikovány v dřívějších pracech.

výši kolem 340 *m*. Ráz krajiny je značně odlišný. Jsou to drobné úlomky, nikoliv mohutné krasové balvany, mezi nimiž spoře rostou trávy.

Následuje (při sestupu) značná rýha *h*11, kolem níž jsou brekcie velmi rozšířeny a na několika ostrovech spodních vápenců nalezneme opět svrchní vrstvy. Zmíněná rýha je dána směrným zlomem, o němž ještě se zmíníme.

Celkem je patrno, že pořad vrstev neodpovídá přesně pořadu, jejž jsme uvedli na jižním pobřeží.





Povrch budovaný krasovými vápenci svrchnorudistovými v okolí Pod Kavdena, ostrov Krk. — Surface karstique du calcaire supérieur à Rudistes. Aux environs de Pod Kavdena; île de Krk.

Krasový typ povrchu, budovaného svrchní křídou rudistovou. Vých. od osady Sv. Juraj na ostrově Krku. — Type d'une surface karstique sur le Crétacé supérieur à rudistes. A l'Est du village Sv. Juraj (île de Krk).

Ke Staré Bašce sestupujeme rýhou, v podstatě směru *h*4. Kolem 200 metrů nalezneme ojediněle brekcie pohraniční mezi křídou a eocenem, avšak dále stále je křída (facie žlutavá) a to až do výše 60 metrů, kdy následují vápence alveolinové. Odtud třeba popsati směry jižněji až k Val Zala, kde teprve počíná mapa a vysvětlivky podané v publikaci dříve zmíněné, jež možno doplniti po stránce tektoniky regionální.

Alveolinové vrstvy udržují svou hranici ve výši kolem 60 metrů; o dvacet metrů níže objevují se vrstvy nummulitové, které však jižněji nejsou téměř odkryty. Výběžek Pta Cernika je křídový. U něho je malý k ř í d o v ý o s t r o v, obklopený vesměs eocenem. Oboje jsou svrchní rudistové vápence, jež zapadají k jihozápadu. S nimi na severovýchodní straně souvisí alveolinové vápence, jež zapadají týmže směrem pod křídu.

Kra křídová dobře je tu viděti i na zmíněném křídovém ostrůvku, »plovoucím« na eocenu. Na straně k pobřeží, asi západně od koty 60 *m*, je jáma a asi 20 metrů dlouhý průkop na beauxit, před nímž jsou opuštěné haldy.

Projdeme-li odtud napříč vrstev, přes paleogen uložený mezi touto krou Pta Cernika a hlavním křídovým hřbetem, nalezneme tento pořad vrstev:

Alveolinové vápence (v podloží křídy), východněji nummulitové; údolí je vyplněno ssutí (hlavně z křídového materiálu); v ssuti nalezneme i malé jezírko, jež snad dosvědčuje podloží nejspodnějšího flyše (slínů). Na druhé straně jsou vrstvy nummulitové a nad nimi ve výši asi 60 *m* alveolinové. Konečně o 30 metrů výše následuje křída. Hranice kryta ssutí.

Jdeme-li nyní po pobřeží severně, nalezneme tu vrstvy nummulitové jižně od Staré Bašky a teprve západně od ní vystupují v jich podloží slíny. Není tedy W a a g e n o v o značení flyše u Pta Cernika oprávněno. Nad slíny následují nummulitové vrstvy, pak alveolinové a konečně křída. Srovnáme-li to s profilem, který jsme učinili jižněji, západovýchodně asi přes Val Petekova, vidíme, že zdejší poměry odpovídají východní polovici profilu, kdežto část západní (Pta Cernika) křídová a alveolinovými a nummulitovými vrstvami v podloží je zakryta mořem. Soudě podle zapadání, je rozhraní obou polovin poloostrova Cernika tektonické. A je velmi pravděpodobno, že dislokace tato tvoří část pobřežní linie v okolí Staré Bašky. Zjištění je nemožné, neboť všechny vrstvy při pobřeží jsou jen zřídka odkryty, jsouce převážně zcela zakryty mocnými recentními brekciemi a ssutí. Avšak shledáme se s linií takovou opět asi *2 km* severněji, jak uvidíme. Na brekciích stojí i Stará Baška většinou. Teprve severní část její (Pučka škola) stojí na odkrytých nummulitových vrstvách, dále jsou i vrstvy alveolinové. Ty provázejí celou další cestu a to až k místu, kde se uhýbá k západu. (Pozn. Cesta ta není ve starších mapách značena. Vede stále rovnoběžně s pobřežím severně od staré Bašky.) Pouze něco málo jižněji od tohoto ohybu sahá k cestě z prava přisunutá kra křídová; totéž je severně při ohybu.

Sestoupíme-li odtud k moři, sejdeme přes tyto alveolinové vrstvy, doleji přes nummulitové a konečně při samém břehu jsou odkryty slíny co nejspodnější poloha flyše. Táhnou se tedy skutečně podél pobřeží, ale jen nesouvisle a především většinou pokryty ssutí. Brekciová ssuť vyplňuje také všechny nižší polohy rozšířené deprese severně odtud, východně od Orlevice. Při jejím pobřeží ještě se dají zjistiti slíny, které

spolu s pískovci pod ssutí budují také širší pobřežní kraje. Dále jsou vrstvy nummulitové a především alveolinové, na nichž je drobný »plovoucí« ostrůvek křídový a rozlehlejší křídové výběžky, řekl bych jakési »splazy«.

V obojích se těží (ve svrchních rudistových vápencích opět) beauxity. Výkopy měří průměrně kolem 10 *m* délky a asi 6 *m* hloubky, častěji méně. Při pohledu k severozápadu je pěkně viděti rozhraní křídy a eocenu; křída je charakterisována krasovými fenomeny, eocen je porostlý zelení, jež činí hranici z dáli patrnou. Waagen kreslí drobný alveolino-nummulitový ostrůvek ve flyši. Ve skutečnosti jde o alveolinovou skalku, pod níž (přikryt eluviem) je flyš, pískovce, avšak dále je tolik ssuti, že není možno na podklad přesně usuzovati. Podle úlomků však jde i o starší eocen.

Jdeme-li odtud dále kolem Orlevice (89 *m*), nalezneme nejprve flyše při pobřeží a kromě recentních brekcií a písků opět nummulitové vrstvy a alveolinové. Vlastní Orlevica je tvořena na vrchu přikrývkou svrchních rudistových vápenců, která sahá na jihovýchodní straně velmi nízko, kdežto na Val Operna na př. ještě ve výši 60 metrů nalezneme vrstvy alveolinové. V rudistových vápencích je opět serie beauxitových jam, ovšem opuštěných; cestičky k nim však umožňují důkladnější prostudování skal jinak dosti těžko schůdných (ač zde ne nepřístupných).

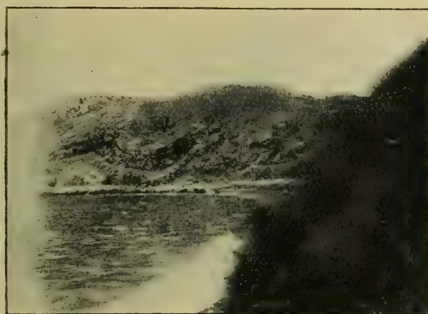
Pozornosti větší však zasluhují výběžky do moře u Val Operna. Nejvýchodnější malý výběžek je alveolinový a částečně i nummulitový; nummulitové vrstvy vystupují v nadloží alveolinových, jež zapadají k moři (jihozápadně), a v nadloží jich jsou pískovce flyšové. Poté následuje směrná dislokace *h* 8 (dosti neobvyklý směr) a výběžek vlastní je tvořen vrstvami nummulitovými a alveolinovými.

Přejdeme-li jej a sestupujeme k moři do zátoky s pěkným písčitým pobřežím, nalezneme v ní částečně jen viditelné vrstvy alveolinové, tvořící malou kru, a vedle nich nummulitové a nad nimi dále flyšové pískovce. Místo je značně porušeno tektonicky, jak jsme viděli i z průběhu směrné dislokace. Zapadání vrstev činí tu skutečně též *h* 8, dále *h* 9 a p. Waagen poznamenal tu značku, jež svědčí pro *h* 7. Poruchy jsou viděti i jinak. Oba výběžky, ale zvláště západnější, jsou (jak je z vnitřní strany zátoky viděti) zprohýbány v pěknou dvojitou girlandu, zjev, který nikde jsem tu nezjistil tak zřetelně. Pod pískovci této girlandy jsou slíny se stálou studánkou (pramen je značen i na mapě 1 : 25.000).

Dlužno se zmíniti ještě, že v těchto místech nalezneme flyšové pískovce, které budí někdy pochybnost, nejde-li o nejvyšší písčité nummulitové vápence, což vzhledem k detailnímu rozbití tektonickému je někdy

skutečně těžko stanoviti. Ostatně rozbití je tak značné při pobřeží, že mapa 1 : 25.000 nedovoluje než znázornění značně schematisované.

Čtyřúhelníkovitý výběžek, ohraničující zátoku Val Operna z východu, je paleogenní, kdežto severně i západně od něho jsou svrchní rudistové vápence, v nichž na několika místech se těží beauxity. Hrot tohoto výběžku je alveolinový, pod tím nummulitový, uprostřed slinitý a výše k severovýchodu nummulitový a alveolinový. Přes tyto oba poloostrovy, zmíněný i menší východně od něho, dříve popsaný, probíhá dislokace směrná, jež je patrně více méně totožná s dislokací, kterou jsme poznali východně od výběžku Pta Cernika, kde rovněž dělila paleogen.



Zklikacení paleogenu u Val Operna. Pod nummulitovou vrásou kryt mladší vodonosný slín. — Paléogène plissé dans le Val Operna. Le calcaire nummulitique plissé forme le toit d'une marne plus jeune et horizontale.

Prochází odtud zřejmě mořem dále u Val Operna. Soudě podle směru a morfologického vzhledu, je pravděpodobně příčinou i rokle, kterou teče Trt. Stoklin, dislokačně se tam však dokázati nedá. Směr její se blíží stále více obvyklé *h* 10—11 a je zcela možno, že ještě Val de Sus, jižně od Alexandrova (dříve Ponte), je jí částečně diktováno.

Podle Waagenovy mapy je údolí kolem potoka Stoklin vyplněno eocenem, který zasahuje do pevniny až na počátek Val de Sus, kde se rozšiřuje a obtéká křídový kopec (kotu 198 metrů). Eocen ten je vesměs alveolino-nummulitový.

Při mapování zjistil jsem tyto odchylky: Eocen rozšířený kolem koty 198 *m* je nejen alveolinový a nummulitový, nýbrž i flyšový. A tento eocen není zátoka mořská od Val Operna údolím Stoklin, nýbrž ostrov, jenž s mořem vůbec nesouvisí. Údolí Trt. Stoklin není budováno eocenem totiž, nýbrž jen křídou.

Podrobnosti jsou tyto:

Údolí má poblíže ústí tvar __/ se stěnami velmi rovnými, jak je viděti nejlépe při pohledu z pevniny, na př. z cesty, vedoucí pod výšinou

Svinski plaj. Po obou stranách jsou jámy, kde těžen byl beauxit, jež jsou zdáli patrny dobře červenou barvou. Beauxity tyto samy napovídají, že jsou těženy ze svrchních rudistových vápenců, které také jsou typicky vyvinuty a sahají až na dno údolí. Jen zcela úzký proužek je zakryt recentními sedimenty potoka; jinak je možno křídové skály všude zřetelně sledovat, zvláště tam, kde byly nově vylámány pro upravení přístupu k beauxitovým jamám. Na západní straně jsou místy recentní brekcie.





Val Operna na ostrově Krku. V pozadí údolí Trt Stoklin, tvořené vesměs svrchními rudistovými vápenci, nikoliv paleogenem, jak se dříve soudilo. — Val Operna sur l'île de Krk; au fond la vallée de Trt Stoklin située entièrement dans les calcaires supérieurs à rudistes, et non dans le Paléogène comme on a cru auparavant.

Údolí Trt Stoklin, jež je budováno vesměs jen křídou (nikoliv paleogenem). — La vallée de Trt Stoklin située entièrement dans le Crétacé (et non dans Paléogène).

V celém tomto údolí až k místům, kde se rozvětvuje údolí ve dvě větve, není ani stopy po eocenu, vyjímaje zcela ojedinělé sesuté kameny.

Z rozvětvených dvou cest je východnější zatarasena kolmou stěnou křídovou (stále svrchní rudistové vápence), v níž je vylomeno ve výši asi 5 *m* jakési okno, které budí dojem umělého výlomu, ač je nutno je přičísti silám dynamickým. Pod ním nalezneme několik okulacených kamenů paleogenního pískovce, ojediněle i alveolinových, jež touto roklí byly vodou sesuty a výše vystupují. Z této strany jsou však nepřístupny.

Údolíčko západní je přístupnější, ač cest v něm již není a nutno občas slézati úzké, strmé průlomy v křídě. I tu nalezneme ojediněle sesuté balvany vodou, a to alveolinové. Teprve ve výši kolem 160 *m* jsou pís-

kovce (většinou zakryté) a v nich (slíny!) malé jezírko. Jsou to spodní vrstvy flyšové. Výše nad nimi zjistíme i nummulitové a hlavně alveolinové vrstvy, které pak vystupují hojně. Tyto paleogenní vrstvy tvoří tu ostrov ve výši 160—180 metrů, který není vůbec možno vysvětliti jinak než přesunem, víme-li, že s mořem nesouvisí, jak se Waagen domníval. Jen dvě možnosti jsou pak: Buď byl tento ostrov přesunut sem na křídu nebo naopak křída přesunuta přes eocen, jehož část tu vystupuje erosí jako okno. Výklad zdvihem či poklesem ker je nemožný. Oba případy se jeví jinak, na př. v rýhách při prohloubení erose; avšak teoretický tento předpoklad v praxi selhává, poněvadž hranice není vždy jasně přístupna. Srovnáme-li poměry ty s jinými, přidržíme se rozhodně

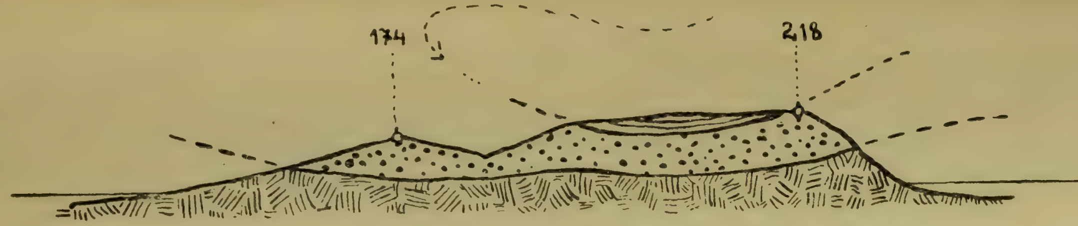


Příčné zlomy, přerážející křídový hřbet u Pta Skulica na Krku. Největší rozšířenina je krápníková jeskyně, jimi podmíněná. — Dislocations transversales, coupant la chaîne Crétacé à Pta Skulica, île de Krk. Grande grotte à stalactites dont la formation est due à ces dislocations.

předpokladu, že přesunuta byla křída a že paleogen je viděti erosivním oknem.

Srovnáme-li totiž na př. výskyt dříve neznámého eocenu u Pta Braciol, je tam zřejmo (odmítneme-li teorii, že eocen vyplňuje prostou depresi v křídě, která pro souvislost s mořem a tvar by byla jinak přípustna), že je eocen relativně proti křídě autochtonní. Tam nejen výška, nýbrž i tvar výskytu eocenu ukazují, že byl obnažen erosí. V našem případě sice tvar je neurčitý (nešlo o erosi jediného potůčku), ale přes to poměr výškový přesvědčivý: Paleogen nesahá rozhodně nikde výše než 180 *m*, většinou méně. Naopak křída v jeho okolí je vyšší: koty měří 198, 238, 259, 304, 337, 215, 237 metrů. Nemůže tedy o poměru paleogenu a křídy tu býti pochybnosti.

Pokud se týče otázky, proč v údolí potoka blíže moři odkryt eocen není, je vysvětlení na snadě: I nahoře je ze srovnání výšky vidět, že paleogen stoupá k severu do výše, k jihu klesá. Jeho vrstvy zapadají



Profil ostrovem S. Grgur. Vespod paleogen (dříve jen na záp. známý), nad ním dvě šariáže křídové. — Coupé à travers l'île de S. Grgur. Au mur le Paléogène (auparavant connu seulement à l'Ouest), au-dessus de lui deux charriages Crétacés.



Profil ostrovem Prvičem. Dvě šariáže křídové nad paleogenem (dříve neznámým). — Coupe à travers l'île de Prvič. Deux charriages Crétacés au-dessus du Paléogène (inconnu jusqú à présent).



Profil ostrovem Goli. Křídová dvojí šariáž nad (dříve neznámým) paleogenem. - Coupé à travers l'île de Prvič. Deux charriages Crétacés au-dessus du Paléogène (auparavant ignoré)

často k jihozápadu, tuším. Tvoří patrně kopec předpříkryvový, který tak snadno byl obnažen i při malé erosi, jež nemohla odkrýti paleogen, ležící hlouběji.

Paleogen liší se tu zřetelně vzhledem od křídy. Kdežto křída je vesměs holá, skalnatá a do ní otevřeny místy i jámy beauxitové (na př. na straně ke kotě 237, označené na mapě Stanza Valcelli), je paleogen většinou plochý, zarostlý, ano částečně pokryt i h o l o c e n e m.

Můžeme jej tak sledovati i k východu, kde holocen je dosti rozlehlý. Tak ve výši kolem 160 metrů pod křídou jsou vrstvy alveolinové; nummulitových vrstev odkrytých jsem nenalezl, ale doleji nalezneme pískovce flyšové, jež se táhnou směrem na jih, kdež jsou přikryty křídou. Jejich úlomky jsme nalezli až pod erosivním průlomem, proraženým do křídové stěny ve východní větvi údolí.

Zakrytí paleogenu recentními vrstvami a mimo to i obtížná orientace v mapě bez opěrných bodů znemožňuje zcela přesné stanovení hranic jednotlivých vrstev, což však nemá většího významu.

Mimo ostrov paleogenní, jejž jsme právě popsali, je okolí až k Alexandrovu budováno svrchními vápenci rudistovými, v nichž nenalezneme ničeho neobvyklého. Budují i poloostrov Negrito s majákem a táhnou se až k Ponte a přes záliv Porto di Veglia severně od města Krku. V zátoce je ostrůvek Cassion s klášterem, který (patrně je jimi také budován) jsem nenavštívil. Severně od Alexandrova a všude severozápadně, pokud vím, je vyvinut spodní vápenec rudistový, jejž nalezneme i jižně od tohoto pruhu, na př. ve městě Krku (Veglia).

Resumujeme-li v krátkosti, je zřejmo, že nejlépe vyhoví představa o křídové pokrývce a to pravděpodobně dvojí. V tom smyslu je třeba přizpůsobiti i profil, který jsem uvedl dříve o nejjižnější části Krku a který s hlediska regionální tektoniky, jak ji nyní pojímáme, nevyhovuje; je přirozeno, že z mapy tohoto nevelkého území nebylo možno posuzovati na zjevy tak rozlehlé, jako jsou dinarské přesuny. Jinak zůstávají mapa i popis beze změny.

Baščanské údolí a vnitro ve středu ostrova Krku.

O jižní části baščanského údolí pojednal jsem v dřívější speciellní publikaci, k níž byly připojeny i náčrtky map. Změny třeba opět jen tam, pokud jde o celkové pojetí tektonické, t. j. výklad přesuny místo místními pochody tektonickými, které dnes po zmapování širšího okolí považuji za plně odůvodněné.

Popíšeme proto podrobněji hlavně jen střed kraje, vnitro ostrova Krku, kam dřívější pojednání nezasahovala.

Geologické mapky, jež byly připojeny k práci o »Geologii baščanské zátoky« a »Nový nález paleogenu v nejjižnější části ostrova Krku«, se téměř stýkají. Zůstává nezmapován a nepopsán jen malý kousek pobřeží v západní části baščanské zátoky asi východně a jihovýchodně od hory Pago (185 *m*).

Pobřeží to je zajímavé tím, že není křídové (ze severních ru-
dokonce flyšové vrstvy, v nichž dají se částečně rozeznati i jed-



Baščanské údolí, podmíněné směrnými zlomy pošariážovými a erosí. Vpředu široké náplavy potoka, kryjící paleogen, jenž po stranách vystupuje zpod křídových hřbetů. Vpředu Sv. Michal, v pozadí Jurandvor. Vrcholky hor vzadu jsou Chlam (428 a 449 *m*). Patrny i příčné zlomy z vystupování jednotlivých hor. — Vallée de Bašča, due à une dislocation longitudinale après le charriage et à l'érosion. Au premier plan large bande d'alluvion du ruisseau recouvrant le Paléogène, affleurant sur les flancs au pied des chaînes Crétacées. Au premier plan Sv. Michal, au fond Jurandor. Les sommets bien au fond sont le Chlam (428 et 449 *m*); la position des différents massifs indique des dislocations transversales.

notlivé polohy (jurandvorská a méně svatomichelská). Jsou však kryty sutí, takže jen při samém břehu jsou viditelny. Jižně od alveolinové kolmé stěny je malá zátoka těžko přístupná, kde je nejjižnější odkryv těchto vrstev, jenž dále je zatarasen křídovou stěnou. Jde o dislokační distových vápenců), jak soudil Waagen, nýbrž že je to pruh paleogenu, lemující tento horský hřbet. Jsou to vápence alveolinové a

kru, jak je dobře vidět. Paleogen sám je značně porušen. Zjistíme v něm především alveolinové vrstvy, pod nimi nummulitové a pod těmito flyš a to opět v překoceném pořádku, počínaje slíny. Pískovce flyšové jsou tu podivným způsobem rozervány v povrchové dutiny, jež se dosti liší od obvyklého vzezření aeroxystů (jaké na př. nalezneme severněji »Na Korah«). Jde patrně o petrologickou příčinu.

Celý tento výskyt je kryt se severní strany obvyklými recentními brekciemi, většinou z křídových úlomků, pod nimiž však vidíme místy písky, skládající se z okulacených zrnek, jaké jsme poznali v baščanském údolí a na Prviči co doklad kolísání mořské hladiny po neogenní revoluci horotvorné (pobřežní písky).

Na nejjižnější straně pak je velmi jasně viděti příkryv křídový nad alveolinovými vápenci, který vylučuje každý jiný výklad.

Paleogen, který se vyskytuje na celém pobřeží zátoky, jeví se tu jako rovný stupeň, odlišný od dosti strmých skal křídových. Je však tak zakryt křídovou sutí, že nedá se jeho průběh detailně vymeziti; podle všeho sahá severovýchodně od vrchu Pago ještě výše, než jej mapka značila.

Další okolí Nové Bašky bylo již popsáno jinde. Během posledního roku zpracoval jsem další materiál paleontologický odtud a to hlavně z flyše. Výsledky jsou publikovány jinde.*)

Ze seznamu, k němuž by bylo nutno připojiti ještě velmi značný počet zkamenělin určitelných jen co do rodu a některé mnou nenalezené zkameněliny, jež uvádějí jiní autoři z blízkého okolí, vyplývá opět táž nejasnost stratigrafické příslušnosti flyše. Mimo zkamenělin rozhodně lutétienových jsou i zkameněliny auversienové, ano značně vyšší. Lóczy v nové své mapě býv. Uher uvádí na ostrově Krku vedle eocenu dokonce i oligocen; příčiny jsou mi neznámy, ale přes to soudím, že žádná vůdčí zkamenělina, kterou znám, tak vysoko nezasahuje. —

Sledování průběhu paleogenu z baščanského údolí do střední části ostrova je zbytečné, poněvadž je patrný z mapy. Je rušen nesčetnými příčnými zlomy, z nichž jen hlavní a i jinak než morfologicky (rýhou) patrné mohly býti pojaty do mapy.

Pravidlem jsou podél několika zlomů posunuty kry týmž směrem. Řídčeji se jeví nepravidelnost. Nejlépe se sledují na rozhraní eocenu a křídy.

Pravidelně zapadají vrstvy vždy pod křídu a to na obou stranách údolí, takže jsou překoceny a tvoří skutečně antiklinálu probořenou, jak

*) Příspěvky ke stratigrafii paleogenu na kvarnérských ostrovech, Zagreb 1925. (V tisku.)

v dřívějších pracech jsem ukázal. Přes tuto antiklinálu byla křída přesunuta. Nalezl jsem řadu dokladů, plovoucích ker křídových v eocenu baščanského údolí, jež uvedeme.

V profilech napříč údolím vyskytují se vrstvy v různých výškách. Kdežto však v baščanském údolí leží eocen celkem velmi nízko, takže svádí úplně k domněnce o jeho uložení v křídové depresi, uvnitř ostrova je hranice velmi vysoko.

Tak na př. již západně od koty 16 *m*, jižně od Batomalj, je hranice mezi křídou a brekciemi ve výši asi 150 *m*, mezi brekciemi a alveolino-





Křídový hřbet a pod ním paleogen záp. od Majky Boží. Podél příčného zlomu je nahoře levá (tmavá) kra paleogenní posunuta v sousedství bílé křídy. — Chaîne Crétacée et dans son mur le Paléogène à l'Ouest de Majka Boží. Après une dislocation transversale le massif supérieur (foncé) du Paléogène à gauche a été surélevé au-dessus du Crétacé blanc avoisinant.

Široká příčná dislokace, zaplněná pevnou brekcií. Pod Veli vrh (541 *m*) na ostrově Krku. — Large dislocation transversale, remplie d'une brèche cimentée. Au pied du Veli vrh (541 *m*), île de Krk.

vými vápenci asi 140 *m*, pak následují nummulitové vrstvy na 110 *m* a v 80 *m* již slíny, doleji pískovce a ostatní flyš, většinou zakrytý. Jižněji jsou tytéž poměry, celkem však asi o 12 metrů nižší vlivem příčného zlomu (patrného také širokou rýhou, vyplněnou ssutí, místy celým kamenným mořem). Severněji pak poznali jsme již na př. u Batomalje rozhraní vysoko asi 310 *m*.

Všimněme si ker, které nás mohou přesvědčiti o přesunech. Je to především okno paleogenní v zátoce Monza Luka, kde vidíme na křídové kře, jež je omezuje západně zřetelně, že přikrývá eocen přes četné zlomy. Eocen zapadá pod ní. Zajímavá je zvláště kra, ležící severně od

Bašky, severovýchodně od Gorice, kterou Waagen přehlédl. Je složena na spodu z nummulitových vápenců, v jichž překoceném podloží, pod nimi až asi do výše kolem 75 *mm* (slíny — studánky!) nalezneme flyš. Nad nummulitovými vrstvami jsou alveolinové vápence a na nich čepička křídová, oddělená eocenem, jenž opět je dále a teprve později zapadne pod povrchní rudistové vápence. Křídová čepička »plove« tak na tomto osamělém útesu, že není možno o jejím původu pochybovati.

Jdeme-li k severu, nalezneme nejpěknější doklad bradla křídového v kopečku s kostelíčkem Majky Boží. I Waagen si všiml, že na vrcholu je budován křídou, ale nedůvěřuje plně jejímu isolování, naznačil ze západní strany jen ssuť v mapě.



Paleogenní kopec s kostelíkem Majky Boží na Krku (v baščanském údolí) je kryt isolovanou čepičkou křídovou, zbytkem příkryvu. Je odlišná i barvou. — Sommet de Paléogène avec l'église de Majka Boží, île de Krk (dans la vallée de Bašča). Il est coiffé d'un toit Crétacé d'une couleur différente, reste isolé d'une nappe.

Kopeček sám je v základě tvořen slíny a pískovci; nad nimi však je na východní straně ještě nummulitový vápenec asi v 75 *m* (na severní straně výše), a asi ve 100 *m* i alveolinový. Se strany západní je sice dosti ssuti, ale přes to bezpečně patrno, že křída tam nepokračuje, naopak jsou tam vrstvy nejmladší (flyš). Je tedy eocenový kopec Majky Boží s křídovou pokrývkou úplně isolovanou od okolí, obklopenou se všech stran eocenem. Křídová hranice přesunová leží zcela mírně skloněna k jihozápadu na eocenu a je s několika stran dobře viditelna. Příkryv tu není třeba předpokládati, poněvadž je přímo vidět: Je to příklad klasický.

Majka Boží není ostatně jediná v tomto ohledu. Málo jižněji pod Batomaljí je kopeček zdvihající se ze dna údolí asi do výše 62 *m*, budovaný rovněž flyšem, jenž je tu kolem všude. Se strany východní (podobně jako Majka Boží — vrstvy zcela překocené), je tam nummulitový

a alveolinový vápenec; na něm pak je rovněž čepička křídová (Waagenovi neznámá).

Je zajímavo, že směrem jižním je ještě několik takovýchto kopečků, složených z flyše jako okolí a přece vynikající nad ně. Je zcela možno, že byly kdysi přikryty též vápencem, který je chránil před erosí, které pískovcové a slínové okolí podlehlo, ač-li nejde o kry zdvižené podle detailních zlomů.

Nutno si však všimnouti ještě jednoho zjevu, totiž podivného překocení vrstev. Vrstvy mladší leží postupně pod staršími (flyš pod nummulitovými, nummulitové pod alveolinovými vrstvami). Nejlépe uvidíme to



Paleogenní kra severovýchodně od Gorice na Krku. Je oddělena směrným zlomem (podmiňují genesi baščanského údolí) a přikryta čepičkou křídovou. — Massif Paléogène au Nordest de Gorice, île de Krk, séparé par une dislocation longitudinale (produisant la dépression de la vallée de Baška) et coiffé d'un toit, Crétacé.

severně odtud. Geologické poměry jsou tam tyto: Ve vesnici Draga nalezen západně u mlýna (jižně od osady Sv. Rok) kopeček, jenž na severní straně je ohraničen potokem a kolmo říznut. V něm vidíme pěkný profil: Na východě je malý kus nummulitových vápenců, jenž se však táhne dále na východ, zakryt holocenem. Zde je zřetelně přesmyknut přes flyš, jenž následuje západněji. Zapadá k severovýchodu, je však rozbit přečetnými drobnými zlomy nejrůznějšího systému. Jsou to nejprve silné lavice pískovců, pod nimi slinité vrstvy až slíny různých petrologických i paleontologických vlastností. Západ mizí pak v ssuti slínů.

Jdeme-li po silnici dále přes Sv. Rok a Sv. Juraj směrem k městu Krku, nalezneme po pravé straně silnice pak od Sv. Jura recentní brekcie, po levé nummulitové vrstvy, jimiž prodírá se potok. Nejsou tu však odkryty flyše, jak značí mapa Waagenova. Severněji přejdeme most a nalezneme u něho po levé straně lom těchto nummulitových vápenců. (Waagen tam kreslí flyš a šipku zapadání.) V mohutném příčném zlomu

směrem na kopci Veli vrch (541 *m*) nalezneme flyše v podloží nummulitových vrstev, značně rozdrcené ve výši skoro 300 metrů! Severněji tvoří pak okna v křídovém hřbetu.

Okolí je mnohdy nepřístupno, kryto brekciemi a p. Brekcie recentní jsou stmeleny tak, že budí zcela dojem křídových-eocenních. Tektonické poruchy jsou velice mocné a projeveny řadou paralelních diaklas. Nalezneme tu na př. dislokační trhlinu ohraničující, která je zatmelena hlinou a p. v šíři asi 4 metrů. Paralelně s ní jsou diaklasy, jež rozdělují kry trhlinami až metrovými. Jsou tu proto sřícené balvany, oddělené takovými diaklasami, které namnoze jsou ihned stmelovány v ohromnou brekcii; najdeme balvany až desetimetrové. Již W a a g e n se podivoval (na jiných místech) tomuto zjevu. Příznačné je beauxitové zabarvení (terra rossa).

Zapadání vrstev se mění. Vedle vrstev skoro kolmých nalezneme tam na př. ve výši asi 245 *m* odkryty pískovce, jež se sklánějí do údolí. Pískovce tyto se dají sledovati místy pod různým zapadáním až dolů, ale jsou pak kryty vrstvami alveolinovými a nummulitovými, které tady až na okna flyšová budují vnitřek ostrova. W a a g e n o v o znázornění slínů neodpovídá tedy zcela skutečnosti. Teprve v severní části ostrova, severně od Vrbniku, nalezneme slíny hojněji ve středu údolí.

Výklad tektonický není jednoduchý. I jižněji nalezneme již počátky těchto poměrů. Tak na př. jsou velmi dobře odkryty již při potůčku (dislokační údolí příčné) Trt. Botisine. Výškové hranice jsou asi tyto: slíny sahají zřetelně až do výše as 140 *m*, v ssuti vystupuje flyš ještě 180 *m* vysoko, kdy následují vrstvy nummulitové a konečně křída.

Pro orientaci jižnějších poměrů uvádíme příkladem.*) Slíny, které budují kopeček Majka Boží (kdež jsou částečně přikryty nummulitovými a alveolinovými vrstvami a konečně křídovou čepičkou), sahají až asi do výše 140 *m*; následují pak vrstvy nummulitové až asi do 160 *m*, a konečně alveolinové, které se stýkají s křídou ve výši kolem 210 metrů.

Ve všech těchto případech vidíme pořad vrstev zcela obrácený. U křídy, v níž jsme poznali přesunový původ, to nepřekvapuje, avšak paleogen žádá vysvětlení. Že není již možno ve střední části ostrova vyložiti to pouze antiklinálou, jejíž křídové kry jsou přesmykovány přes střed, jak lokálně bylo možno zjistiti v baščanském údolí, je zřejmo.

Na příklad západně od Dragy nalezneme tu a tam flyš odkrytý v příčném údolíčku, ale jinak zakrytý po celé šířce jakýmisi splazy num-

---

*) Připomínám, že přesné stanovení hranic možné většinou není, a to nejen dole pro ssuť, ale výše hlavně pro velmi těžkou přístupnost skal i obtížné odhadování výšky (kolísání barometru!). Chyba 20 metrů je dosti běžná.

mulitových vápenců. Styčná plocha leží skoro vodorovně nebo měří se na obě strany. Zdálo by se, že je tu tento vápenec přesunut nad flyš. Uložení alveolinových vápenců na něm však ukazuje, že je celek prostě p ř e k o c e n. Důkazem je i uložení flyše, kde detailní stratigrafie,



Flyšové pevné pískovce v erosivní (ne tektonické) rýze jihovýchodně od Jurandvora. Zapadají od údolí. — Grès dus du flych dans une coupe érosive (non tectonique) au Sudest de Jurandvur. Inclination vers les flancs.

již jsme poznali dříve, dovolila určiti, že i flyš je tu překocen, že vrstvy souvisící s vápenci jsou nejstarší.

(Pro úplnost dlužno podotknouti, že uvnitř ostrova Krku, pokud je flyš odkryt, jeví již úchylky v petrologické povaze pásem proti složení v okolí Bašky, a to podobné jako směrem na ostrov Ráb. Slinité polohy

jurandvorské přecházejí šedými slinitými peckami v obyčejné skoro pískovce, svatomichelské pak do serpulových. Přes tuto jednotvárnost je možno dosti dobře je sledovati.)

Je nyní otázka, poněvadž celý pořad vrstev je překocený:

1. je to tím, že byly přesunuty i s křídou a uloženy i s ní jako část překocené vrásy, nebo

2. křída je samostatná přikrývka a překocení vrstev paleogenních bylo již před přikrytím?

V těchto místech bylo dosti obtížno činiti závěry, ale poučí nás krajiny jiné, kde zřetelně vystupoval eocen samostatně. Všimneme-li si za-



Nummulitové vrstvy (vlevo recentní brekcie) u potoka Vela Řeka, severně od Sv. Juri u mostu. Ani náplavy nejsou vyvinuty, ani flyš odkryt, jak bylo dříve znázorňováno. — Couches nummulitiques (à gauche brèche recente) sur le ruisseau de la Velka Řeka au Nord de Sv. Juri près du pont. Il n'y a ni des alluvions, ni un affeurement du flych comme indiqué auparavant.

padání vrstev, zjistíme ostatně místy totéž i uvnitř ostrova Krku: Křída zapadá skoro vždy strmě,*) ale přece do eocenu. Pod ní často zapadá vápenec alveolinový a pod ním nummulitový. Tak je tomu na př. západně asi od Sv. Roka ve výši 280 metrů. Pod ním leží shodně celkem i pískovec, který však asi o 40 *m* doleji nalezneme zapadati obráceně, do údolí. Avšak zase o dvacet metrů dále je znovu nummulitový vápenec a opět zapadá do údolí; pod ním dále zjistíme flyš. Zvlnění je ještě dále.

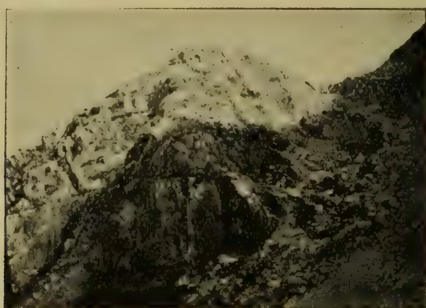
Je tedy celý paleogen detailně zvrásněn. Znázorníme-li si jej, vidíme, že je to lehlá překocená vrása, jejíž jedno křídlo pouze známe, druhé chybí. Vrása ta vznikla patrně p ř i p ř e s u n u k ř í d y či spíše před tím, a byla ovšem i detailně zprohýbána. Právě toto zprohýbání působí, že občas její část vidíme jako antiklinálu (baščanské

*) Je podivuhodno, že všude až na malé výjimky zapadají křídové vrstvy velmi kolmo, často jsou postaveny na hlavu. Tvar přesunové vrásy tedy musí odpovídati tomuto zapadání.

údolí, jak jsme ukázali dříve), jinde jinak, případně jako překocenou vrásu. Podle toho, kterou a jak velikou část její uvidíme obnaženu pod křídou, vzniká tento dojem. Je pochopitelno, že bez teorie přikrývkové by byl výklad velice obtížný, ano nemožný.

Mimo to ovšem po příkryvech křídových byla porušena stavba směrnými zlomy (o mladších zlomech příčných nemluvě), které způsobily opakování vrstev atd. (pokud se neděje vrásou). Podrobněji popsali jsme zlomy ty v baščanském údolí v dřívějších publikacích, které tímto možno doplniti.

Všímali jsme si podrobněji západní strany, poněvadž jsou na ni poměry lépe viditelny. Východní strana je neobyčejně mnoho kryta ssutí,



Styk křídy s paleogem západně od Sv. Juraj na Krku. — Contact du Crétacé avec le Paléogène à l'Ouest de Sv. Juraj (île de Krk).

hlavně recentními brekciemi, které na př. mezi Jurandvorem a Dragou, i značně severněji kryjí všechen svah. Jinak jsou poměry analogické. Na př. východně od Jurandvora je asi tento profil vrstev, zapadajících vesměs od údolí (k severovýchodu): Flyš až do výše 140 *m*, nummulitové vápence do výše asi 165 *m*. Opakování podél směrného zlomu (přesmyku přes kry západnější), pískovce 165—175 *m*, nummulitové vrstvy 175—185 *m*, alveolinové 180—210 *m*, dále křída (svrchní rudistové vápence).

Skoro tytéž poměry výškové nalezneme ještě na severu, na př. západně od chýší »Pod Kavdena« a p. Ještě severněji, na př. u Kricanovské glavice a dále u Chlamu (Klam 449 *m*) směrem k Vrbniku je viděti flyš jakýmsi oknem v nummulitových a alveolinových vápencích. Naproti osadě Pavlja je v něm dobýváno i uhlí, tvořící spíše jen uhelné šmouhy bez širšího významu.

Dodatkem třeba ještě poznamenati, že ovšem všude jsou četné zlomy příčné; hlavní jsou značeny v mapě. Jsou patrny morfologicky (rýhou, ač ne každá rýha směru *h* 4 je zlomová, tak na př. rýha východně od

jurandvorské antiklinály, asi 1 *km* od Jurandvora jižně), posunutím celkem nevelkým. Někdy je posun viděti dobře z rozhraní šedých vrstev tercierních a bílorůžových křídových i z dáli. Pěkně je tomu na př. nad lesíkem jižně od Majky Boží, kde eocenová kra na jižní straně příčného zlomu (*h* 2) je vražena k jihozápadu do křídy, a j.

Východní polovina ostrova Krku jižně od Vrbniku.

Navazujeme-li na mapku a vysvětlivky, které jsme podali o krajině východně od Bašky, kde po křídové kře (bradlu) nalezneme opět paleogen v Monza (Buncula, Robinsonova) Luka a dále křídu. Nejprve svrchnorudistovou, stojící kolmo skoro, jak je vidět na střídajících se bílých a načervenalých pruzích, jichž hlavy vystupují na kopci; můžeme ji sledovati při pobřeží přes Stovišti, Vrzenicu a Petričevo (v mapách zátoky Štovišti a Petričevo nejsou zaneseny) skoro až k Val Dubna.

O něco západněji, asi u koty 84, je možno položiti rozhraní, částečně viditelné i z brekcií. Ve spodních vápencích již za Val Dubna je malá jeskyně, a to ve směru *h* 11; stálým zjevem jsou skály podemleté, vybíhající ve výši hladiny několik metrů do moře.

Východní hranici spodnorudistových vápenců nalezneme západně od zátoky Konjské; je tedy jejich šíře velmi malá. Ve Val. Konjska nalezneme již na východě vrstvy alveolinové, na západě (poblíže míst, kde končí telegrafní kabel, na mapě naznačený) svrchnorudistové vápence. Mezi touto zátokou a výběžkem Pta Niloca je zátoka, daná směrnou dislokací, jež je viditelná i dále do ostrova. Vrstvy u Pta Niloca se již blíží vápencům nummulitovým. Po celém vnitřním pobřeží (západním), jež tvoří zátoka Vela Luka, jsou vrstvy alveolinové a to svrchní polohy. Podél příčných dislokací (na př. v zátoce Niloca, na mapě neznačené, asi 500 *m* severně od Pta Niloca, zlom *h* 4) jsou jen malé posuny.

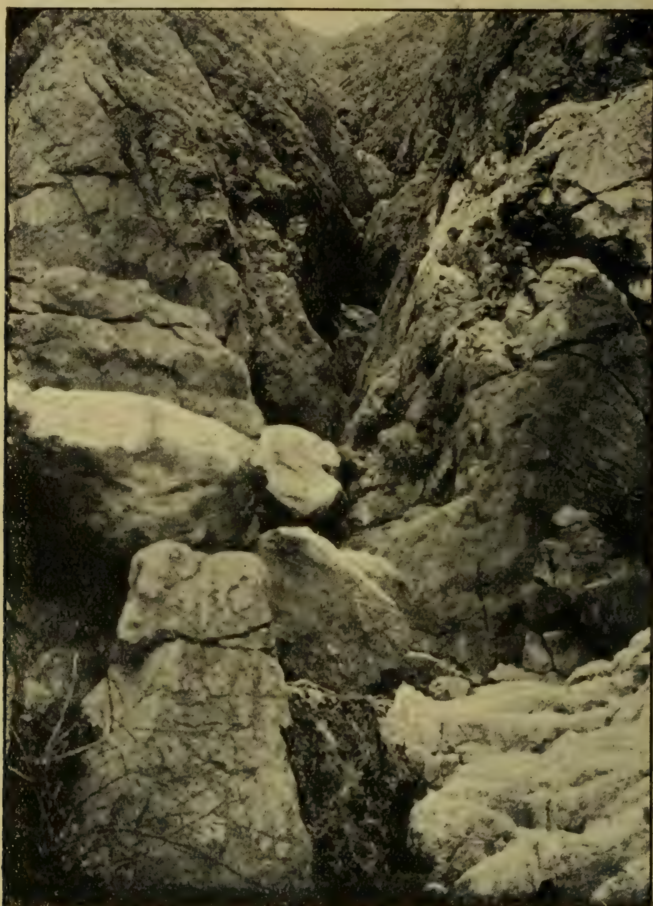
Na konci zátoky je značně brekcií recentních, jež budují pak i charakteristické pobřeží a skrývají částečně snad vrstvy nummulitové. Tyto vápence nalezneme za holocenním pobřežím na druhé straně zátoky Vela Luka. Je zajímavo, že z nich trhlinou vytéká tam stálý pramen. Jeho existence zdá se nasvědčovati, že pod nimi jsou přikryty slíny flyšové, které však nikde se nedaly zjistiti. Udržování se vody na souši (Boscar) svědčí také pro možnost jejich existence.

Nad těmito vrstvami jsou vápence alveolinové, které budují i kotu 108, kde stojí zříceniny starého hradu Korinthia.*)

---

*) V mapě nejsou vůbec zaneseny. Nepřesnost mapy ostatně někde opravdu znemožňuje v pustých krajích orientaci.

Nummulitové vápence lemují východní břeh Vela Luky asi do poloviny, kdy sestupují sem vápence alveolinové a to podle dislokace *h* 4. Tyto vápence sahají až na jih výběžku Rebica.



Dislokační rokle v křídě od Jargo k Monze Luce. — Ravin du à une dislocation dans le Crétacé entre Jargo et Monza Luka.

Avšak Pta Sokol a značná část dalšího pobřeží, obráceného k Velebitu, je tvořena typickou křídou svrchnorudistovou, nikoliv eocenem, který všude kreslí Waagen. Skály jsou tak nepřístupné, že není možno zjistiti přesné rozhraničení. Ale ještě severovýchodně a skoro severně od koty 129 nalezneme křídový pruh. Rozhraní je, pokud se zjistiti dalo, tektonické. Mezi křídou nalezneme ojediněle kry alveolinové, které sem jsou posunuty od západu příčnými zlomy.

Teprve asi jihovýchodně od kopce Sokol (kota 122) je celý poloostrov tvořen alveolinovými vrstvami. Nalezneme je ještě až v zátoce Malaluka; vnitřek pak západně v ostrově je nummulitový. Sledujeme-li břeh dále severně k Vrbniku, nalezneme dlouho jen vápence alveolinové. Skalisko východně od Sarbek glavica (386 *m*) je rovněž alveolinové.

Odtud až k Val Butni na severu je velice obtížno rozlišiti, kde vystupuje eocen alveolinový a nummulitový. Mapa W a a g e n o v a jich nerozlišuje, je naznačena zde jen v zcela hrubých rysech, jak jsme poznali již z toho, že jihovýchod poloostrova Rebica je křídový, nikoliv eocenový. Skály dalšího pobřeží jsou vysoké přes čtyři sta metrů a místy naprosto nepřístupné a životu nebezpečné. Naproti tomu neodváží se loďka k nim přistáti dole pro silné vlnobití, zvláště v nejistém počasí jarním, a to tím spíše, že v těchto místech lodi častěji ztroskotaly.

Sám jsem slezl skály na dvou místech a to od výše asi 450 *m* skoro k mořské hladině; je to nejnebezpečnější část ostrovů, jíž jsem poznal, a orientace ve skalách je možná jen přibližně. Zjistil jsem, že křída sahá až na několik desítek metrů nad břeh (jenž sám mi zůstal nepřístupný). Ve výši kolem 160 metrů nalezl jsem kusy vrstev alveolinových, nad nimi pak opět křídu. Šlo asi o ssuť, neboť ve výši 200 metrů teprve jsem zjistil skály alveolinové; nad nimi pak všude křídu. Není tedy možno kresliti na pobřeží široký lem eocenový, jak činí W a a g e n. Místy snad chybí paleogen na břehu dokonce vůbec.

Podobné poměry přibližně nalezl jsem v dislokační trhlině, kterou jsem sestupoval, asi mezi horou Gajen (463 *m*) a skaliskem v moři (Scoglio).

Severně odtud u zátoky Val Butni podle shodných informací vynáší moře po bouři z p o d v á p e n c ů l i g n i t y. Lignity ty vyskytují se p o u z e v e s l í n e c h, které tu nikde nejsou odkryty. Je to důkaz, že pod přikrývkou vápencovou j e p ř i k r y t flyš. —

Popíšeme ještě profilovou cestu napříč horského hřbetu, který podle W a a g e n o v ý c h představ je složen jen ze svrchních rudistových vápenců.

Na tomto hřbetu je několik drobných osad, a hlavně chýší pastýřských; bylo mi nápadno, odkud pochází voda, které nutně potřebují, když vodonosný terrain je značně vzdálen. Jsou to osady Albeci, Franicevi, Prodanje a j. Jdeme-li na př. jižně od Prigradské glavice (458 *m*) na západ, nalezneme četné závrty v svrchnorudistové křídě; ve výši 300 *m* je i j e z í r k o. Voda udržuje se v hlíně, která upomíná na terru rossu. Západněji nalezneme brekcie, jež několikrát se opakují a svědčí o rozhraní svrchních a s p o d n í c h rudistových vápenců, které sku-

tečně nalezneme dále v šedé barvě. Ve výši téže skoro nalezneme rozhraní jejich i na západě.

Vzhled pláně je různý, vesměs kamenitý, ale mimo malé kameny jsou složeny místy i z moře velikých balvanů, rozbitých krasovými zjevy. Někde je povrch pokryt hojnou terrou rossou, na níž jsou sporé traviny a místy i políčka. Závrty jsou velice hojné a jen částečně zanesené na mapě.

Zajímavý je kraj, značený »Dolce kal« na mapě (podle domorodců Volavine). Je to rozlehlá deprese; na západě je tvořena svrchním, na východě (asi od 300metrového rozhraní) spodními vápenci rudistovými,



Typ závrtů v křídovém hřbetě v okolí Plani dolac na Krku. — Type de lac de la chaîne Crétacée aux environs de Plani dolac (île de Krk).

probíhajícími ve směru *h* 11, často stočeném. Deprese tato je vyplněna terrou rossou a ssutí, v níž se udržuje nejen vlhkost, ale i celé jezírko.*) Nedala se naprosto zjistiti zde ani v okolí nějaká stopa po vodonosném paleogenu, jež ovšem možno pod křídovým příkrytem očekávati.

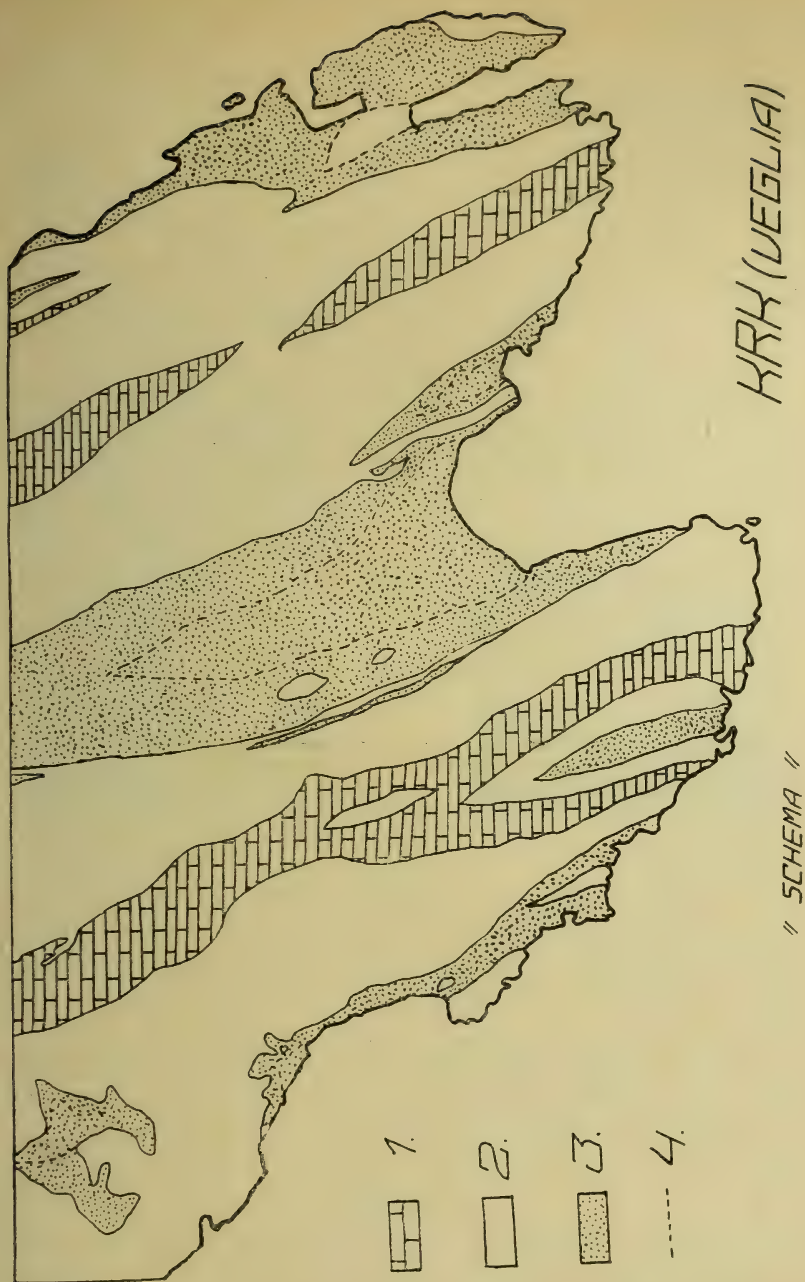
Velmi hojné jsou závrty severně od Dritelj (395 *m*), u Plani dolac a j.

Dále k západu ukazuje poměry mapa: Pod svrchními rudistovými vápenci nalezneme asi ve výši kolem 200 *m* alveolinové vrstvy, pod nimi, obyčejně ssutí zakrytý i ostatní paleogen.

V křídovém hřbetu však je možno sledovati užší či širší pruhy, ostrovy spodních rudistových vápenců, nejen vápence svrchnorudistové, jak byly označeny dříve.

Ostrovy ty (zde i jinde) ukazují buď na detailní zvrásnění křídy — v tom případě však se neshoduje vždy zapadání obou křídových poloh — nebo na to, že spodní vápence tvoří n o v ý p ř í k r y v p ř e s v á p e n c e

*) Žádné ze jmenovaných jezírek, ač jsou stálá, není na mapě vyznačeno.



Náčrtek jižní čáry ostrova Krku, znázorňující schematicky rozšíření útvarů: 1. = spodní rudistové vápence (nejmladší šariáž), 2. = svrchní rudistové vápence, 3. = paleogen, odkrytý v tektonicko-erosivních oknech, 4. = hranice mladých náplavů, kryjících paleogen. — Měřítko asi 1 : 80.000. — Esquisse de la partie méridionale de l'île de Krk, indiquant en grands traits la distribution des formations: 1. = calcaires supérieurs à Rudistes dernière charriage; 2. = calcaires supérieurs à Rudistes, 3. = Paléogène affleurant dans le fenêtres tectoniques-érosives: 4. = limite des sediments plus recents recouvrant le Paléogène. — Environ en 1 : 80.000.

svrchnorudistové. Je tedy velmi pravděpodobno, že v našem území byly křídové příkryvy dva, položené na sobě.

Drobná bradla (ostrůvky) spodních rudistových vápenců ve svrchních, nesouhlasná často tektonicky, jsou právě příčinou, proč vznikal chaos v stratigrafii křídy, ano »nerozdělitelnost«. —

Při té příležitosti je nutno si všimnouti i brekcií, které, jak jsem ukázal, netvoří libovolné polohy, nýbrž dvojí rozhraní 1. spodních a svrchních vápenců křídových, 2. eocenu





Jezírko na křídovém hřbetu u Dolce kal na ostrově Krku. — Petit lac sur la chaîne Crétacée près de Dolce kal sur l'île de Krk.

Příčný zlom, jenž při pobřeží dává vznik jeskyním. Jižně od Malaluka, ostrov Krk. — Dislocation transversale, qui a produit la formation d'une grotte près de la côte. Au Sud de Malaluka, île de Krk.

a křídy. Je možno, že brekcie tyto jsou druhotně stmeleny na souši z úlomků, vzniklých při pohybu obou šariáží, jichž rozhraní dobře odpovídají.

ZÁVĚRY.

Stratigrafie. O stratigrafii pojednáno v dřívějších pracech detailně. Možno doplniti ji jen u flyše, jehož polohy nemají rozšíření regionálního, nýbrž přecházejí ve vrstvy petrologicky odlišné. Pozoruhodný je nález pískovců na Rábu s valouny v okolí neznámých sedimentů. Podloží eocenu, z něhož asi pocházejí, dnes neznáme. Křída je cizí. Jinak jak studie paleontologické tak i v terénu potvrzují stratigrafii, kterou jsme uvedli dříve i srovnáním s terciérem cizím, jež umožnily některé nálezy

zkamenělin vůdčích. Pouze u brekcií vyslovujeme možnost, že vznikly na souši; jejich stratigrafická rozloha odpovídá období obou šariáží. V přehledu jsou poměry tyto:

Recentien (ssuť, náplavy). Erose.

Pobřežní písky mořské ve výši až 75 *m* (oscilace moře).

Vznik zlomů směrných, později i příčných.

Šariáž, spodnorudistové vápence krasové, neživých barev.
Tektonické brekcie z vápenců spodnorudistových.

Šariáž, svrchnorudistové vápence krasové, jasné barvy.
Tektonické brekcie z materiálu svrchnorudistového.

Šariáž? (Pořad vrstev obrácený.)

Šariáž? (Pořad vrstev obrácený.)	Flyš. Lokálně možno ve facii slinité rozeznati:	svrchní flyš pískovce svatomichelské slinité vrstvy jurandvorské slíny a pískovce
	Erose patrná z valounů ve flyši na Loparu.	
	Vápence až pískovce nummulitové. Krasové vápence alveolinové.	

∾ Podloží neznámo. ∾

Tektonika. Tektonika vyžaduje změn, pokud jde o regionální její pojetí, jež nebylo z map menších oblastí možno odvoditi. Změna ta týká se v podstatě pouze poměru křídy a terciéru. Řada dokladů z různých ostrovů přesvědčuje, že křída tvoří příkryvy, z pod nichž eocen vystupuje jen v erosivních oknech. Blíže bylo o věci pojednáno v textu. Podle toho je třeba upraviti profil, uvedený v dřívější publikaci nejjižnější části ostrova Krku; ostatní poznatky (pokud přímo nesouvisí s předešlým) o detailní tektonice jsou v podstatě správné. Je to pochopitelno, neboť všechny popsané dislokace směrné i příčné jsou mladší než příkryvy. Dislokací starších bezpečně neznáme.

Dříve, kdy bylo nutno přiznati dvoje zvrásnění (předlutétienové a postpaleogenní), naplňovalo mne podivem, že nikde jsem nemohl zjistiti zlomy z doby prvého vrásnění. Dnes, kdy vidíme šariáže a posariážové zlomy, víme ovšem, že předlutétienové vrásnění neznáme a tím méně zlomy jím vzniklé.

Morfologie. Recentní tvar povrchu byl s dostatek popsán dříve. Poměry v ostatních krajinách jsou zcela analogické, pouze krasové zjevy uvnitř ostrova jsou ještě význačnější. —

Morfologický vývoj ostrovů v dobách geologických odpovídá představě šariáží v nejstarší známé době. Shledáváme se tu již s eocenem zvrásněným, na nějž teprve klade se křída. Přijmeme-li teorii šariážovou, nemáme v ů b e c v našem kraji dokladů pro vrásnění předlutétienové.

Eocen byl zvrásněn až po svém uložení a to nejspíše samostatně, jak svědčí jeho detailní mapa. Totéž vrásnění terciérní (snad další jeho fáze) vyvrcholilo v mohutné přesuny a to nejspíše dva či tři.

Je pravděpodobno, že a n i p a l e o g e n n e n í a u t o c h t o n n í. Nápadné je totiž to, že křída je přesunuta vždy přes nejspodnější jeho část (alveolinové vápence), že je v ž d y t e d y p ř e k o c e n a. Důkazů o jeho



Typ pastýřských staveb v osadách Matesi a okolí na ostrově Krku ve výši kolem 400 *m* na křídovém hřbetu. Budovány z křídových vápenců, kryty slamou. Stojí často na rozhraní obou křídových šariáží, kde detritus udržuje někdy trochu vody. — Type de bâtiments dans les villages de Matesi et environs, île de Krk, à environ 400 *m* sur la chaine Crétacée. Ils sont construits de calcaires Crétacés, recouverts de paille. Ils se trouvent souvent juste à la limite des deux charriages Crétacées, où dans les décombres on rencontre quelquefois un peu d'eau.

přesunutí však zde podati jinak nemohu, poněvadž není nikde odkryto jeho podloží. (O této možnosti budou moci podati vysvětlení studia v jiných krajích).

Zlomy, a to směrné a tím spíše příčné, jsou ještě mladší, patrně již na rozhraní neogenu a kvaterneru; dozvukem orogenese je kolísání moře, značené zjištěnými mořskými písky.

D a l š í ř e š e n í p o m ě r u k ř í d y a t e r c i é r u n e m o h o u p o d a t i d a l m a t s k é o s t r o v y. Nové mapy možno měřiti jen nepodstatně a také sousední kraje na severu, východě i jihu, pokud jsem je poznal z orientačních cest, nepodají asi základních změn. Hlavně spolehlivé mapy m í s t d n e s n e z n á m ý c h, o d k u d b y l y v r s t v y p ř i s u n u t y, mohou podati další detaily obrazu. Bude-li možno zjistiti spo-

lehlivě zapadání křídy, bude možno zakresliti příkryvy detailněji (detailní jejich vrásy a p.), což zatím nebylo dobře možno.

Přesuny dály se jistě od severovýchodu. Přes to však jsem přesvědčen o tom, že tlak pocházel od jihozápadu, jak uvedl jsem dříve (Kober!). Že místa ta byla odlehlá svědčí i to, že nenalezneme nejmenší stopy vyvřeliny na ostrovech. Kdyby vrstvy byly autochtonní, byly by tam asi provázely vrásnění.



Drobné erosivní jehlance v píscích, pod oblázky. Baščanská zátoka. — Petits sillons érosifs dans les sables, au-dessous des graviers. Baie de Baška.

Morfologický vývoj v mladších dobách popříkrovových je analogický tomu, jenž byl dříve popsán. Je to nejprve posthumní vrásnění směrné i příčné, které ohýbá a láme vrstvy. Od té doby a to až dodnes (mimo dočasné kolísání moře, representované mořskými písky, jež jsem zjistil na souši) je to v podstatě pochod erose.

O tektonických poměrech pojednáno podrobněji ve sborníku I. sjezdu slovanských geografů v Praze 1924, na podkladě tehdejší přednášky »Poznámky ke geologii Dinarid«, upravené vzhledem k regionální geologii podle letošních studií. Tam bude přihlédnuto i k práci F. Kocha, jež se týká poměrně nedalekého Vinodolu*) a jež vykládá na př. výskyt

*) F. Koch, Geotektonische Beobachtungen in Alpino-Dinarischen Grenzgebiete. (Recueil de travaux offert à M. J. Cvijić, Beograd 1924.)

křídy na Driveniku mezi eocenem jako malou hrásť. Jeho profil převzal do své učebnice Morfologie**) i J. Cvijić, upraviv však v něm tento výskyt jako zjev vyčnívající antiklinály. Je přirozeno, že analogicky k našim poměrům vysvětlíme jej správně jako křídové b r a d l o na eocenu a rovněž ostatní křídu jako příkryvy.

Vinodol sám odpovídá erosivnímu oknu (paleogen zpod příkryvů křídových), danému podobně jako na př. baščanské údolí na Krku směrnými zlomy. Autor se zmiňuje správně i o zlomech příčných, viditelných morfologicky (tok vod a p.). Nekreslí jich sice, ale směr vod, jež uvádí, odpovídá směru zlomů příčných na Krku a Rábu.

Podrobnější srovnání je nemožno, poněvadž publikace Kochova je jen velkorysá. Jeho »Nummulitenkalk« odpovídá našemu vápenci alveolinovému + nummulitovému, pokud do geologie patří. Flyš dále nerozděluje; také křídu kreslí dohromady. (Detailní zpracování stratigrafie a morfologie, pokud do geologie patří, v jiných krajích nedovoluje srovnání, poněvadž jde o krajiny přespříliš vzdálené; D a n e š, K e r n e r atd.)

Mapa. Mimo detailní zpracování a srovnání s mapami staršími dlužno vytknouti, že rozšíření útvarů neodpovídá vždy těmto starším představám, jak patrno ze srovnání s mapou W a a g e n o v o u. Největší rozdíly (a to někdy základní) jsou v místech těžko přístupných, jimž věnoval jsem větší pozornost, poněvadž mají větší význam než přesné ohraničení ssuti a pod. —

L i t e r a t u r a byla uvedena v citované práci »Geologické studie v severní Adrii«. Publikace vyšlé od té doby týkají se kvarnerských ostrovů nejvýše nepřímo (L ó c z y, Studie v Srbsku, K a t z e r, Geologie Bosny a Hercegoviny, nebo pojednání G i r o m e t t y ve Sborníku sjezdu dalmatských inženýrů ve Splitu, opírající se zřejmě o S c h u b e r t o v u knihu o Dalmacii.

V profilech není přihlíženo k detailní tektonice pošariážové, pokud není zvlášť důležitá.

Geologický ústav Karlovy university v Praze.

**) J. Cvijić, Morphologie terrestre I. Beograd 1924.

Résumé:

Nouvelles Etudes en Yougoslavie.

Supplément à la publication: Etudes Géologiques dans la Région Adriatique Septentrionale.*)

Par *Otakar Matoušek,* Prague.

Cette publication est un précis des observations nouvelles de l'auteur faites sur les îles de Veglia (Krk), de Ráb (Arbe) et ses environs. Elle s'occupe surtout des problèmes des nappes de recouvrement.

I. L'île de Prvić (Pervicchio).

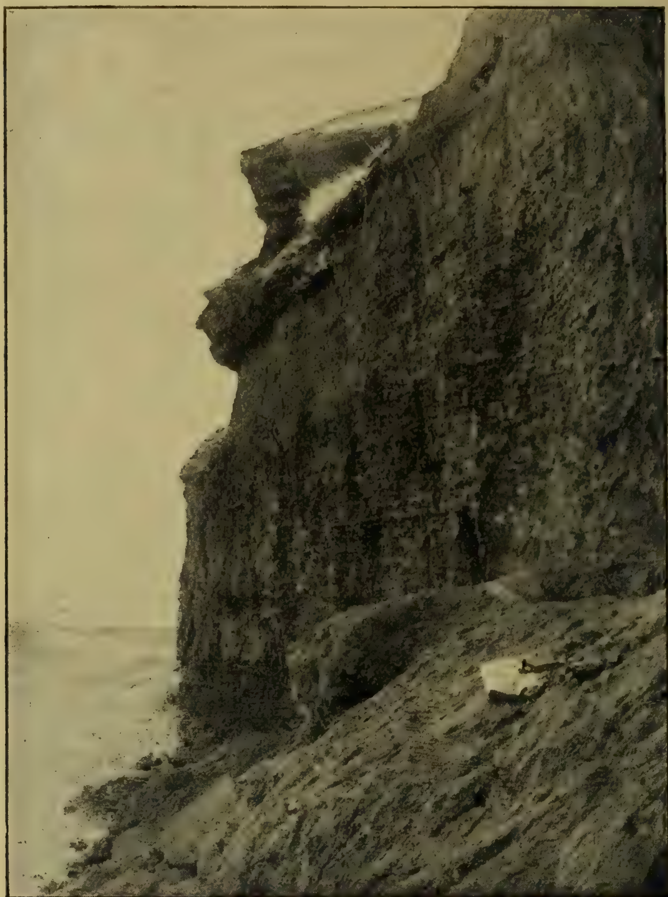
L'île de Prvić située entre Krk (Veglia) et Ráb (Arbe) dans la partie septentrionale de l'Adrie, a été considérée jusqu'à présent comme composée uniquement du Crétacé supérieur à rudistes, et sur la côte occidentale aussi de son mur de calcaires infériuers à rudistes.

En 1922 j'ai déterminé un état de choses assez différent. Maintenant j'ai fait une carte géologique des autres parties de l'île et j'y ai trouvé: calcaire à rudistes inférieur, s'étendant à travers l'île du Nord jusqu'à Pta Silo et bordé des deux côtés de calcaires à rudistes supérieurs. Sur la côte occidentale le Paléogène, couches alvéoliniques, nummulitiques et flych (grès et marnes) affleurent au mur des calcaires à rudistes supérieurs. Le cap de Pta Gnivica est recouvert de sables d'une puissance d'environ de 10 mètres, que je considère comme sédiment littoral marin et comme preuve d'une oscillation de l'Adrie après la période orogénique (peut être Pleistocène). L'île de Gnivica est formée de calcaires alvéoliniques. Sur sa côte orientale qui est la continuation de la vallée de Baška (Besca Nuova) de Krk, il n'y a pas de traces du Paléogène. Là le Crétacé est incliná dans une direction *h* 11, tout au Nord vers le Sudouest (vers l'intérieur de l'île), mais un peu plus loin, au Sud

*) Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles à Prague, 1924. (Voir aussi pour la litérature.)

du Val Veliboče vers le Nordest, vers la mer, et cette direction se trouve dans tout de reste de l'île. Sur la côte Sudest l'inclination est encore vers l'île (vers le Nordest, le Paléogène ayant la même inclination).

Il y a beaucoup des failles longitudinales et surtout des failles transversales (*h* 2 et 4). Elles sont visibles dans la morphologie et dans la



Mořské písky, důkaz kolísání moře. Baščanská zátoka na Krku. — Sables marins, indiquant une oscillation de la mer. Baie de Baška, île de Krk.

surélévation des différents massifs du Paléogène, ailleurs du Crétacé (visible de loin à Pta Silo etc.).

La Paléogène plonge sous le Crétacé à rudistes supérieur qui le recouvre. En ce que concerne le Crétacé à rudistes inférieur, l'inclinaison des couches est souvent difficile à déterminer dans le terrain

karstique comme aussi ses relations avec les calcaires à rudistes supérieurs. Mais tout-de-même on les peut expliquer le mieux comme une seconde nappe nageant sur les couches plus recentes du Crétacé à rudistes supérieur.

La surélévation du Crétacé au-dessus du Paléogène est bien visible directement de loin (de la mer). Une explication sans nappes de recouvrement est d'ailleurs presque impossible: il faudrait expliquer tout de l'Eocène jusqu'au Crétacé inférieur comme un massif renversé ou bien il faudrait admettre que chacune des couches soit séparée par des dislocations transversales, ce qui ne correspond pas à la réalité. En tenant compte des conditions semblables en autres endroits il faut reconnaître que l'Eocène est plissé à lui seul et que après seulement le Crétacé a été surélevé au-dessus de l'Eocène et cela probablement en deux nappes.

2. L'île de S. Grgur (Gregorio).

D'après les cartes anciennes l'île de Grgur au Nord de celle de Ráb est formée de couches Crétacées où il était impossible de distinguer entre un terme inférieur et supérieur (comme ailleurs) des calcaires à rudistes. Sur la côte Sudouest l'Eocène est développé au toit du Crétacé comme calcaires alveoliniques-nummulitiques.

Au cours de mes études de cette année j'ai rencontré un état de chose différent.

Sur la côte Sudouest l'Eocène est vraiment développé comme calcaires alveoliniques et nummulitiques, mais aussi comme flych, et il s'étend beaucoup plus vers le Nord presque jusqu'à Pta Plitvac. En outre j'ai trouvé que la côte Nordest est elle-aussi bordée de Paléogène développé comme couches alveoliniques.

Ces deux couches sont recouvertes du Crétacé à rudistes supérieur typique, dans lequel on peut par endroit suivre tout distinctement une inclinaison vers la Sudouest grace aux couches rouges intercallées dans les couches blanches.

L'intérieur de l'île est en partie formé du Crétacé à rudistes inférieur, d'un gris foncé (tandis que le Crétacé supérieur est d'une couleur claire) Ainsi par ex. au fond de la baie de V. Badnja on le peut bien distinguer. Tandis que le calcaire à rudistes supérieur forme une nappe au-dessus du Paléogène, affleurant seulement dans la coupe littorale, le Crétacé à rudistes inférieur est à son tour surélevé au-dessus du Crétacé supérieur et forme des lambeaux dans son toit. Ces lambeaux sont quelquefois isolés de manière que dans le terrain karstique, où il est difficile à déterminer les couches, ils obscurcissent l'image géologique par leur intercallation entre les couches à ru-

distes supérieures. A la différence de l'île de Prvić sans végétation, l'île de S. Grgur est assez couverte. Il semble que ce n'est pas dû au sous-sol géologique, mais surtout à l'influence du vent. Il y a des nombreuses dislocations, visible surtout près de la côte (*h* 4). Le cours du petit ruisseau entre Trt. Travizza et Trt. Smokova correspond aux dislocations longitudinales.

L'île de Goli.

Elle est située au Sudest de l'île de S. Grgur, dont elle est la continuation dans la direction des couches. Jusqu'à présent elle a été considérée comme formée entièrement de calcaires Crétacées, sans distinction plus détaillés. Au cours de mes nouvelles études j'ai trouvé:

On peut distinguer dans le Crétacés deux termes comme ailleurs selon leur couleur. Seul le fait que le Crétacé à rudistes inférieur foncé forme des lambeaux irreguliers et non une zone continue correspondant exactement au parcours des couches peut être avait jusqu'à présent obscurci la structure.

Le Crétacé est de nouveau développé très distinctement. Nous rencontrons surtout son facies blanc. Dans l'extrémité Nordouest de l'île, environ $^1/_2$ *km* de la côte (Domolo) on l'exploite même dans une carrière (d'environ 3 *m* en profondeur) comme très beau marmor blanc. Les seules difficultés de l'exploitation sont le transport (et peut-être aussi sa désagrégation le long des diaclases).

En outre j'ai trouvé sur la côte occidentale le Paléogène comme calcaire alveolinique. Il affleure deux fois dans le cap à V. Melna et sur le côte septentrional du Val Tatinia, là par dislocation.

L'île de Goli est aussi sans végétation. Sa forme est intéressante, caractéristique pour cette région: Elle s'élève lentement de la mer du Sudouest et atteint son point culminant (Goli 230 *m*) se dressant en pente abrupte au-dessus de la mer au Nordest. Se qui correspond bien à la pression venant probablement du Sudouest.

Pour determiner la structure tectonique, il y a trop peu d'affleurements, pour qu'on puisse determiner les relations entre les couches Crétacées et Eocènes. En analogie je crois qu'il y a encore deux nappes Crétacées venant du Nordest.

La partie septentrionale de l'île de Ráb (Arbe).

En somme les conditions géologiques du Nord de l'île de Ráb sont comme elles ont été décrites par M. Waagen. Seulement le Crétacé, dans lequel il ne distingue pas entre le terme inférieur et supérieur, peut être de nouveau divisé en deux zones.

La peninsule de Loparo est peu élevée et formée entièrement de flych. La nappe Crétacée n'y est pas développée. Il y a quelques faits dynamiques intéressants, surtout en proximité de la côte. A côté des aeroxystes il y a des pyramides de terre environ 3 *m*



Mapka sev. části ostrova Rábu. 1. = Spodní rudistové vápence, 2. = svrchní rudistové vápence, 3. = alvelinové vápence, 4. = nummulitové písčité vápence, 5. = flyš (hl. pískovce), 6. = recentien. — Carte de la partie septentrionale de l'île de Ráb. 1. = Calcaire inférieur à rudistes, 2. = calcaire supérieur à rudistes, 3. = calcaire à sableux à nummulites, 5. = flych (surtout grès), 6. = alluvions.

de hauter (»demoiselles non coiffées«) dans les sables littoraux, et des temoins:

Ils sont formée par des grès désagrégés, couverts de buissons. La désagrégation se fait presque en vertical et ainsi des colonnes, des tables d'environ de 2 *m* de hauteur sont conservées sous les buissons. Les environs de Pta Stola p. ex. sont formés presque entiérement par des tels temoins.

Au point de vue stratigraphique on trouve par endroits des couches à nummullites etc. Bien remarquables sont les grès enfermant des cailloux gros comme un po'ng, de roches actuellement tout-à-fait inconnues dans ces régions. C'est un phénomène de l'abrasion croissante de la mer, qui a nivelé les élévations du mur. Ce mur n'ètait pas le Crétacé que nous connaissons ici, mais des couches autrement inconnues: Le Crétacé n'a été surélevé que secondairement.

L'inclinaison des couches est toujours dirigée vers l'intérieur de l'île, vers le Sudouest sous un petit angle (environ 10). Mais sur le côté Ouest de la peninsule de Loparo, p. ex. près du village de Gusović et dans ses environs nous rencontrons ces couches redressées presque verticalement et même inclinées vers le Nordest. Le changement est tellement abrupt et visible dans la morphologie, qu'on ne neut pas douter du parcours d'une dislocation longitudinale. Au-dessous de 35 *m* tout est cependant recouvert par des formations recentes.

Regardons maintenant la chaîne de montagnes Crétacée. Elle est bordée des deux côtés du Paléogène. A l'Est l'inclinaison est la même que celle du flych sur Loparo, c'est-à-dire vers le Nordest. Il commence beaucoup plus au Sud qu'on ne l'indiquait autrefois et entoure assurément le baie de V. Cernica avec des couches nummulitiques et alveoliniques, plus au Sud avec des couches alveoliniques tout seules. Il y a des dislocations transversales. Le flych n'est rencontré que rarement, comme il est recouvert de sables et d'éluvions recents. Le Crétacée à rudistes supérieur est surélevé au-dessus de l'Eocène, comme on peut voir p. ex. à Val Viselica. Il est encore d'un développement typique. Au-dessus nous rencontrons de nouveau le Crétacé à rudistes inférieur. La vallée offre une belle coupe et on peut déjà distinguer les deux formations d'après leur charactère petrologique (couleur etc.).

Nous rencontrons des conditions analogiues sur le côté occidentale de la chaîne de montagnes, dans la vallée de M. Sovigna etc. L'île de Sc. Maman et ses environs sont de nouveau formés de couches Eocènes.

En somme nous voyons de nouveau que le Paléogène ne se trouve que dans les altitudes moins élevées, dans des fenêtres, tandis que dans son toit il y a deux nappes Crétacées non continues, s'étendant de l'île de S. Grgur.

La partie méridionale de l'île de Krk (Veglia), partie occidentale.

Des nouvelles études pourront determiner exactement la géologie de cette région. Il n'y a point un simple anticlinal de couches à rudistes supérieures, dont le noyau est formé par les couches à rudistes inférieu-

res et dont les deux flancs sont recouverts dans les vallées par l'Eocène. La structure est à peu près la suivante: La zone des calcaires à rudistes inférieurs est plus large. Dans un sillon érosive, formé par un ruisseau se jetant dans la mer, le mur affleure, formé (des deux côtés) du calcaire à rudistes supérieur et sans doute par les couches alveoliniques et nummulitiques inférieures. C'est aux environs du Val Braciol. Ces affleurement assez étendus n'avaient été point connus avant.





Alveolinový povrch krasový. Val Koinska, ostrov Krk. — Karst sur calcaires à alvéolines. Val Koinska, île de Krk.

Morfologicky patrný směrný zlom v křídě, jedna z dislokací, jež podmínily dnešní deprese erosí vyhloubené v údolí (zde baščanské). Vých. od Veli vrh (541 *m*) na Krku. — Dislocation longitudinale dans le Crétacé s'accentenant dans la morphologie. C'est une des dislocations auquelles est due la dépression de la vallée de Bašča, aujourd'hui approfondie par l'érosion. A l'Est du Veli vrh (541 *m*), île de Krk.

Puis le Paléogène commence déjà à peu près à Pta Mezzo-Ponetto. Au Nord de la côte 60 à Pta Cernika se trouve un affleurement isolé du Crétacé, »nageant« comme lambeau sur le Paléogène. Aux environs de Stará Baška (Besca vecchia) il y a beaucoup de brèche (recent) recouvrant l'Eocène. Le Paléogène entre Ravno čelo et Pta Cernika est traversé par une dislocation longitudinale, qui s'accentue dans l'inclinaison des couches. Cette dislocation se continue dans la mer et nous la rencontrons de nouveau à V. Operna, d'où elle semble suivre la vallée de Trt Stoklin peut-être vers V. de Sus.

Plus loin, au Nord de Stará Baška les couches sont traversées par des dislocations transversales de manière que près de la route nous rencontrons le plus souvent des calcaires alveoliniques, mais aussi des massifs isolés du Crétacé. Plus en bas vers la mer nous trouvons des calcaires nummulitiques et par endroits aussi le flych. A l'Est d'Orlevica dans la dépression remplie de Paléogène (presque entièrement recouvert de formations recentes le Crétacé) forme une sorte de bandes et de lambeaux au mur desquels on peut quelquefois observer l'Eocène.

Très interéssant sont les détails de la structure sur le cap bordant V. Operna. Mais ici l'Eocène se termine; il y a des failles et suréléva-



Těžko přístupné východní pobřeží Krku jižně od Val Butni. Budováno je v podstatě křídou, nikoliv paleogenem, jak dříve znázorňováno. Patrny menší dislokace. — Côte orientale de Krk très difficile d'accès au Sud du Val Butni. Elle est surtout formée du Crétacé, et non du Paléogène comme on l'a cru auparavant. Petites dislocations.

tions les schistes; forment ici aussi une belle guirlande. La vallée de Trt Stoklin indiquée comme Eocène sur les cartes anciennes, est située dans le Crétacé. Exception faite de quelques blocs de décomposition isolés, il n'y pas de traces du Paléogène.

Nous rencontrons le Paléogène au Sud de Kuka. C'est une fenêtre tout-à-fait isolée dans le Crétacé, affleurant grace à l'érosion, donc située à une altitude inférieure que ses environs. Cette fenêtre n'a point de contact avec la mer. Ce Paléogène est représenté non seulement par les calcaires nummulitiques et alveoliniques, comme indiqué sur la carte de M. Waagen, mais aussi par le flych dans lequel il y a même un petit lac.

Enfin il faut mentionner que le calcaire à rudistes inférieur au centre de la croupe de montagnes ne représente pas une bande continue, mais seulement une zone irrégulière avec un nombre de lambeaux de deux côtés. Ce sont les traces d'une deuxième charriage. (La premiere

charriage cause la surélévation du Crétacé à Rudistes supérieur au-dessus du Paléogène).

La vallée de Baška (Besca Nuova) et le centre intérieur de l'île de Krk (Veglia).

J'ai déjà parlé de la partie méridionale de cette vallée aux environs de Nová Baška (Besca Nuova) dans mes publications antérieures. Seulement je voudrais donner quelques détails, observés dans l'affleurement de la fenêtre Paléogène.

En outre il faut mentionner que le Paléogène même avec le massif de flych ne se termine que près de Pta Skulica, au Sudest de la montagne



V předu a v levo kras vápenců alveolinových, v pozadí křídový hřbet ze svrchních rudistových vápenců, na němž je ze střídání bílých a červenavých vrstev možno pozorovati směr vrstev (na hlavu postavených). Záp. od Val Vrženica na ostrově Krku. — Au premier plan et à gauche karst sur calcaires à alvéolines, au fond chaîne Crétacée des calcaires supérieures à Rudistes. L'alternation de couches blanches et rougeâtres y montre la direction des couches (renversées). A l'Ouest du Val Vrženica, île de Krk.

Pago. Il est remarquable qu'il y a un bel affleurement de la surélévation du Crétacé au-dessus du Paléogène qui en outre est recouvert (en outre des brèches de décombre) aussi par des sables marins comme nous en avons vu sur Prvić et plus au Nord près de St. Cosmo.

Le Paléogène rempli toute la vallée jusqu'à l'intérieur de l'île. Dans sa partie méridionale (à peu près de Draga-Bescavalle) elle est naturellement recouverte par les alluvions du ruisseau. Sa structure tectoniques est très compliqué. Dans la coupe p. ex. sur la route de Batomalj à l'Ouest de Stará Baška on peut voit que le Paléogène est recouvert par le Crétacé à une altitude d'environ 210 *m*, mais à 280 *m* les calvaires alveoliniques apparaissent de nouveau, recouverts définitivement à 310 *m*. La répétition des couches est produite par une dislocation longitudinale, naturellement plus recente que le charriage.

En ce qui regarde l'inclination du Paléogène, j'ai déjà démonstré qu'il forme aux environs de Baška une anticlinal éffondrée. Plus au Nord la structure est plus compliquée: p. ex. au Nordouest de Draga (Bescavalle) et à Sv. Juraj les couches nummulitiques forment une sorte de lambeau recouvrant le flych et par endroits de manière qu'il n'affleure point. (Les affleurements indiquées dans la carte plus ancienne n'existent pas en réalité ici.) Mais nous en rencontrons au mur de ces couches à une altitude considérable, p. ex. au-dessous de la hateur du Vel. Vrch à une altitude de presque 300 *m*. L'inclinaison des couches nous montre que le Paléogène est plissé indépendemment du Crétacé. Il forme des faibles plis, pliés en détail et disloqués par des failles. Nous observons donc selon l'endroit ou une synclinale, ou une anticlinale etc.

Sur le côtedroit de la route et surtout aux environs de Draga le Paléogène est recouvert de brêches recentes. Des alluvions du ruisseau s'élèvent des hauteurs isolées grace aux conditions tectoniques (faillées ou disloquées) en partie aussi pour des causes morphologiques. Ainsi p. ex. près de l'église Sv. Michal de Baška et l'affleurement fort raide sur le ruisseau de Vela Řeka (Trt. della Fiumera à l'Ouest de Draga) flych au-dessus duquel un petit massif de couches nummulitiques a été surélevé à l'Est).

Très remarquables sont surtout quelques hauteurs recouvertes de petites coiffes de Crétacé. Ainsi sur la hauteur portant la chapelle de Majka Boží (au Nord de Batomalj) et formée de flych et plus en haut aussi des calcaires nummulitiques et alveoliniques, il y a une nappe Crétacé entièrement isolée des environs. C'est un indice en faveur de la théorie des nappes de recouvrement. (Entre Majka Boží et la croupe Crétacée proprement dite une dislocation longitudinale parcourt.)

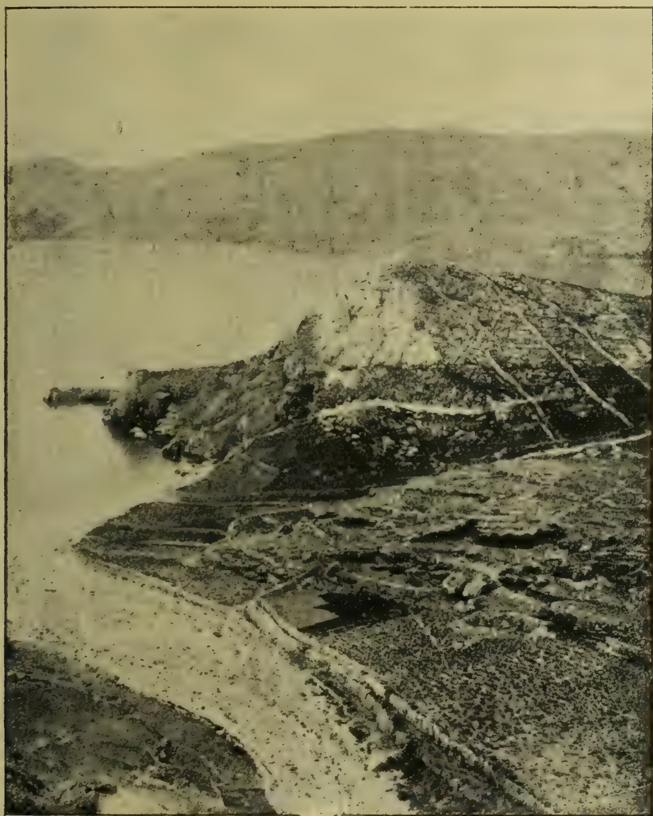
Une coiffe Crétacé tout analogue se trouve plus au Sud (juste au Sud de Batomalj) sur une hauteur formée de Paléogène Près de Gorizza il y a encore une île remarquable du Crétacé recouvrant le massif Paléogène. Ces deux affleurements (le deux dernières inconnues jusqu'à présent) sont donc des affleurement des surélévations Crétacées.

Tout le Paléogène à l'intérieur de l'île forme donc une grande fenêtre tectonique et d'érosion. Une telle fenêtre est naturellement aussi le massif Paléogène (séparé du reste du Paléogène, donc non comme représenté sur les cartes plus anciennes) à Buncula (Monza) Luka.

Des dislocations longitudinale et surtout beaucoup de dislocations transversales (*h* 4 et 2) sont bien visible dans les croupes des montagnes. Elles sont toutes plus jeunes que le charriage.

La partie orientale de l'île de Krk (Veglia) au Sud de Vrbnik.

Nous y trouvons des conditions tout analogues à celles dans les autres parties de l'île. Au-dessus du Paléogène le Crétacé à rudistes supérieur a été surélevé et au-dessus de lui de nouveau le Crétacé à rudistes inférieur conservé seulement en lambeaux. Comme la région karstique est difficile d'accès quelques lambeaux ne sont pas indiqués dans la carte de M. Waagen.



Bílá křídová kra, přesunutá (šariáž) přes paleogen v Monza Luka na ostrově Krku. Vpředu recentní brekcie, kryjící paleogen. — Massif de Crétacé blanc charrié sur le Paléogène à Monza Luka, île de Krk. Au premier plan brèche recente recouvrant le Paléogène.

Ainsi nous trouvons le Crétacé à rudistes inférieur en îles isolées presque partout au centre de la croupe, non seulement sur la côte méridionale comme indiqué. A l'Est de la dépression de »Dolce kal«

p. ex. il y a leur limite. Remarquables sont les petits lacs dans la terre rouge de décomposition. Nous trouvons des lacs analogues à l'Est de Podprodanje à 300 *m* de nouveau dans les couches du Crétacé à rudistes inférieur. Le Paléogène que M. Waagen représente sur la côte comme bande large n'est développé que comme bande tout étroite, tout près de la mer. Mais il se répète grace à une dislocation comme zone étroite dans une altitude de 200 *m*. Mais c'est aussi seulement le Crétacé qui forme quelques parties de la côte.

Au mur du calcaire dans le Val Butni la mer fait affleurer des lignites. C'est un indice que le flych (marnes) renfermant les lignites se trouve au mur. On exploite les lignites p. ex. vis-à-vis de la montagne Kricanavska glavica. La côte orientale est d'un accès très difficile. Dans le Crétacé nous rencontrons beaucoup des lacs karstiques (»Plani dolac« sur la carte etc.).

Enfin nous avons à dire que la péninsule de Rebica à l'Est de Vela Luka est formée de couches alveoliniques et aussi nummulitiques (sur la côte de Vela Luka). Sur sa côté orientale à Pta Sokol est formée par le Crétacé typique, et non l'Eocène comme le montre la carte de M. Waagen.

*

Note additionelle: Il faut encore dire que sur les îles étudiées (mais sur l'île de Krk en plus grande mésure seulement aux environs de Negrito et Star Baška, et rarement sur l'île de Prvić) on a exploité du beauxit. On le rencontre surtout dans les couches plus élevées des calcaires supérieurs à rudistes. —

Les failles locales plus jeunes que les charriages ne sont pas indiqués à l'exception de quelques uns Idealisé.

Conclusions.

Stratigraphie.

Récentien (décombres, alluvions etc.), érosion.

Sables marins littoraux jusqu'à environ 75 *m* (oscillation de la mer),

---

plus tard des failles transversales.
Formations de failles longitudinales,

Charriage, crétacé à rudistes inférieur, le plus souvent calcaire karstique gris-foncé.
Brèche tectonique de matériaux à rudistes inférieurs.

Charriage, crétacé à rudistes supérieur, blanc ou rose clair, calcaire karstique.

Profil severní části ostrova Rábu. Paleogen (alvelinové, nummulitové vrstvy a flyš) kryty svrchní rudistovou křídou, nad níž je pak spodní křída rudistová; recentien. — Coupe à travers la partie septentrionale de l'île de Ráb. Le Paléogène couches à alvéolines, à nummulites et flych) recouvert du Crétacé a rudistes superieur, puis au toit le Crétacé à rudistes inférieur et formationsrecentes.

Profil severní části ostrova Rábu. Paleogen (alvelinové, nummulitové vrstvy) s dvěma příkryvy křídovými. — Coupe à travers la partie occidentale de l'îlede Krk de Pta Cernika à Majka Boží. Le Paléogène est recouvert par deux nappes Crétacées.

Profil východní části ostrova Krku od Bašky k Vela Luce. Paleogen, nad ním dvě šariáže křídové (svrchní a spodní rudistové vápence). Holocenní náplavy. — Coupe à travers la partie orientale de l'île de Krk, de Baška à Vala Luka. Au-dessus du Paléogène deux nappes Crétacées (calcaires supérieurs et inférieurs à rudistes). Alluvions recents.

Brèche tectonique surtout de matériaux fins à rudistes supérieurs (autrefois considérée par moi comme »Londinien«).

Charriage? (Toujours renversée.)	Flych; par endroits on peut distinguer (dans le facies marneux)	flych supérieur, grès de Sv. Michal, couches marneuxes de Jurandvor, marnes et grès,
	(Erosion par endroits indiquée par des galets dans le flych à Ráb).	
	Calcaires et grès à nummulites. Calcaires alvéoliniques karstiques.	

~ Mur inconnu. ~

Développement tectonique-morphologique.

Visiblement le Paléogène a été plissé pendant le Néogène et le plissement culminait en probablement deux surélévations Crétacées. Peut-être même le Paléogène n'est pas autochthon. Les schistes sont toujours renversés, le mur du Crétacée sont toujours les calcaires alvéoliniques, jamais le flych. On ne saurait resoudre ce problème que dans les régions situées plus au Nordest, d'où les charriages sont venues et où on peut connaître le mur du Paléogène. (En outre je crois que la pression venait du Sudouest.)

Dans le karst il n'est pas toujours possible de déterminer avec exactitude l'inclinaison des couches. Ainsi pour le moment je n'indique les nappes que tout schématiquement sans plis de détail etc.

Le Paléogène affleurs dans des fenêtres erosives et surtout grace à des dislocations longitudinales plus récentes que les charriages.

Ces dislocations (et aussi les dislocations transversales plus récentes) sont visiblement la dernière phase des mouvements orogéniques. Leur fin est probablement indiqué par l'oscillation de la mer (sables marins jusqu'à 75 *m*).

Une étude spéciale sera consacré à la tectonique régionale.

En différence à mes premiers travaux j'accepte maintenant la theorie de recouvrement, dont les indices sont indisputables. A cet égard il faut mentionner des travaux antérieurs: Ce que nous avons dit de la structure est en somme juste, mais seulement pour les détails, causés après le charriage.

En ce respect il faudra aussi corriger quelques travaux d'autres auteurs dan cette région, p. ex. de M. Koch sur le Vinodol (en 1924) (nappe Créacé à Drivenik expliqué comme horst etc.).

Pour un plissement prélutétien il n'y a pas des indices dans la région qui fait l'objet de mes études.

L'institut Géologique de l'Université Charles à Prague (Tchécoslovaquie).

OBSAH.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 38.

Publications de l'Institut astronomique (prof. W. Heinrich) de l'Université Charles de Prague. Série II. nro. 6. 1925.

Výpočet dráhy nových planet 1015 a 1924 (SA).

R. N. C. EMIL BUCHAR.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 38.

Publications de l'Institut astronomique (prof. W. Heinrich) de l'Université Charles de Prague. Série II. nro. 6. 1925.

Výpočet dráhy nových planet 1015 a 1924 (SA).

R. N. C. EMIL BUCHAR.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Publications de l'Institut astronomique (prof. W. Heinrich) de l'Université Charles de Prague. Série II. nro. 6. 1925.

Výpočet dráhy nových planet 1015 a 1924 (SA).

R. N. C. *Emil Buchar.*

V následujícím podán jest výpočet dráhy dvou nových planet, při čemž použito obvyklých metod; udány jsou pouze numerické výsledky. Materiál, na němž výpočty spočívají, předal mi laskavě Dr. G. Stracke, observator počtářského ústavu v Berlíně.

1. Planeta 1015 (1924 QF).

Byla objevena 31. ledna 1924 jako slabý objekt 13^m Reinmuthem v Heidelbergu. Nejdříve vypočetl jsem přibližnou dráhu následující:

Epocha: březen 8.5 S. Č. G. 1924.

M_0	108° 5′2	
ω	269 13.3	1924 0
Ω	121 41.8	1924 0
i	9 25.1	1924 0
φ	6 44.6	
μ	621″9	
log a	0.5042	

Ze všech měření vybrána byla některá příznivě rozložená, jež jsou základem, po případě kontrolou výpočtu:

Dat.		Stř. čas	α	δ	Pozorovatel
Leden	31	$13^h 18^m 36^s$ Heid.	$10^h 19^m 25^s 32$	+ 16° 4′ 30″5	Reinmuth
únor	8	11 22 42 „	10 14 6.30	+ 16 55 22.6	„
„	23	9 52 6 Vídeň	10 3 3.05	+ 18 27 9.2	Palisa
březen	8	9 17 29 Heid.	9 53 16.79	+ 19 37 3 4	Mündler
„	27	10 8 46 „	9 44 19.94	+ 20 31 42.0	„
duben	5	10 7 33 Vídeň	9 42 31.65	+ 20 40 17.6	Palisa
„	12	9 58 27 „	9 42 14.78	+ 20 40 4.2	„

Pozorování heidelbergská vztažena jsou na aeq. 1924.0, vídeňská jsou »locus apparens«. Na základě přibližné znalosti elementů vzat ohled na parallaxu, takže měření, jež jsou základem výpočtu, jsou následující:

		$\alpha_{1924 \cdot 0}$	$\delta_{1924 \cdot 0}$
leden	31.53036 S. Č. G.	$10^h\ 19^m\ 25^s\ 30$	$+16^\circ\ 4'\ 32''\ 5$
březen	8.36292 S. Č. G.	$9^h\ 53^m\ 16^s\ 72$	$+19^\circ\ 37'\ 5''\ 3$
duben	12.37021 S. Č. G.	$9^h\ 42^m\ 14^s\ 00$	$+20^\circ\ 40'\ 12''\ 7$

Data, k výpočtu potřebná, jsou:

Dat.		$\lambda_{1924 \cdot 0}$	$\beta_{1924 \cdot 0}$	$L_{1924 \cdot 0}$	$\log R$
leden	31.53036 S. Č. G.	$150^\circ\ 52'\ 9''\ 0$	$+5^\circ\ 15'\ 13''\ 0$	$130^\circ\ 54'\ 1''\ 0$	9.9935796
březen	8.36292 S. Č. G.	$143^\circ\ 45'\ 51''\ 3$	$+6^\circ\ 22'\ 57''\ 1$	$168^\circ\ 1'\ 39''\ 2$	9.9969847
duben	12.37021 S. Č. G.	$140^\circ\ 57'\ 5''\ 1$	$+6^\circ\ 30'\ 12''\ 7$	$202^\circ\ 40'\ 12''\ 5$	0.0012743

při čemž vzat ohled též na šířku Slunce.

Výsledkem jsou elementy [1]):

Epocha: březen 8.5 S. Č. G. 1924.

M_0	$109^\circ\ 58'\ 35''\ 7$	
ω	268 3 45. 3	1924 0
Ω	121 40 5 3	1924 0
i	9 24 35. 7	1924 0
φ	6 25 59. 6	
μ	$622''.403$	
$\log a$	0 503957	

Toto řešení bylo jednoznačné. Heliocentrické ekvatoreální souřadnice zní:

$$\left.\begin{aligned} x &= [9.9957540]\, r \sin\, (120^\circ\ 4'\ 43''\ 0 + v) \\ y &= [9.9774848]\, r \sin\, (\ 32^\circ\ 44'\ 26''\ 7 + v) \\ z &= [9.5356744]\, r \sin\, (\ \ 7^\circ\ 28'\ \ 9''\ 9 + v) \end{aligned}\right\}\ 1924.0$$

Mezitím došlo další měření z Vídně:

	α	δ	
duben 23, $8^h\ 53^m\ 36^s$ S. Č. Vídeň	$9^h\ 43^m\ 46^s\ 46$	$+20^\circ\ 28'\ 19''\ 9$	(loc. app.)

Elementy hoví měřením následovně (ve smyslu naměřeno — vypočteno):

[1]) Astr. Nachrichten, Bd. 223, p. 207.

			$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$	
Leden	31	Heidelb.	$0^s 00$	0.0	
únor	8	„	+ 0. 22	— 1.2	
„	23	Vídeň	+ 0. 01	— 2.2	
březen	8	Heidelb.	0. 00	0 0	$(O-C)$
„	27	„	- 0. 07	+ 1.8	
duben	5	Vídeň	+ 0. 37	— 0.8	
„	12	„	0. 00	0.0	
„	23	„	— 0. 27	— 7.3	

(Redukováno vůči parallaxe, planet. aberraci atd.) Odchylky, vyjma poslední, leží v mezích pozorovacích chyb.

Data fotometrická.

K disposici je celkem 6 údajů, z nichž vypočtena pomocná veličina g, jakož i střední velikost v oposici m_0.

Dat.	31 I.	8. II	11. II.	23 II.	1. III	7. III
m	13.2	13.1	13.0	13 0	13.4	13.2
g	8.73	8 64	8.54	8.53	8 89	8.66

Nejpravděpodobnější hodnoty jsou:

$$m_0 = 13.0$$
$$g = 8.7$$

Předpokládáme-li, že albedo planetky je rovno albedu Merkurovu, dostáváme pro průměr planety 83 *km*.

Charakter planety; efemerida.

Objekt tento, provisorně označený 1924 QF, byl opatřen číslem 1015. Střední denní pohyb nasvědčuje tomu, že patří k typu blízko Hecuby (komensurabilita $\frac{2}{1}$). Elementů bylo použito k výpočtu efemeridy [2]) pro oposici v roce 1925, čímž umožněno bylo znovuvyhledání v Heidelbergu a ukázala se následující odchylka od místa vypočteného [3]):

	S. Č. Heid.	$\alpha_{1925 \cdot 0}$	$\delta_{1925 \cdot 0}$	m	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Duben 22, 1925	$1^h 6^m 1$	$14^h 8^m 2$	$+ 0^0 55'$	13.5	$- 1.1^m$	+ 4
květen 13,	23 18. 4	13 53.6	+ 1 54	13.6	— 0.9	+ 2

hvězdná velikost přesně dle výpočtu. V odchylce může býti obsaženo působení Jupitera.

---

2) Kleine Planeten, Jahrgang 1925, Berlin.
3) B. Z. der Astr. Nachrichten 1925, Nro. 19, 21.

2. Planeta 1924 SA.

Tuto planetu objevil 30. května 1924 H. E. Wood v Johannesburgu (Jižní Afrika); v. době objevu měla velikost asi 12^m. Všechna měření byla vykonána na zmíněné observatoři astrografem. Posice jsou tyto:

Dat.		α	δ
Květen	30.37977	$16^h 49^m 41^s 45$	$-21^\circ\ 3'\ 46''\ 3$
„	31.38916	16 48 47. 93	− 21 6 1. 4
červen	7.37073	16 42 33. 11	− 21 21 34. 5
„	7.42267	16 42 30. 38	− 21 21 41. 3
„	25.31601	16 28 10. 30	− 22 1 8. 5
„	26.31398	16 27 30. 95	− 22 3 22. 5
červenec	3.30385	16 23 31. 53	− 22 19 20. 3
„	4.38353	16 23 0. 48	− 22 21 52. 6

Místa vztahují se na aeq. 1924.0, pozorovatel H. E. Wood. Jelikož šířky planety jsou malé, není přípustný přechod na »locus fictus«; byla proto provedena jedna hypothesa, jež umožnila redukci vůči parallaxe:

		$\alpha_{1924 \cdot 0}$	$\delta_{1924 \cdot 0}$
Květen	30.37977	$16^h 49^m 41^s 33$	$-21^\circ\ 3'\ 46''\ 9$
červen	25 31601	16 28 10. 23	− 22 1 8. 9
červenec	4.38353	16 23 0. 61	− 22 21 53. 1

Data, jichž použito jako základu výpočtu, jsou následující:

$\lambda_{1924 \cdot 0}$	$\beta_{1924 \cdot 0}$	$L_{1924 \cdot 0}$	log R
$253^\circ\ 37'\ 33''\ 8$	$+1^\circ\ 23'\ 32''\ 0$	$249^\circ\ 8'\ 21''\ 0$	0.0060775
248 48 5. 7	− 0 14 39. 0	273 55 9. 1	0.0071625
247 40 38. 5	− 0 46 32 6	282 33 57. 6	0.0072364

z čehož jako jednoznačné řešení resultují tyto elementy [4]):

Epocha: červen 25.0 S. Č. G. 1924.

M_0	$358^\circ\ 45'\ 55''\ 5$	
ω	182 31 5. 1	1924 0
Ω	77 4 48. 1	1924 0
i	9 37 36. 7	1924 0
φ	7 58 6. 4	
μ	640''.554	
log a	. 0.495634	

[4]) Astr. Nachrichten, Bd. 223, p. 213.

Heliocentrické koordinaty zní:

$$x = [9.994153]\, r \sin (349^\circ\, 25'\, 11''6 + v)$$
$$y = [9.956372]\, r \sin (263^\circ\, 53'\, 22''4 + v)$$
$$z = [9.659642]\, r \sin (240^\circ\, 38'\, 52''8 + v)$$

(Stř. jarní bod 1924.0.) Elementy vyhovují jednotlivým pozorováním:

			$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$	
Květen	30	Johannesburg	0″0	0″0	
„	31	„	+ 1. 8	+ 1. 6	
červen	7	„	− 7. 7	+ 2 1	
„	7	„	− 5. 6	+ 2. 6	$(O - C)$
„	25	„	− 0. 1	0. 0	
„	26	„	+ 0 1	0. 0	
červenec	3	„	0. 0	+ 0. 4	
„	4	„	0. 0	0. 0	

Hodnoty z 31. V. a z 3. VI. značí $\Delta\alpha$ cos δ, $\Delta\delta$.

Právě kontrolní měření ze 7. června se značně odchyluje a jelikož oblouk dráhy je poměrně krátký, vstupují změny v posicích do resultátu velmi závažně. Zkusil jsem zlepšiti dráhu variací geocentrických distancí. K tomu účelu vypočteny další dva systémy:

	(II)	(III)
M_0	2° 17′ 21″ 5	355° 17′ 49″6
ω	177 49 58. 4	187 11 37. 0
☊	77 4 38. 9	77 5 36. 5
i	9 37 8. 1	9 36 8. 1
φ	7 50 56. 5	8 11 3 9
μ	643″.343	638″.130
log	0.494376	0.496732

Epocha je tatáž. K podmínečným rovnicím použito dvou normálních míst, utvořených ze dvou párů pozorování. Tato získána též pomocí elementů (I), (II), (III).

Výsledkem jsou tyto rovnice:

$$-10.4x_1 + 8.7x_3 = -6.6$$
$$-\ 3.3x_1 + 3.3x_3 = +2.3$$
$$-\ 9.5x_1 + 6.8x_3 = \ \ 0.0$$
$$-\ 3.3x_1 + 3.2x_3 = \ \ 0.0$$

a normální rovnice:

$$220.2x_1 - 176.6x_3 = +61.0$$
$$-176.6x_1 + 143.1x_3 = -49.8$$

Řešení však ukazuje, že odchylky normálních míst jsou stále značné:

		$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
červen	7.	$-3''.5$	$+3''.6$
»	25.	$+2''.1$	$+1''.3$

Sdělil jsem proto objeviteli svou domněnku, že snad tyto odchylky jsou důsledkem nepřesnosti posic srovnávacích hvězd a skutečně tomu tak bylo. Při redukci původní bylo použito Argelanderova katalogu; v Johannesburgu dostali právě nový katalog z Hajdarabadu a použiv nových údajů, změnil p. Wood svoje měření následovně:

		$\alpha_{1924.0}$	$\delta_{1924.0}$
červen	7.37073	$16^h\ 42^m\ 33^s 17$	$-21^{\circ}\ 21'\ 37'' 9$
»	7.42267	$16^h\ 42^m\ 30^s 43$	$-21^{\circ}\ 21'\ 45'' 0$

Nové podmínečné rovnice jsou:

$$-10.4x_1 + 8.7x_3 = -5.5$$
$$-3.3x_1 + 3.3x_3 = -1.1$$
$$-9.5x_1 + 6.8x_3 = 0.0$$
$$-3.3x_1 + 3.2x_3 = 0.0$$

z čehož plynou normální:

$$220.2x_1 - 176.6x_3 = +60.7$$
$$-176.6x_1 + 143.1x_3 = -51.5$$

Řešení $x_1 = -1.278$, $x_3 = -1.937$ dává korigované kurtované distance $\log \overline{\varrho_1} = 0.228437$, $\log \overline{\varrho_3} = 0.256977$.

Resultuje nová dráha:

Epocha: červen 24.5 S. Č. G. 1924.

M_0	$1^{\circ}\ 16'\ 35''\ 6$	
ω	179 3 26 3	1924.0
Ω	77 3 26. 2	1924.0
i	9 41 5. 8	1924.0
φ	7 48 17. 8	
μ	641''.187	
log a	0.495348	

Tentokrát hoví nové elementy jednotlivým posicím takto:

			$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
Květen	30	Joh.	0'' 0	0'' 0
červen	7	„	− 2. 4	+ 1. 1
„	7	„	− 0. 5	+ 1. 3
„	25	„	+ 1. 4	+ 2. 2
„	26	„	+ 1. 3	+ 2. 0
červenec	4	„	0. 0	0. 0

a normálním místům:

	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
červen 7.	$-1''.5$	$+1''.2$
» 25.	$+1''.3$	$+2''.1$

Dosazením do podmínečných rovnic dostáváme skoro tytéž hodnoty:

$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$
$-1''.9$	$+1''.1$
$+1''.0$	$+2''.0$

K pozorováním používáno krátkofokální kamery, na desce 1 *mm* = 180″; tím dá se vysvětliti, že jakési odchylky zůstávají. Součet kvadrátů zmenšil se pětkrát proti původnímu (elem. [I]), což dokládá větší oprávněnost nových elementů.

Efemerida.

Aby se umožnilo znovuvyhledání planety, vypočetl jsem efemeridu pro letošní oposici, jež nastane 21. září 1925. Hvězdná velikost bude 12.8^m ($g = 8.7$).

Dat. 1925		$\alpha_{1925\cdot0}$		$\delta_{1925\cdot0}$		
Září	11	24^h 1^m 1		-15° 21′		(0.4932)
			6.0		37	
„	19	23 55. 1		− 15 58		0.3305
			6.2		28	
„	27	23 48. 9		− 16 26		0.3362
			5.8		19	
Říjen	5	23 43. 1		− 16 45		0 3448
			5.1		7	
„	13	23 38. 0		− 16 52		0 3566
			4.0		4	
„	21	23 34. 0		− 16 48		(0.5005)

posice platí pro 0^h svět. času; v posledním sloupci udány log rad. vector a log. geoc. distance.

Astronomický ústav české university, Praha,
květen 1925.

Résumé.

Dans l'article précédent, l'auteur calcule les orbites osculatrices de deux petites planètes nouvelles, celles de 1015 et 1924 SA. Il se sert de méthodes usuelles et calcule aussi une éphéméride.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 39.

Klinozoisit a prehnit od Proseče-Vobořiště u Pelhřimova.

ALEXANDR ORLOV.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 39.

Klinozoisit a prehnit od Proseče-Vobořiště u Pelhřimova.

ALEXANDR ORLOV.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Klinozoisit a prehnit od Proseče-Vobořiště u Pelhřimova.

Alexandr Orlov.

Na jihozápad od vesnice Proseč-Vobořiště, přibližně ½ *km* ode dvora, na východní straně lesíka u cô 639 lom na štěrkový kámen odkrývá kontakt amfibolitu a dvou žil žuly.

Žula hrubozrnná s biotitem nabývá místy rázu pegmatitického, místy aplitického; má v sobě žilky čistého křemene. V žule přítomný apatit tvoří zelenavo-žlutavé sloupce někdy až 1 *cm* dlouhé.

Amfibolit je silně šmouhovitý, převážně drobně zrnitý, vrstevnatý, složený hlavně z hnědě-zeleného amfibolu a plagioklasu; místy má značný podíl pyroxenů. Bohatý je železnými rudami a titanitem.

Od žulových žil zabíhají do amfibolitu hojné menší žilky pegmatitu nebo čistého křemene.

V amfibolitu, v bezprostředním sousedství se žulovou žilou i dále od ní, vyskytují se klinozoisit a prehnit jako výplně trhlin a žilek, kůry na trhlinách nebo drůzy v dutinách; vzácně jako tenké kůry na trhlinách klinozoisit s kalcitem. Volně vyvinuté drůzy nejsou hojné; hlavně převládají makroskopicky celistvé žilky velmi nepravidelných forem i měnivé mocnosti. Mocnost žilek kolísá od *2—3 cm* až do 0·1 *cm* i méně. Žilky hustě prostupují amfibolit, jindy uzavírají dokola jeho isolované partie.

Složení těchto žilek i kor hodně se mění: v jedněch převládají drobné, krátké sloupce klinozoisitu nad ubývajícím prehnitem, v jiných zas (většinou na korách polodrůzovitého rázu) převládají veliké krystaly prehnitu, obsahující zarostlé radiálně-sloupcovité agregáty šedého klinozoisitu. Dosti často však tvoří i prehnit sám žilky neb kůry; je zde makroskopicky úplně celistvý, barvy na čerstvém lomu mléčně-bílé. Jak žilky, tak kůry a drůzy obou minerálů místy jsou zbarvené na hnědo-žluto hydroxydem železa v různých tónech.

V agregátech prehnitu a klinozoisitu i v prehnitu samotném jsou hojně roztroušená zrnka haematitu většinou silně proměněného v limonit.

Někdy se haematit shlukuje do větších partií. Sem tam jsou ojedinělá zaoblená zrnka rutilu; vzácně lokálně shromažďují se v prehnitu drobné krystalky pyritu. Roztroušená drobná zrnka železné rudy a jiných akcesorií dodávají někdy celistvé prehnitové kůře špinavě-šedou barvu. Místy prehnitové kůry bývají hojně prostoupeny drobnými póry.

1.

Klinozoisit.

Klinozoisit jeví velikou kolísavost svých vlastností a jednak blíží se epidotům, jednak tvoří přechod k zoisitům, takže v prosečské lokalitě jsou zastoupeny skoro všechny členy skupiny zoisit-epidotové, spojené mezi sebou pozvolnými přechody. Mezi nimi však vždy převládá klinozoisit; jiné členy skupiny vyskytují se jen sporadicky.

Nahodile a v nedostatečném množství sebraný materiál nedovoloval provésti chemické analysy ani důkladnějšího optického výzkumu, ale i tak získané výsledky jsou zajímavým příspěvkem ke studiu isomorfní skupiny zoisit-epidotové.

U klinozoisitu prosečské lokality můžeme rozeznávati dvě odrůdy. První odrůda klinozoisitu je barvy zelenavé, skelného, místy mastného lesku. Minerál tvoří radiální agregáty obyčejně 10—12 *mm* veliké. Barva zelená přechází na mnohých místech v jemně růžovou. Vyskytuje se na trhlinách amfibolitu skoro sám a jen na několika místech blíže trhliny druží se k němu neveliké partie celistvého prehnitu. Výbrus z tohoto klinozoisitu nepodařilo se připraviti; zkoumán byl pouze v prášku.

Exponenty lomu uvedeného klinozoisitu poněkud kolísají a to pro části zelenavé jsou trochu větší nežli pro části růžové. Pro partie růžové možno přijmouti:

$$\alpha \leqq 1{\cdot}702 \qquad \gamma = 1{\cdot}708 \pm 0{\cdot}001.$$

Pro partie zelenavé hodnota γ nepřevyšuje 1·710. Dvojlom velmi slabý; interferenční barva temně modrá, anomální.

Hustota, stanovená metodou suspensační (v Rohrbachově roztoku), poskytla pro převážné množství růžových zrnek hodnotu

$$h = 3{\cdot}352.$$

V tekutině této hustoty však částečky nazelenalé pomalu klesaly ke dnu.

Štěpné lupínky klinozoisitu mají optický charakter zony + nebo —. Na lupíncích protažených podle ortodiagonály řídké podélné trhliny štěpnosti odpovídají štěpnosti klinozoisitu podle (001). Kolmo ke směru štěp-

nosti projevuje se znatelně příčné rozpukání podle (010). Hojné jsou lupínky bez jakéhokoliv určitého omezení. Na mnohých lupíncích, ukloněných k optické ose, šikmo ke směru podélné štěpnosti, ukazují se jemné šmouhy interferenčních barev, upomínající buď na rýhování, nebo na velmi jemné dvojčatné lamelování. Směr těchto šmouh na uvedených lupíncích tvoří se směrem podélné štěpnosti ve většině případů stejný úhel = 36°—40°. S úplně analogickým rýhováním se setkáváme i ve směru rovnoběžném ke směru štěpnosti.

Ve směru podélné štěpnosti velmi často se vyskytují dvojčatné lamely, dosti úzké, upomínající na dvojčatné lamelování plagioklasů. Počet těchto lamel bývá na jednom lupínku někdy 4—5. Dle optické orientace jsou to lamely podle (100) klinozoisitu. Na lupíncích podle (010) byla stanovena úchylka zhášení lamel 6°—8° na každou stranu.

Kromě dvojčatných lamel se stejnou anomálně modrou interferenční barvou jsou hojné lamely, anebo lépe řečeno, zony, s jinou — normálně šedou nebo nažloutle-šedou — interferenční barvou. Tyto lamely se šedou interferenční barvou větším dílem jsou rovnoběžné se směrem štěpnosti podle (100) a (001); často se objevují ve formě klínů sledujících zhruba směr štěpnosti, nebo konečně jsou uloženy zcela nepravidelně. Ve většině případů partie s anomálně modrou a normálně šedou interferenční barvou při skřížených nikolech nemají vlastních zřejmých obrysů, nýbrž barva šedá docela pozvolna přechází do barvy modré.

Ve větších partiích se šedou interferenční barvou jsou směry optické elasticky zřejmě opačného rázu, nežli v partiích s modrou interferenční barvou: t. j. směr větší optické elasticity α' v zoně s modrou interferenční barvou odpovídá směru menší optické elasticity γ' v zoně se šedou interferenční barvou a obráceně. Tento poměr optických směrů v partiích s různými interferenčními barvami není tak zřejmý, když části se šedou interferenční barvou nejsou veliké a jejich interferenční barva není čistá. Zony se šedě-žlutavou interferenční barvou jsou nejzřejmější a ostře omezené ve směrech rovnoběžných s podélnou štěpností; zde často vystupují jako skutečné lamely, ačkoliv jejich hranice není vždy přímočará.

Velmi často takové lamely s různými interferenčními barvami při otáčení stolkem mikroskopu přibližně o každých 45° vyměňují si svou interferenční barvou. Uprostřed mezi oběma polohami výměny interferenčních barev mají obě lamely stejnou polarisační barvu a celý lupínek vypadá jednoduchým. Někdy tato poloha stejné interferenční barvy pro obě lamely po každých 45° projeví se interferenční barvou střídavě jinou. Hranice mezi oběma lamelami ostrá v okamžiku, kdy obě lamely mají interferenční barvou odlišnou, při točení stolkem docela pozvolně se sma-

zuje, až polarisační barva v obou partiích se vyrovná i pak dále se vymění. Na lupíncích však, kde směry optické elasticity jsou zřejmě obrácené, obě partie. s anomální modrou a normálně šedou interferenční barvou, úplně normálně se zatemňují bez jakékoliv výměny nebo undulosního přecházení barev. Zhášení nastává buď u obou lamel rovnoběžně se směrem štěpnosti, nebo část šedě-žlutavá zháší rovnoběžně, kdežto modrá o několik stupňů šikmo.

Úplná výměna směrů optické elasticity v částech se šedou interferenční barvou a v částech s modrou interferenční barvou dá se dobře zjistiti i v konoskopickém světle. Jestliže část s modrou interferenční barvou poskytuje výchoz γ, tehdy část se šedou interferenční barvou dá výchoz α. Často při výchozu optické osy v částech se šedě-žlutavou interferenční barvou hyperbola při točení stolkem se prohýbá, nebo se zdá býti přetržená. Někdy se objevuje i asymetričnost konoskopického obrázku, zvlášť jasně při zasunutí sádrovcového kompensátoru: symetrála hyperboly nedělí symetricky modrou a žlutou skvrnu na obou stranách hyperboly.

Určování rázu disperse pro partie se šedou interferenční barvou při její veliké síle a nezřejmosti konoskopického obrázku není vždy zcela bezpečné. Ale na větších lupíncích s čistou šedě-žlutavou interferenční barvou i v případě výchozu osy, i v případě výchozu ostré bisektrice (γ) lze stanoviti silnou dispersi rázu $\varrho > v$ kolem γ. Partie s anomálně modrou interferenční barvou vždy mají dispersi $v > \varrho$ kolem γ.

R o v i n a o s o p t i c k ý c h j a k v p a r t i í c h s m o d r o u, t a k i v p a r t i í c h s e š e d o u i n t e r f e r e n č n í b a r v o u j e v ž d y k o l m á k e s m ě r u p o d é l n é š t ě p n o s t i.

Velikost úhlu optických os silně kolísá od místa k místu na jednom a tomže lupínku. Na lupínku temně modré anomálně interferenční barvy, kolmém na γ, s dispersí $v > \varrho$ kolem γ — tedy n a l u p í n k u k l i n o z o i s i t u — metodou Mallardovou byla stanovena velikost úhlu optických os $2E = 98^{0}\,20'$, což při připuštění $\beta = 1{\cdot}704$ dává $2V = 54^{0}\,44'$, t. j. $2V =$ ca 55^{0}.

Na lupínku šedé interferenční barvy, kolmém ke γ, s dispersí $\varrho > v$ kolem γ — tedy n a l u p í n k u z o i s i t u β Termierově — byla týmže způsobem stanovena hodnota úhlů optických os $2V = ca\ 50^{0}$.

Obě tyto hodnoty musí býti považovány jako nejnižší pro daný minerál.

Disperse optických os jak pro případy $v > \varrho$, tak i pro případy $\varrho > v$ je velmi silná. Síla disperse je měnlivá. Na lupíncích modré interferenční barvy s dispersí rázu $v > \varrho$ kol γ ukazují se jakoby dva druhy disperse. V jedněch případech na konvexní straně hyperboly vystupují

šmouhy různých odstínů modré barvy, na konkávní — úzké pásmo několika odstínů červené barvy, brzo přecházející ve žlutou. V jiných případech zorné pole vně od konvexní strany hyperboly je zbarveno modře, kterážto barva blíže k hyperbole dostává temně modré odstíny; na straně konkávní je zorné pole stejnoměrně zbarveno šedě žlutavě a jen málokdy blíže k hyperbole projeví se zbarvení cihlově žlutavých odstínů. Tento poslední ráz disperse byl pozorován i na lupínku, na němž byla stanovena hodnota úhlu optických os $2V$ = ca 55°. Na lupíncích se šedou interferenční barvou při dispersi rázu $\varrho > v$ kol γ na konvexní straně hyperboly vyskytuje se pásmo různých odstínů červeně-žluté barvy, na konkávní — analogické pásmo modrých odstínů, jen skoro vždy užší nežli pásmo červených barev na straně konvexní.

Stanoviti na tomto minerálu souvislost síly disperse s velikostí úhlů optických os neb se silou dvojlomu nelze.

Narůžovělé lupínky jeví dosti patrný pleochroismus mezi růžovou, narůžověle-fialovou a světle žlutou barvou. Růžově zbarvené paprsky kmitají buď ve směru menší, buď ve směru větší optické elasticity. Ve mnohých případech nelze přesně stanoviti směr pro kmitání paprsků určité barvy. Z četných pozorování možno pro lupínky modré interferenční barvy s dispersí $v > \varrho$ kol γ (tedy pro lupínky klinozoisitové) stanoviti pleochroismus:

γ — růžový; β — amethystově fialový s růžovým odstínem α — světle žlutý, nazelenalý.

Na lupínku kolmém ku γ s dispersí $\varrho > v$ kol γ (tedy na lupínku zoisitu β Termierově) byl určený pleochroismus:

α — růžový, β — amethystový (trochu narůžovělý).

Na rozdíl od výše popsané odrůdy klinozoisitu nalézáme jeho druhou odrůdu, v prosečské lokalitě daleko převládající, vždy pohromadě s prehnitem, až na jediný případ, kde klinozoisit vystupuje s kalcitem.

Barva klinozoisitu této druhé odrůdy je vždy velice světlých odstínů: matně šedá se slabým žlutavě-zelenavým odstínem, nebo vzácně pleťová (šedá, slabě narůžovělá). Tyto odstíny mnohdy na tomtéž krystalu se sesilují a přecházejí do matně zelených. Jen velmi vzácně mezi zrnky těchto světlých barev objevují se zrnka intensivně žlutě-zelené barvy.

Klinozoisit zarostlý v drůzách větších krystalů prehnitu nabývá charakteru radiálně-paprsčitých agregátů, které při délce do 25 *mm* mají průměr na základně 8—10 *mm*. V žilkách, kde klinozoisit značně převládá nad prehnitem, tvoří agregáty hustě křižujících se úzkých sloupců, jež jsou leckde vzhledu deskovitého nebo tabulkového. Největší délka

těchto sloupců nepřestupuje 10 *mm*. Prehnit vyplňuje mezery mezi sloupci klinozoisitu, z části proniká i do něho. Plochy pásma ortodiagonálního, zvlášť na krystalech radiálně-paprsčitých agregátů, zarostlých v drůzách prehnitu, jsou bohaté a dobře vyvinuté; koncové plochy krystalografické osy *b* jsou špatně vyvinuty, anebo vůbec scházejí. Jak ojedinělé krystaly, tak i celé radiálně uspořádané agregáty klinozoisitu jeví silné příčné rozpukání podle (010).

Tyto odrůdy klinozoisitu byly zkoumány jak ve výbrusech, tak i na štěpných lupíncích. Jich rozmanitost je značně větší nežli u odrůdy popsané výše. Právě mezi nimi jsou zastoupeny všechny členy skupiny zoisit-epidotové. Ale, jak už bylo uvedeno na jiném místě, vždy převládají vlastnosti klinozoisitu. Na rozdíl od růžového klinozoisitu, před tím popsaného, zony a lamely s normální šedou interferenční barvou i obrácenými směry optické elasticity jsou o mnoho řidší; naopak klinozoisit jeví hojné přechody do rázu epidotického. Na jednom a témže krystalu mohou býti pozorovány jak partie s vysokými interferenčními barvami, tak i partie s nízkou normální šedou interferenční barvou, spojené mezi sebou pozvolnými přechody.

Při zkoumání v prášku několikrát byl zjištěn zoisit s polohou roviny os optických v (100) (v postavení Weinschenka), t. j. zoisit α Termiera. Vztahy zoisitu α však ke klinozoisitu sledovány nebyly, poněvadž tyto odrůdy zoisitu byly pozorovány pouze v isolovaných lupíncích. Na těchto lupíncích zoisitu α ve směru podélné štěpnosti skoro vždy jeví se jemné šmouhy interferenčních barev, upomínající na rýhování, nebo jemné dvojčatné lamelování. S podélnými trhlinami štěpnosti lupínky zhášejí rovnoběžně. Disperse optických os znamenána nebyla. Index lomu pro směr nejmenší, elasticity (γ') několikrát byl určen jako blízký 1·707.

Klinozoisit šedě zelenavé barvy má tyto exponenty lomu:

$$\alpha \leqq 1{\cdot}710\ (> 1{\cdot}708), \qquad \gamma \leqq 1{\cdot}720.$$

Ačkoliv hodnoty lomu dosti značně kolísají, přece uvedené platí pro valnou většinu případů. Jen v ojedinělých případech pro odrůdy sytě zelených barev exponent lomu pro γ stoupá nad 1·720, až konečně u některých překročuje i hodnotu 1·730.

Hustota, stanovená metodou suspensační (v Rohrbachově roztoku) pro valnou většinu lupínků šedě-zelenavě zbarvených kolísá v mezích

$$h = 3{\cdot}356 \qquad \text{a} \qquad h = 3{\cdot}360.$$

Pro odrůdy světlejších barev (pleťová) bylo stanoveno $h = 345$, ačkoliv i v roztoku této hustoty některé lupínky vzplývají nahoru. Nižší

hranice hustoty nemůže býti zaručena, poněvadž, jak o tom svědčí mikroskopický výzkum, klinozoisit neobyčejně jemně prorůstá prehnitem, který může působiti toto snížení hustoty.

Dvojlom klinozoisitu silně kolísá. Při tloušťce výbrusu $d = 0{\cdot}04$ *mm*, kompensátorem Berekovým, bylo stanoveno

$$\gamma - \beta = 0{\cdot}005 \text{ i } 0{\cdot}003;\ \gamma - \alpha = 0{\cdot}008.$$

Interferenční barvy jsou anomálné, zvlášť silně u odrůd s menším dvojlomem.

Velikost úhlu optických os hodně kolísá. Nejzdařileji provedená měření Fedorovskou universální metodou v mezích přesnosti metody samé a stereografického znázornění výsledků poskytla resultáty:

$2V\gamma$	$c : \alpha$	$\alpha : \gamma$
ca 90°	2—3	25
» 84°	4	23
» 80°	8	18

Není však pochybnosti, že hodnota úhlu optických os klesá ještě níže než 80°.

Disperse optických os jest rázu $v > \varrho$ kol γ. Síla disperse jest měnlivá. Při větším dvojlomu projeví se disperse nevelikou modrou skvrnou na konvexní straně hyperboly. Při dvojlomu menším disperse jest mnohem silnější a projeví se na obou stranách hyperboly širšími pásmy modrých a červených barev. Někdy zase disperse má týž ráz jako u klinozoisitu výše popsaného: vně hyperboly na konvexní straně barva modrá, na straně konkávní šedá. Jsou případy, kdy disperse vůbec se neprojevuje.

Při zkoumání na štěpných lupíncích, šikmých k optické ose, byla mnohokrát stanovena disperse rázu $v > \varrho$ kol α, což může býti vysvětleno jedině odlišným rázem disperse optické osy *A* epidotů.[1])

Dvojčatné lamely podle (100) jsou hojné. Na řezu kolmém k β, podle (010), úchylka zhášení lamel byla stanovena 5° až 6°. Na těchže řezech, kromě dvojčatných lamel podle (100) ve směru štěpnosti dle (001), ukazují se široké šmouhy odlišných interferenčních barev poněkud i s jinou úchylkou zhášení. Šmouhy tyto ale neupomínají na dvojčatné lamely, nýbrž pouze na zonárnou změnu složení podle směru (001). V celku takové řezy podle (010) vypadají jako parketované. Ráz štěpných trhlin podle (001) dokazuje neúplnou dokonalost štěpnosti podle té plochy.

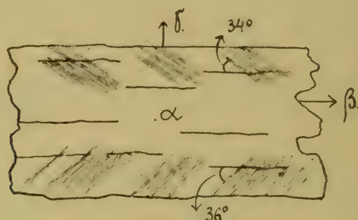
V mnohých případech šikmo ke směru podélné štěpnosti lze pozorovati jemné rýhování, analogické rýhování u růžového klinozoisitu popsa-

---

[1]) Goldschlag — Über die optischen Eigenschaften der Epidote. Tschermaks M. u. P. Mitteilungen. XXXIV. 1917, str. 48—51.

ného výše. Na řezu přesně kolmém k α, na individuu zdvojčatném podle (100), tyto jemné lamelky svíraly mezi sebou úhel 70° a s trhlinami podélné štěpnosti úhly 34° a 36°. (Obr. 1.)

Struktura tohoto klinozoisitu, jak již bylo uvedeno, je analogická struktuře růžového klinozoisitu popsaného výše, s tím rozdílem, že zde často projevují se přechody k vyšším interferenčním barvám. Na řezech patřících témuž individuu můžeme někdy pozorovati, jak poměrně vysoká interferenční barva pozvolně klesá, až přejde v tmavě modrou silně anomální, která pak dále pozvolna přechází v normální šedou anebo šedě-žlutou. Optická orientace partií s šedou a modrou interferenční barvou je vzájemně obrácená. Hranice mezi částí se šedou a modrou interferenční barvou, která se objeví teprve při skřížených nikolech, jest nezřejmá a



Obr. 1. (Vysvětlení v textu.)

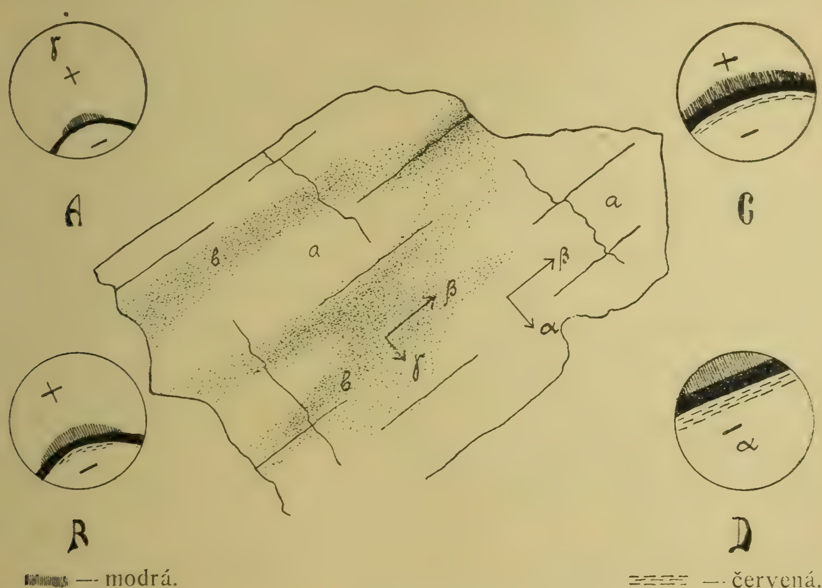
při otáčení stolkem obrysy partií se šedou interferenční barvou se mění. Při studování partií s různými interferenčními barvami v konoskopickém světle v konkrétním případě (obrázek čís. *2*) pozorujeme toto: Partie s vysokou interferenční barvou poskytuj šikmý výchoz ostré positivní bisektrice (γ) a jedné optické osy. Hyperbola jest ostrá, úzká; disperse se buď vůbec neprojevuje nebo je velice slabá (fig. A, obr. *2*). V partiích s poněkud nižší interferenční barvou hyperbola přestává míti ostré obrysy, objevuje se patrná disperse a hyperbola zaujímá místo blíže ke středu zorného pole (fig. B, obr. *2*). Pak při dalším klesání interferenčních barev hyperbola překročí přes střed zorného pole do druhé poloviny, disperse stává se o mnoho silnější, hyperbola víc rozmazanou. Konečně, v partiích se šedou interferenční barvou, silně rozmazaná hyperbola zaujme opačný kraj zorného pole s silnou dispersí; střed zorného pole vně hyperboly při zasunutí sádrovcového kompensátoru zbarví se na žluto, t. j. zde máme šikmý výchoz tupé negativní bisektrice (α) (fig. D, obr. *2*).

Pokud se týče vůbec chování těchto zon s šedou interferenční barvou, o tom už bylo řečeno při popisu první odrůdy klinozoisitu.

Někdy i individua, která v horizontální poloze výbrusu vypadají úplně jednoduchá, projeví přítomnost analogických zon s šedou a modrou in-

terferenční barvou, když otočením kolem jedné z os Fedorovského universánlího stolku vysuneme je z polohy horizontální.

Barevná, šedě-zelenavá nebo pleťově-narůžovělá, individua tohoto klinozoisitu mají slabý pleochroismus, který je ještě rozmanitější nežli pleochroismus výše popsaného růžového klinozoisitu. Na rozdíl od posledního převládají zde vždy zelené tóny barev. Paprsky kmitající směrem menší optické elasticity jsou vždy intensivněji zbarvené nežli



Obr. 2. *a—a* partie klinozoisitu s modrou anomální interfer. barvou; *b—b* partie s šedě-žlutou interfer. barvou. (Vysvětlení v textu.)

paprsky, kmitající směrem větší optické elasticity. U zeleně zbarveného klinozoisitu ve směru menší optické elasticity, kolmo na podélnou štěpnost (γ'), kmitají paprsky zeleně zbarvené; u odrůd se slabě narůžovělou barvou v témže směru kmitají paprsky růžově zbarvené. Paprsky kmitající ve směru rovnoběžném s podélnou štěpností na individuích obou zbarvení mají většinou zelenavou barvu různých odstínů: žlutavého, červenavého a někdy i fialového. Paprsky kmitající ve směru větší optické elasticity, kolmo ke směru podélné štěpnosti (α'), jsou nejsvětlejší, mají barvu žlutou v obou případech. V celku z četných pozorování můžeme stanoviti p l e o c h r o i s m u s k l i n o z o i s i t u:

γ — { růžový / zelený } β — zelenavý α — světle žlutý

Slabě narůžovělá individua s polohou roviny os optických rovnoběžně se směrem podélné štěpnosti — tedy patřící zoisitu α Termierovu — také projevují slabý pleochroismus. Paprsky kmitající směrem menší optické elasticity rovnoběžně s podélnou štěpností (γ'), jsou žlutavě zbarvené; paprsky kmitající směrem větší optické elasticity, kolmo na směr podélné štěpnosti (β), jeví nečisté tóny růžové barvy. Na štěpném lupínku kolmém k α, patřícímu těmto odrůdám zoisitu α Termierova, byl stanoven pleochroismus.

γ — nažloutlý $\qquad\qquad$ β — narůžovělý.

Klinozoisity s tak nízkými exponenty lomu a složitou strukturou nejsou vlastní výhradně prosečské lokalitě. Lokality čáslavské, zvláště Horky, poskytují klinozoisity blízce analogického rázu; i způsob výskytu jich je zde skoro týž. Analogie je zvlášť patrná na růžových klinozoisitech lesku skelného, poněkud mastného, vyskytujících se na stěnách trhlin amfibolitu pohromadě s tenkým drůsovitým povlakem jemných idiomorfních krystalků temného amfibolu. Největší exponent lomu té odrůdy je vždy patrně menší než 1·711. Struktura úplně podobá se struktuře prosečského růžového klinozoisitu. $h = 3{\cdot}345$. Zelené odrůdy klinozoisitu, vyskytující se v prehnitu pohromadě se sytě zelenými krystaly epidotu, mají exponenty lomu poněkud vyšší, blízké exponentům lomu šedě-zelených odrůd prosečských.

II.

Prehnit.

Ve volně vyvinutých drůzách dosahují krystaly prehnitu velikosti 8 až 10 *mm* v průměru plochy spodové. Habitus těchto krystalů je krátcesloupcovitý podle osy c, skoro kubického vzhledu. Kromě tohoto habitu mají některá individua habitus tabulkovitý podle plochy spodové (001). Krystaly jsou barvy bílé průsvitné, v tenkých šupinkách jsou průhledné. Vedle čirých průsvitných krystalů na téže drůze jsou krystaly mléčně-bílé neprůsvitné. Na některých místech kde prehnit vyskytuje se pohromadě s pleťově narůžovělými klinozoisity, dostává lehce narůžovělý odstín. V místech s lokálně skoncentrovanými vrostlicemi pyritu barva prehnitu má odstín namodrale-šedý. Často krystaly jsou zbarveny na žluto hydroxydem železa.

Na krystalech prehnitu jsou hlavně vyvinuty široké plochy spodové (001) a plochy prismatické (110). Úzké plošky pinakoidální (100) a (010) otupují úhel mezi plochami prismatickými. K nim se druží někdy plošky

domatické (hlavně makrodoma); vzácně se vyskytují i plošky pyramidálné. Krystaly jsou často ohnuté a zakřivené. Dosti hojné jsou plochy vicinální. Plochy spodové (001) jsou dobře znatelně rýhovány rovnoběžně s makrodiagonálou (100). Plochy prismatické nejsou jednoduché, nýbrž »drůzovité«. »Drůzovitost« jich jest způsobena snad tím, že krystal skládá se z menších jedinců poněkud otočených kolem krystalografické osy c.

V drůzách prehnitu jsou skoro vždy zarostlé radiálně-paprsčité agregáty klinozoisitu. Na mnohých partiích prehnitu možno viděti dokonalé otisky krystalů klinozoisitu.

Kromě drůz idiomorfních krystalů vyskytuje se prehnit často v mikroskopicky úplně celistvých kůrách a žilkách s barvou mléčně-bílou, neprůsvitnou; o nich byla zmínka na začátku práce.

Hustota prehnitu stanovená na velikých krystalech metodou pyknometrickou poskytla hodnotu

$$h = 2{\cdot}916.$$

Stanovení hodnoty exponentů lomu na větších krystalech (jež pro α a β bylo provedeno na štěpných lupíncích kolmých ku γ a pro γ — na orientovaném řezu podle (110) poskytlo tyto resultáty:

$$\alpha = 1{\cdot}613 \qquad \beta = 1{\cdot}620 \qquad \gamma = 1{\cdot}635 \pm 0{\cdot}002$$

Dvojlom stanovený ve výbrusu o tloušťce 0·04 *mm* kompensátorem Berekovým poskytl hodnoty

$$\gamma - \alpha = 0{\cdot}024 \qquad \beta - \alpha = 0{\cdot}008.$$

Úhel optických os stanovený metodou Fedorovovou poskytl hodnotu

$$2V = \text{ca } 70^{\circ}.$$

Interferenční barvy jsou vesměs normální. Disperse optických os není.

Optické »anomalie« prehnitu jsou hojné a rozmanité. V jednom a témže výbrusu můžeme pozorovati vedle individuí úplně normálních, jednoduchých, i individua »anomální«. »Anomalie« nasvědčuje o mikroskopicky jemně složité struktuře větších individuí a projevují se lamelováním různého druhu.

Řezy kolmé a málo nakloněné ku γ ukazují jemná vlákénka většinou vřetenovitého rázu, která zhruba sledují určitý směr; zhášení celého individua je vždy undulosní. Směr tento, jímž probíhají vlákénka, buď tvoří úhel blízký 40 se směrem větší optické elasticity, α (kryst. osou a), nebo jde rovnoběžně s jedním ze směrů zhášení. V prvním případě směr tento odpovídá směru prismatu; v druhém případě je většinou kolmý na rovinu os optických a rovnoběžný se směrem menší optické elasticity, t. j. odpovídá směru β-krystalografické ose b. Tedy jeden ze směrů uspořádání

vlákénkovitých lamel odpovídá směru rýhování na plochách spodových. Vlákénkovité lamely jsou obyčejně velmi jemné. Zřejmost jejich obrysů a velikost není vždy stejná. Na témže řezu lze pozorovati, že rozměry jejich se zvětšují, obrysy přestávají býti zřejmé, i konečně řez stává se jednoduchým, zachovávaje undulosní zhášení.

Někdy mikroskopická struktura prehnitu podobá se jemnému mikroklinovému mřížkování. Jen málo kdy při podobné struktuře (mikroklinovém mřížkování) možno viděti drobná políčka nezřejmých forem, jež jsou uspořádána dle způsobu čtverců na šachovnici. Většinou zde spíše velmi jemná vřetenovitá vlákénka sledují v celku směr pinakoidu v detailech však ještě oscilují kol udaného směru dle úhlů prismatických (asi 40 na obě strany), čímž nabývají rázu lomeného (křivolakého).

V některých případech individuum prehnitu v řezu kolmém na γ rozpadá se na tři části (s úplně stejnou optickou orientací). V obou krajních částech lamely jsou uloženy diagonálně ke směrům větší optické elasticity — α: v jedné části odpovídají směru (110), v druhé — (110). Střed individua je lamel prostý, jednoduchý. Hranice střední části ke krajním je neostrá a nepravidelná. Celé individuum zháší undulosně.

Dosti často vláknité lamely jsou ukloněné od směrů prismatických a pinakoidálních a uspořádají se vějířovitě nebo hřebenitě. Někdy vůbec nelze stanoviti jakoukoliv pravidelnost orientace směrů těchto lamel.

Prehnit projevuje velikou náchylnost ke tvoření určitě složených agregátů. Často i větší individua jsou takovými agregáty menších jedinců. Tytíž strukturní a agregátní vlastnosti jako prosečský prehnit ukazují i prehnity čáslavských lokalit, jež byly laskavě poskytnuty p. profesorem K r a t o c h v í l e m na srovnání.

Způsob tvoření agregátů i srůstání menších jedinců ve větších krystalech je několikerý.

Na řezech kolmých ku γ nebo málo k němu ukloněných rozpadá se větší prehnitové zrno na několik součástí s úplně nepravidelnými a nezřetelnými hranicemi, které se objeví teprve při skřížení nikolů. Celé zrno zháší undulosně. Každá součást jeví v konoskopickém světle optickou orientaci jinou, ale jen o málo odlišnou od sousedních, což tvoří dojem, jakoby každá část byla o něco otočená kolem jedné z krystalografických os. V jiných případech součásti tyto mají podobu hřebenitou. Omezení hřebenitých partií jsou šikmá k optickému směru α a zhruba odpovídají směrům prismatickým; někdy dostávají hřebenité partie poněkud radiální ráz uspořádání. Rovnoběžně s omezením v některých takových partiích probíhá jemné lamelování.

Složitá struktura větších krystalů makroskopicky dobře zřejmá na plochách prismatických projeví se i v mikroskopu na řezech rovnoběžných k těmto plochám. Řez vypadá jako zbudovaný z většího množství drobných součástí skoro s pravoúhlým omezením, z nichž každá zháší poněkud odlišně.

Agregátní ráz větších jedinců projeví se ještě zřejměji na řezech kolmých k α. Jedinec se silnými širokými trhlinami podle (001) je zbudován z úzkých tabulek se zřejmými, ostrými hranicemi, protažených podle směru větší optické elasticity — $\beta = b$, rovnoběžně s trhlinami rozpukání podle (001). Rovina os optických leží kolmo ke směru rozpukání i délce tabulek. Tedy menší tabulky jsou protažené podle krystalografické osy b a narůstají plochami basipinakoidálními (001). Celý agregát zháší skoro současně, ačkoliv interferenční barvy ojedinělých lupínků poněkud se liší.

V jiných případech na řezech téže optické orientace, t. j. kolmých na α, menší jedinci jsou protaženi ve směru kolmém ke štěpným trhlinám podle (001). Rovina os optických leží rovnoběžně se směrem protaženosti jedinců. Jedinci mají často ráz silně plochých čoček. Jsou tedy v tomto případě, na rozdíl od výše uvedeného, ojedinělí jedinci protažení podle krystalografické osy c a srůstají plochami brachypinakoidálními (010).

Horecká lokalita (H o r k y u Č á s l a v i) poskytuje ještě jeden důležitý způsob agregátného srůstání a to radiálné uspořádání menších jedinců. Jedinci prehnitoví, rozdělení zřejmými trhlinami, mají formu buď silně plochých čoček nebo dosti širokých dlouhých klínů s vějířovitě-zubatým ukončením (upomínajícím poněkud na markasitové srůstání). Dle konoskopických obrázků jedinci jsou různě ukloněni ku γ. Rovina os optických prochází vždy rovnoběžně se směrem protažení; ráz délky převládá negativní. Jedinci mají někdy jemné lamelování šikmo ke své délce. Taková optická orientace ukazuje na to, že jedinci jsou protažení podle krystalografické osy a, která se mnohdy uspořádá směry radiálnými; takoví jedinci srůstají plochami prismatickými. Při tom srůstání jsou však individua poněkud otočena kolem jedné z krystalografických os, jak o tom nasvědčuje pozorování v konoskopickém světle. Pěkné makroskopické ukázky takovýchto radiálních agregátů poskytuje lokalita M a r k o v i c e u Ž l e b u. Drůzovitý povrch agregátů tvoří plošky pinakoidální, které ale poněkud mění svůj směr, proto i systémy jedněch složek stojí šikmo ke druhým.

III.

Paragenese a způsob výskytu.

Jak už bylo uvedeno, klinozoisit v drůzách a korách vždy se vyskytuje pohromadě s prehnitem. V radiálně-paprsčitých agregátech klinozoisitu plochy pásma orthogonálního jsou vždy dobře vyvinuty, kdežto koncové plochy krystalografické osy *b* scházejí. V místech, kde v prehnitu se vyskytují ojediněle, bez pořádku uložené sloupce klinozoisitu, idiomorfismus klinozoisitu jest úplný. Tedy klinozoisit v drůzách a korách je vždy zřejmě starší prehnitu.

Vztahy mezi prehnitem a klinozoisitem v prosečské lokalitě komplikují se zatlačováním hmoty klinozoisitové hmotou prehnitovou. Proces tento probíhá na různých místech s různou intensitou i poněkud odlišným charakterem.

Na jeděnch místech úplně idiomorfní, neporušené krystaly klinozoisitu leží mezi velikými krystaly prehnitu. Na jiných, převážně tam, kde klinozoisit je hlavní součástí výplní trhliny nebo kůry a prehnit pouze vyplňuje mezery mezi ním, prehnit velice silně atakuje klinozoisit. Zde vztahy mezi oběma minerály poněkud připomínají korosi. Prehnit tvoří choboty různé velikosti, nebo i ostrůvky v krystalech klinozoisitu. Přechody mezi oběma minerály jsou většinou pozvolné, hranice nezřejmá. Okraje klinozoisitu jsou prostoupeny prehnitem se silně laločnatými obrysy. Na okrajích atakovaných prehnitem i v hlubších prehnitových výběžcích jsou vždy hojně roztroušená zaoblená, drobná zrnka klinozoisitu různé velikosti, takže potom taková místa vypadají jako hustý agregát jemných isometrických zrnek klinozoisitu v prehnitu. Neveliká korodovaná zrnka klinozoisitu objevují se v prehnitu i dále od sloupců klinozoisitových. V místech silné proměny klinozoisitu agregát prehnitu, zastupující hmotu klinozoisitovou, bezprostředně druží se k prehnitu, který vyplňuje mezery mezi klinozoisity. Na idiomorfně vyvinutých plochách klinozoisitu, kde nejsou porušeny prehnitem, sedí někdy drobounké pěkně idiomorfně vyvinuté sloupečky klinozoisitu.

Ve velikých drůzách s radiálně vyvinutými agregáty klinozoisitu proces proměny jeho v prehnit začíná se obyčejně po jemných trhlinách příčného rozpukání [dle (010)], nebo po trhlinách podélné štěpnosti klinozoisitové. Při dalších fázích proměny, na rozdíl od případu výše uvedeného, forma radiálně sloupcovitých agregátů klinozoisitu v určitých partiích bývá někdy zachována a vyplněna agregátem prehnitu. (Tab. II., obr. 1.) Někdy jedno větší individuum klinozoisitu (eventuelně radiální agregát) bývá zachyceno několika většími zrnky prehnitu, při čemž

krajní zrnka prehnitu jednou svojí částí zastupují hmotu klinozoisitovou, druhou patří prehnitu volně vyvinutému na zevní stranu od klinozoisitu. V prehnitu zastupujícím klinozoisit jsou hojné zbytky klinozoisitu různé velikosti stejně orientované a současně zhášející. Někdy ale takové zbytky klinozoisitu v prehnitu, podle všeho patřící jednomu individuu, poněkud odlišně zhášejí, t. j. zdají se býti posunuty z původní polohy. Případy, kdy štěpnost prehnitu [podle (001)] zastupujícího klinozoisit zaujímá polohu rovnoběžnou s podélnou štěpností klinozoisitu, zdají se býti nahodilé; prehnit zastupuje klinozoisit nejspíše bez jakékoliv pravidelnosti vzájemné orientace.

Výskyt prehnitu stejně jako i klinozoisitu neomezuje se na drůzy, kory a žilky; oba minerály hojně se vyskytují i v hornině samé. V místech, kde hornina je prostoupena žilkami prehnitovými (eventuelně prehnit + klinozoisit), amfibolit, který jinak v té lokalitě je skoro vždy složen z amfibolu a plagioklasu, v sousedství těchto žilek je složen výhradně z amfibolu (neb aktinolitu), mezi nímž prostory vyplňuje buď prehnit sám, nebo prehnit s klinozoisitem, nebo i klinozoisit sám. Týž ráz má hornina i v podloží drůz a kor. V hornině prehnit někdy jest uspořádán v rovnoběžné vrstvy, někdy se sbírá do větších partií, které tvoří bílé skvrny mezi zelenými amfiboly, častěji ale jest dosti rovnoměrně přimíšen mezi amfiboly.

Když v hornině vyskytují se pohromadě i prehnit i klinozoisit, jest poslední vzhledem k prvnímu ještě patrně idiomorfní, což je zvlášť zřejmo tam, kde prehnit mezi amfiboly je uspořádán ve šmouhách, ve kterých leží svobodně vyvinuté sloupce klinozoisitu. Ale na místech, kde oba minerály tvoří drobně zrnitou výplň mezi amfiboly, idiomorfismus klinozoisitu klesá na 0; oba minerály jsou allotrimorfní.

Složení kor nebo žilek nestojí v užší souvislosti s obsahem výplní sousední horniny. Hornina, ve které prostory mezi amfibolem vyplňuje skoro výhradně klinozaisit, na kůře má kromě klinozoisitu dosti veliký podíl prehnitu, aneb naopak: hornina pod korou, v níž je přítomen výhradně celistvý, mléčně bílý prehnit, obsahuje mezi amfiboly oba minerály skoro ve stejném množství. V jiných místech široká trhlinová výplň se silně převládajícím klinozoisitem prochází horninou, v níž jest přítomen výhradně jen prehnit; tato trhlinová výplň oddělena jest od horniny vrstvou celistvého prehnitu asi 0·8 *mm* silnou. Hranice žilek, kor i drůz s horninou jsou obyčejně ostré.

V hornině, kde jsou prostory mezi amfiboly vyplněné prehnitem, je patrna proměna amfibolů. Hnědě-zelený, intensivně zbarvený, pleochroický amfibol horniny na mnohých místech koroduje se prehnitem, při čemž někdy nastává odbarvení amfibolu. Amfibol často rozpadá se na několik

partií obklopených prehnitem. Korose amfibolu není však silná; hranice korodovaných individuí amfibolu a prehnitu je vždy ostrá.

Na místo amfibolu často nastupuje v proměněných partiích amfibolu světlý žluto-zelenavý, silně pleochroický aktinolit. Amfibol úplně mizí. Taková místa horniny i makroskopicky mají velmi světlé barvy. Široké nepravidelné sloupce aktinolitu často jsou zakřiveny a vždy silně rozpukány na tenké sloupečky podle směru prismatické štěpnosti; k tomu jemnému rozpukání druží se méně husté rozpukání ve směru příčném. Prehnit proniká po trhlinách prismatické štěpnosti aktinolitu a zatlačuje větší část jeho. Aktinolit silně se odbarvuje. Na místech, kde mezi aktinolitem vyskytuje se skoro samotný klinozoisit, poslední zatlačuje aktinolit docela analogicky jako prehnit. Klinozoisit uspořádá se ve šmouhy různé formy podél prismatické štěpnosti aktinolitu a často zháší se směrem aktinolitové štěpnosti rovnoběžně. (Tab. I., obr. *2.*) Prehnit a klinozoisit zatlačujíce hmotu aktinolitovou nezastupují ji drobně zrnitým agregátem, nýbrž, naopak, často zbytky několika různých sloupců aktinolitu jeví se zachyceny jedním zrnem prehnitu. Menší partie aktinolitu oddělené od větších jeho individuí podle štěpných trhlin jsou potom hojně roztroušeny v prehnitu.

Jak v amfibolu (event. aktinolitu), tak i v prehnitu a klinozoisitu jsou hojná zrna titanitu různé velikosti (od 0·5 až do 0·1 *mm* i méně). Titanit někdy obsahuje v sobě zrnka železné rudy, často je zakalen a obklopen obalem leukoxenovým. Týž leukoxenový obal objevuje se někdy i kolem zrnek železné rudy.

Blíže ke hranicím žilek a kor nebo v partiích amfibolitu obklopených žilkami prehnitu jest proces proměny amfibolu a aktinolitu ještě markantnější. Zde lze někdy pozorovati, jak temně hnědý amfibol, skoro úplně idiomorfní, často znatelně korodovaný prehnitem, dostává v některých partiích vedle korodovaných míst barvu sytě travnato-zelenou. Kolem takových individuí amfibolu objevuje se v prehnitu hojnost drobounkých vrostlic chloritových, které většinou mají formu protažených pásek nebo obloučků, kolmo ke směru protažení jemně rozpukaných. Mají hodně nízké interferenční barvy; náleží penninu. Barva penninu místy je slabě zelená, místy nahnědlá od hydroxydu železa. Množství těchto chloritových vrostlic bývá tak veliké, že při jejich úplně nepravidelném uspořádání v prehnitu tato místa činí dojem hustého poikilitického prorůstání prehnitu chloritem. Klinozoisit přítomný v takových místech vyskytuje se ve velikých, poněkud idiomorfnícvh sloupcích, které jsou atakovány prehnitem, s nímž se spolu do klinozoisitu dostávají i vrostlice chloritové. Zdá se však, že někdy chloritivé vrostlice jsou obsaženy v klinozoisitu i když není prehnit přítomen. Je zajímavo podotknouti, že ani v hornině, ani v žilkách nebyla pozorována přímá chloritisace hnědého amfibolu; chlori-

tisují se vždy jemně rozpukané světle zbarvené aktinolitické odrůdy; právě tak je patrný i rozdíl v chování odrůd amfibolických a aktinolitických k atakování prehnitem: odrůdy amfibolické jen poněkud se korodují (a to vždy s ostrými hranicemi), kdežto odrůdy aktinolitické docela pozvolně přecházejí v prehnit nebo klinozoisit.

Na místech zvláště intensivní proměny aktinolitu pozorujeme jak v hornině, tak i v podloží prehnitových ker i v žilkách prehnitu množství drobných zrnek železné rudy. Taková místa obyčejně jsou zbarvena hydroxydem železa. Kromě toho v prehnitu a klinozoisitu jsou roztroušena drobounká zrnka titanitu, často s leukoxenem, k nimž se druží hojnost velmi drobných neurčitelných vrostlic zemitého vzezření. V místech větší koncentrace těchto akcesorií vzhled prehnitových agregátů je kalný (matný), skoro neprůhledný; kalnou šedou barvou probleskují vysoké interferenční barvy prehnitu.

Někdy tenounké (asi 0·5 *mm* i méně) žilky prehnitu, probíhající horninou a ostře protínající amfiboly a prehnit vyplňující prostory mezi ním, mizejí v sousední kůře neb žilce prehnitové. Na jedněch místech tyto žilky mladšího prehnitu jsou mnohem čistší nežli starší prehnit, někdy ale naopak přinášejí s sebou větší množství drobných akcesorií, kterými zakalují i původně čistý prehnit.

V podloží kor i v prehnitových žilkách zůstávají mnohdy po aktinolitu a amfibolu jen nepatrné zbytky. Jestliže v hornině hmota prehnitová (eventuelně klinozoisitová) prodírá se do aktinolitu po štěpných trhlinách, nikdy nezabírá celého zrna, naproti tomu, zde individua aktinolitu docela pozvolnými přechody úplně mizí v prehnitu. Někdy silně odbarvené zbytky aktinolitu s velmi jemnými trhlinami štěpnosti ještě zachovávají svoji zelenou barvu, někdy však přítomnost jich prozrazuje jen velice jemná štěpnost, která podle svého rázu a optické orientace nepatří prehnitu. V některých případech tyto jemné, dokonalé a husté trhlinky v prehnitu, které mohou patřiti jen zatlačenému aktinolitu, jsou uspořádány buď ve směrech prehnitových prismat nebo rovnoběžně s jeho rovinou optických os (010). Často v prehnitu jsou roztroušeny drobné jemné jehličky aktinolitu, které místy nabývají radiálního uspořádání. Tyto aktinolitové jehličky bývají někdy proměněny v klinochlor nepatrně zeleně zbarvený. Kromě zbytků aktinolitu a aktinolitových jehliček v podloží kor bývají přítomny zaoblené, většinou drobné »úlomky« neproměněného amfibolu a ve velikém množství dosti veliké zelené skvrny penninu nepravidelných obrysů. K nim se druží drobounká zrnka titanitu, železné rudy a šedé mikrolity zemitého vzezření. Tyto akcesorie (zbytky aktinolitu, úlomky amfibolu, chlorit atd.) objevují se v korách a menších drůzách i dále od podložní horniny a zdají se pocházeti z podloží.

Je možno, že i úzké smoužky s jemnými hustými trhlinami přítomné ve větších individuích klinozoisitu podle analogie s týmiž smoužkami v prehnitu patří zatlačenému aktinolitu. Šmouhy tyto bývají buď skoro úplně bezbarvé s několika zrnky železné rudy nebo častěji jsou zbarveny hydroxydem železa na hnědo.

Povaha zbytků aktinolitu přítomných v žilkách celistvého prehnitu, jakož i velmi nepravidelné často se slepým ukončením formy žilek samotných, nasvědčují tomu, že žilky tyto nejsou pouhou výplní už dříve hotových trhlin horniny, nýbrž povstaly větším dílem zatlačováním aktinolitu prehnitem. Zde bývají přítomny prehnitové agregáty zvláštní formy. Agregát prehnitu v celku je silně protažený podle směru velmi husté, ale nedokonalé štěpnosti a skládá se z tenkých tabulek protažených ve směru větší optické elasticity (β'); kolmo na směr štěpných trhlin probíhá směr menší optické elasticity (γ) a rovina os optických. Zhášení agregátu je skoro současné, rovnoběžné se směrem štěpných trhlin. Charakter štěpnosti a silně protažená sloupcovitá forma těchto agregátů prehnitu odlišuje je od obyčejných agregátních forem prehnitu a dovoluje z těchto forem usuzovati na pseudomorfosu prehnitu po aktinolitu, při které štěpnost prehnitu podle (001) odpovídá štěpnosti aktinolitu podle (110).

Na rozdíl od obyčejných případů, kdy amfibolit v podloži prehnitových (event. prehnit. + klinoz.) kor a drůz nebo v sousedství s prehnitovými žilkami je znatelně proměněn, amfibolit, na němž se vyskytují tenké kůry klinozoisitu s kalcitem, je úplně čerstvý, zcela prostý prehnitu a klinozoisitu s velmi čerstvými, neproměněnými živci.

IV.

Výsledky a závěry.

Klinozoisit a zoisit β. Prosečský klinozoisit (zvláště jeho růžová odrůda) jeví dvě zajímavé vlastnosti. předně vyniká mezi všemi odrůdami klinozoisitů známými dodnes z přístupné literatury neobyčejně nízkými exponenty lomu a za druhé jest sdružen se zoisitem β, který až dosud byl popsán pouze v asociaci se zoisitem α.

Jak je známo z důkladné práce Goldschlagovy,[2]) optické vlastnosti isomorfní směsi $HCa_2Al_3Si_3O_{13}$ (aluminiumepidot) a $HCa_2Fe_3Si_3O_{13}$ (ferumepidot) pravidelně se mění při postupném klesání

[2]) M. Goldschlag: Über die optischen Eigenschaften der Epidote. Tschermaks M. u. P. Mitteilungen XXXIV. 1917, str. 23—60 (53—58).

procentuelního obsahu ferumepidotu, při čemž za trvalého pozvolného klesání velikosti exponentů lomu, dvojlomu a změny polohy optických os přibližně při 11% obsahu ferumepidotu z opticky negativních (epidot) přecházejí do opticky positivních (klinozoisit). Ale při 11—14% obsahu ferumepidotu vystupují dosti veliké úchylky od této pravidelnosti. Tak na příklad z tabulky udané v uvedené práci Goldschlagově vidíme, že pro odrůdu klinozoisitu nejchudší železem (0% ferumepidotu) ze Schwarzensteinské-Alpy v Zillertalu stanovil Goldschlag

$$\alpha = 1{\cdot}7136 \qquad \beta = 1{\cdot}7172 \qquad \gamma = 1{\cdot}7188 \qquad \gamma - \alpha = 0{\cdot}005,$$

kdežto pro odrůdu s 12% ferumepidotu (při 5·75 $Fe_2O_3 + 1{\cdot}08$ FeO)[3]) od Ariège v Pyrenejích, stanovil Lacroix

$$\alpha = 1{\cdot}709 \qquad \beta = 1{\cdot}714 \qquad \gamma = 1{\cdot}720 \qquad \gamma - \alpha = 0{\cdot}009.$$

Jakýchkoliv vysvětlení těchto nepravidelností Goldschlag nenachází. Zrovna tak i pozdější práce se vztahem ke Goldschlagovým studiím, jak je to viděti z referátu Niggliho[4]) z r. 1922, neposkytují dokladů k vysvětlení povahy nižších (železem chudších) členů skupiny epidotové.

F. Zambonini podobně jako Goldschlag studoval závislost optických vlastností řady klinozoisit-epidotové na chemickém složení a graficky znázorňuje souvislost chemického složení s velikostí úhlu optických os $2V$ a hodnotu úhlu (ω), tvořeného normálou plochy (001) s optickou osou A.[5]) Ale při uspořádání v literatuře popsaných výskytů klinozoisitů a epidotů v řadu podle chemického složení shledává Zambonini u velikého počtu případů, že, na jedné straně při stejném chemickém složení minerálů optické vlastnosti jejich jsou hodně odlišné, i naopak při odlišném chemickém složení optické vlastnosti jsou skoro identické.[6]) Na základě těchto údajů rozeznává Zambonini mezi řadou klinozoisit-epidotovou dva druhy krystalů:

normální, totiž takové, u nichž optické vlastnosti jeví pravidelnou funkcionální závislost na chemickém složení a shodují se s vypočítanou křivkou

a anomální (»cristalli misti anomali«), totiž takové, jejichž optické vlastnosti nejeví pravidelné souvislosti s chemickým složením.

---

[3]) Handbuch der Mineralchemie (Doelter) B. II. H. 10—11, str. 811, anal. č. 5.

[4]) Zeitschrift für Krystallographie. Band 57; H. 3; str. 315—327.

[5]) F. Zambonini: Sulla clinozoisite di Chiampernotto in Val d'Ala. Roma. 1920. Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia. XLVII. 1°—4°, str. 95—97; 87—88.

[6]) F. Zambonini: Sui cristalli misti stereoisomeri nella serie clinozoisite-epidoto. Rendiconti della R. Accademia Nazionale del Lincei. XXX. s. 5ª, 3°—6°. Roma. 1921. Nota III, str. 163—165.

Příčinu existence těchto anomálních členů v řadě klinozoisit-epidotové Zambonini vysvětluje schopností chemické substance tvořiti stereoisomery. Při předpokladu, že hydroxylový radikál v chemické stavbě klinozoisitu jest vázán na Al podle schematu $[SiO_4]_3 \begin{matrix} Al_2 \\ Al(OH) \\ Ca_2 \end{matrix}$, jsou při isomorfním zastupování hliníku železem dány 2 možnosti (respekt. 3, z nichž jedna se neuplatňuje) a to: Fe může zastupovati buď jen Al s hydroxylovou vazbou, nebo z části Al s hydroxylovou vazbou, z části Al svobodný. Tedy, následkem různé struktury chemické molekuly, i při stejném kvantitativném složení mohou vzniknouti krystaly různých fysikálních vlastností — »cristalli misti stereoisomeri«.[7])

Krajní členové řady normálních klinozoisitů podle tabulky Zamboniniho[8]) doplněné příslušnými exponenty lomu a % obsahem Fe_2O_3 mají tyto vlastnosti:

Lokalita	Autor	% Fe_2O_3	% ferrumepidotu	α	β	γ	$2V\alpha$
Rothenkopf [9])	Weinschenk	3·52	8	1·7238	1·7291	1·7343	89°16′
Monte Tovo [10]	Zambonini	3·01	6·8	—	—	—	91°13′
Goslerwand [11])	Weinschenk	1·68	3·8	1·7176	1·7195	1·7232	98°20′
Alpe Schwarzenst.[12])	Goldschlag Kehldorfer	0	0	1·7136	1·7172	1·7188	114°40′

Ze srovnání optických konstant prosečského klinozoisitu s vlastnostmi klinozoisitu uvedené normální řady Zamboniniho plyne, že prosečský klinozoisit rozhodně není členem této řady, vyznačené normální isomorfní mísivostí, nýbrž patří mezi klinozoisity anomální.

Neobyčejně nízké hodnoty exponentů lomu prosečských klinozoisitů mají určitou analogii s klinozoisity jiných lokalit, u nichž tyto hodnoty jsou rovněž nižší nežli u normálních klinozoisitů s 0% ferrumepidotu. Jsou to:

---

[7]) F. Zambonini: Sui cristalli misti stereoisomeri... Nota III., str. 166.

[8]) F. Zambonini: Sulla clinozoisite di Chiampernotto... str. 96.

[9]) E. Weinschenk: Ueber Epidot und Zoisit. Zeitschrift für Krystallographie. 26, str. 165.

[10]) F. Zambonini: Sui cristalli misti... nota I., str. 84.

[11]) E. Weinschenk: Ueber Epidot... Zeitschr. f. Kryst. 26, str. 167—169.

[12]) M. Goldschlag: Über die optischen Eigenschaften der Epidote. Tschermaks Min. und. Petr. Mitteilungen. XXXIV. 1917, B I., str. 31.

Lokalita	Autor	α	β	γ	γ-α
Proseč		1·710	—	1·720	0·008
Val d'Ala [13]	Balzac	—	1·7113	—	—
Ariège [14]	Lacroix	1·709	1·714	1·720	0·009
Long Hill[15] (Amerika)	Shannon	1·706 ± 0·003	1·710 ± 0·003	1·720 ± —	0·003
Proseč		1·702	—	1·708	—

Z této tabulky lze viděti, že nízké hodnoty exponentů lomu klinozoisitů nejsou nahodilé a že anomální klinozoisity svými exponenty lomu hodně se blíží zoisitům.

Dále jest prosečský klinozoisit zajímavý tím, že u něho pozorujeme na jednom a témž individuu sdružení se zoisitem β. Ale vztahy zoisitu β ke klinozoisitu nepodobají se zákonitému srůstání dvou modifikací,[16]) nýbrž upomínají na přechod jednoho v druhý.

Ačkoliv takové vlastnosti prosečského klinozoisitu činí jej vhodným materiálem pro studium vztahů mezi zoisity a anomálními klinozoisity, nemůžeme na základě uvedených pozorování dělati nějakých závěrů, neboť ani v našem případě ani v literatuře vůbec nejsou detailně prostudovány vlastnosti zoisitu β a zvláště chybí dostatečné údaje o vztazích obou řad — zoisitové a klinozoisitové.

Musíme však v našem případě vytknouti následující okolnosti: na jednom a témže místě vyskytují se i intensivně zbarvené epidoty i šedé klinozoisity vedle zoisitů; podle svých optických vlastností prosečský klinozoisit je značně »anomálný«; konečně, poměr klinozoisitu k zoisitu β neupomíná na zákonitý srůst dvou různých modifikací.

Tedy mohli bychom vysloviti domněnku, že *zde máme na jednom a témže krystalu přechod klinozoisitových optických vlastností ve vlastnosti zoisitu β.* Tento přechod

---

[13]) *Fausta Balzac*: Sulla presenza di termini clinozoitici nei giacimenti classici di epidoto di Val d'Ala. R. Accademia delle scienze di Torino. 1915—1916, str. 910.

[14]) l. c.

[15]) Neues Jahrbuch für M. G. u. P. 1923; II b., str. 333 (ref.). U tohoto epidotu stanovil *Shannon* 5·29% Fe_2O_3; 0·52% FeO a 0·60 Fl. Přítomnost fluoru v tomto zajímavém epidotu dovoluje domněnku, zdali by nemohly značně nízké exponenty lomu býti podmíněny přítomností fluoru.

[16]) jak na příklad popisuje *Termier* srůst zoisitu α a zoisitu β na zoisitu od Ducktownu. Bull. Soc. Franç. Mineral. 1898. XXI., str. 159—160.

mohl by se vyložiti několikerým způsobem, nejpravděpodobnějším zdál by se však výklad stereoisomerií látky ve smyslu Zamboniniově.[17])

Zajímavo jest povšimnouti si rázu pleochroismu u různých členů skupiny zoisit-epidotové, který byl pozorován na prosečských exemplárech. Tabulka níže uvedená podává jeho přehled:

Krystal. osy (pro zoisit v postav. Weinschenka)	Klinozoisit	Zoisit β	Zoisit α
a . . . γ —	růžový / zelený	α — růžový	β — růžový
b . . . β —	sv. růžový (amethyst) / zeleno.-žlutý	β — amethyst.	α —
c . . . α —	sv. žlutý / zelen.-žlutý	γ —	γ — žlutavý

Ráz pleochroismu prosečských minrálů úplně souhlasí s pleochroismem, který udává Rosenbusch[18]) pro tytéž minerály jiných lokalit a pleochroismem určeným F. Slavíkem na zoisitu od Boroviny u Třebíče.[19])

Jak je viděti z tabulky při různé optické orientaci u různých členů skupiny, mají paprsky, kmitající ve směrech blízkých těmže krystalogickým osám vždy u všech členů skupiny tytéž odstíny zbarvení. Zjevy úchylky směrů absorpce od směrů optické elasticity a jich bližší souvislost se směry krystalografickými známé u epidotů[20]) rozšiřují se tedy na celou skupinu se stejným rázem absorpce pro stejné krystalografické osy.

Prehnit od Proseče je zajímavý i svými optickými konstantami a zvláště rozmanitosti mikroskopické a agregátní struktury. Exponenty lomu liší se značně od stanovených Des Cloizeauxem na prehnitu od Ratschinges a to:

$$\alpha = 1{\cdot}616 \qquad \beta = 1{\cdot}626 \qquad \gamma = 1{\cdot}649.$$

---

[17]) Na vztahy třech modifikací — zoisit α, zoisit β a klinozoisit — Termier se dívá jako na projev polymorfismu krystalické struktury P. Termier. Sur une association d'Epidote et de Zoïsite... Bull. Soc. Franç. Min. 1900. XXIII, str. 60—61.

[18]) Rosenbusch-Wülfing. Mikr. Physiographie der... Mineralien, II B., str. 171 a 284.

[19]) Rozpravy České Akademie. Roč. X., tř. II., str. 16—19.

[20]) Handbuch der Mineralogie. Carl Hintze. II. 216—217.

Stejně liší se i dvojlom γ-α = 0·024 prosečského od γ-α = 0·030, stanoveného Lacroixem.[21]) Poněkud blíží se prehnitům popsaným H. v. Eckermannem ze Švédska[22]) a Laitakarim od Helsingforsu,[23]) jejichž optické konstanty jsou tyto:

Mansjö (Švédsko)		Helsingfors	
α = 1·6152	γ-α = 0·031	α = 1·6157	2V = 65°55′
β = 1·6250	β-α = 0·009	β = 1·6243	h = 2·918
γ = 1·6462	2V = 68°40′	γ = 1·6454	

Tedy prosečský prehnit při velmi blízkém β-α, blízké hodnotě pro α a skoro stejné hustotě značně liší se i od uvedených prehnitů jinými exponenty lomu.

Habitus krystalů jest jak i v jiných lokalitách prehnitu několikerý; v drůzách kubický, v žilkách i korách často tabulkovitý podle (001) a poněkud protažený podle kryst. osy *a* nebo *b*.

Pokud se týče mikroskopické struktury prehnit jeví jemné lamelování rázu vřetenovitých vláknének. Lamely tyto jsou uspořádány zhruba dle směrů prismatických, tedy dle směrů analogických těm, jež byly pozorovány Beutelem na prehnitu od Striegau,[24]) nebo přijímají směr makrodiagonály, tedy jeden ze směrů pozorovaných Des Cloizeauxem na prehnitu od Farmingtona.[25]) Jemné mřížkování, podobné mikroklinovému, povstává následkem křížení těchto několika směrů. Na témž individuu může existovati najednou i několik druhů lamelování; směr, jímž probíhají lamely, někdy znatelně se ukloňuje od výše uvedených.

Interferenční barvy normální; disperse optických os není.

Prehnit jak prosečských tak i čáslavských lokalit má velikou náklonnost k tvoření větších agregátů cestou srůstání menších (až mikroskopických) individuí v polohách neúplně rovnoběžných. Tyto vlastnosti prehnitu jsou analogické s prehnitem od Jordansmühlu.[26])

Na prehnitu prosečském (a čáslavském) tvoření agregátů děje se hlavně podle těchto způsobů: 1. Menší individua srůstají nad sebou plo-

---

[21]) Handbuch der Mineralogie. Carl Hintze. II. 417.

[22]) H. v. Eckermann: The rocks and contact minerals of the Mansjö Mountain Meddelanden fran Stockholms Högskolas Mineralogiska Institut. N 28, 1922, str. 377.

[23]) Neues Jahrbuch für M. P. u. G., 1915, II., str. 148.

[24]) Hintze: Handb. d. Mineralogie, str. 472.

[25]) l. c., str. 471.

[26]) l. c., str. 478.

chami basipinakoidálními (001) s nepatrným otočením kolem osy *c*; forma individuí různá. 2. Individua protažená podle brachydiagonály (*a*) srůstají s nepatrným otočením kolem jedné z os buď rovnoběžně k sobě, nebo s radiálním uspořádáním, nabývajíce při tom vějířovitého nebo hřebenovitého tvaru. 3. Tabulky podle (001) silně protažené podle makrodiagonály (*b*) srůstají nad sebou ploškami basipinakoidálními. Na tomže větším zrnu lze někdy spatřiti srůstání podle několika uvedených způsobů.

Agregátní srůstání a jemně mikroskopické lamelování se dějí podle těchže způsobů orientace menších částek, takže lamelovaná individua prehnitu jsou zbudována z polysyntheticky srostlých menších rombických individuí prehnitových.

Zvláště musí býti vytčen proces pseudomorfosy prehnitu po klinozoisitu, který, zdá se, ještě nebyl popsán. Opačný proces, totiž pseudomorfosu zoisitu po prehnitu, popisuje Lacroix[27]) z kontaktu žuly z vápencem. Schema tohoto procesu Lacroix vykládá jako zastoupení dvou atomů vodíku prehnitu $(SiO_4)_3Al_2Ca_2H_2$ dvojmocným radikálem Al(OH) zoisitu $(SiO_4)_3Al_2Ca_2Al(OH)$. Pro náš případ můžeme přijmouti toto schema v obráceném smyslu. Železo, které se uvolňuje při procesu záměny klinozoisitu prehnitem, vylučuje se ve formě železných rud. Tedy prosečská lokalita zdůrazňuje genetickou příbuznost obou minerálů, jejichž proces proměny probíhá v obou směrech. Reakce prehnit—zoisit (ev. klinozoisit) je zvratná.

Sukcese těchto minerálů v prosečské lokalitě je zřejmá epidot-prehnit, to jest analogická sukcesi Čáslavských lokalit, uvedené J. Kratochvílem.[28]) Rozdíl jest ten, že v čáslavských lokalitách po prehnitu tvoří se ještě zeolity a kalcit. Stupeň idiomorfismu klinozoisitu vůči prehnitu však v prosečské lokalitě místy klesá až na nulu. Když vezmeme v úvahu, že v jiných případech [29]) pozorována byla sukcese obrácená (prehnit-epidot), tehdy to znamená, že i sukcese obou minerálů může míti obojí směr.

Jak klinozoisit tak i prehnit zřejmě vznikají následkem proměny amfibolů, event. aktinolitů, které na jiných místech jsou úplně zatlačeny hmotou prehnitovou. Při procesech této proměny aktinolit se odbarvuje; někdy nastává tvoření chloritu a vylučování volné železné rudy (většinou silně proměněné). Některé formy prehnitu dovolují usuzovati na pseudomorfosu prehnitu po aktinolitu.

---

[27]) Lacroix: Les calcaires à prehnite des contacts granitiques des Hautes Pyrenées. Bull. S. Franç. Mineral. XXIV. 1901. 22—27.

[28]) J. Kratochvíl: Nerosty okolí čáslavského. 41. výroční zpráva Klubu přírodov. v Praze, 1911.

[29]) Handbuch der Mineralchemie. Doelter. II. 1/11. H, str. 857.

Kromě toho třeba usuzovati, že prehnit v amfibolitu zastupuje místo zmizevšího plagioklasu horniny. Prehnit je přítomen ve dvou generacích.

Čáslavské lokality poskytují případ proměny pyroxenů (diopsid?) v prehnit.[30])

Pokud se týče otázky genese klinozoisitu a prehnitu, podle způsobu jich výskytu a paragenese, jich vznik musí býti vázán na vliv hydotothermálních procesů způsobených injekcí žuly v amfibolit.

Procesy vyvolané touto injekcí neprobíhaly rychle, nýbrž pozvolna, při čemž v jich vývoji můžeme rozlišovati 2 fáze.

První fáze odpovídá tvoření prehnitu i klinozoisitu v amfibolitu (v samé hornině) z amfibolů i živců, proces uralitisace a chloritisace. Procesy proměny v této fázi mohly probíhati i ve stavu plasticity. Proces chloritisace, který zřejmě se projeví vždy jen v podloží kor a drůz, musil by patřiti konci této fáze.

Ke druhé fázi — ukončení procesu — patří vyplnění trhlin a dutin koncentrovanými horkými roztoky obsahujícími substance hmoty prehnitové, klinozoisitové a jiné látky nabyté v procesech proměny první fáze.

Různé fysikálně-chemické podmínky v době celého procesu této proměny vysvětlují jak různý stupeň isomorfismu klinozoisitu, tak různý stupeň proměny aktinolitu i ráz proměny klinozoisitu v prehnit poněkud odlišný na různých místech. Aspoň pro některé případy třeba mysliti, že proměna klinozoisitu v prehnit dělá se ne ve stavu plasticity, nýbrž v periodě vykrystalisování prehnitu z nasyceného roztoku, t. j. na konci procesu tuhnutí roztoku.

Genese klinozoisitu při takových podmínkách byla by nejobyčejnější, shodují se s názorem Alfreda Bergeata.[31]) Proměněný porfyrit od Tejřovic a diabas od Chuchle[32] nasvědčují vzniku prehnitu z plagioklasů v každém případu ne působením procesů větrání, nýbrž snad při

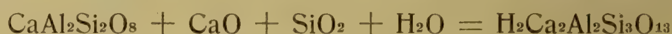
---

[30]) K charakteristice procesů proměny a vzniku minerálů skupiny zoisit-epidotové bude zajímavo uvésti příklad proměny epidotu (klinozoisitu) v granát + křemen (Tab. I., obr. 1) na kontaktu ruly s amfibolitem ve Žlebech, ačkoliv jinak tato lokalita bližší analogie s Prosečskou nemá, a důkladněji studována nebyla. Tedy i známý proces proměny granátu v epidot může se díti obráceným směrem, t. j. reakce epidot-granát je zvratná, kteroužto domněnku vyslovuje Goldschlag. (Handbuch der Mineralchemie. Doelter. II. 10/11 H., str. 846.

[31]) Handbuch der Mineralchemie. Doelter 856.

[32]) Z této lokality jako trhlinový minerál prehnit byl popsán Vrbou bez zmínky o způsobu jeho výskytu v hornině samé. Preis und Vrba. Ueber einige Mineralien aus dem Diabas von Kuchelbad. Sitzungsbericht der kön. böhm. Gesellschaft. der Wissensch., Prag, 1880.

podmínkách podobných podmínkám vzniku klinozoisitu. I v literatuře je dosti mnoho analogických případů. Lacroix popisuje vznik prehnitu, vázaný na kontaktní působení žuly na vápenec.[33]) Proces prehnitisace amfibolů a živců při působení plynů a roztoků uvádí Himmelbauer[34]) z Hornu (v Dolních Rakousích), kde prehnit vyskytuje se parageneticky s fluoritem. Eckermann[35]) mluví o prehnitu primárním a sekundárním; pro proces proměny anorthitu v prehnit udává takovéto schema:



$$CaAl_2Si_2O_8 + CaO + SiO_2 + H_2O = H_2Ca_2Al_2Si_3O_{13}$$

Známé jsou výskyty prehnitu s apatitem, hojné s axinitem, s rudním křemenem.

Všecko mluví pro to, že prehnitu jako horninovému minerálu musí býti věnováno mnohem více pozornosti a že velice rozmanité výskyty jeho jsou mnohem rozšířenější, nežli se to obyčejně předpokládá.

Panu profesoru J. Kratochvílovi a prof. F. Slavíkovi za zájem a laskavé přispění při provedení této práce autor vzdává vřelé díky. Upřímný dík platí též p. preparátorovi Rejskovi za zhotovení mikrofotografií.

**Petrografické oddělení mineralogického ústavu
Karlovy university v Praze.**

---

[33]) Lacroix: Les calcaires à prehnite ... Bull. S. Franç. Min., 1091, str. 22—27.

[34]) A. Himmelbauer: Neue Mineralvorkommen. Tscherm. Min. u. Petr. Mitt. XXXII. 1913, str. 140—142.

[35]) H. Eckermann: The rocks and contact minerals of the Mansjö Mountain. Maddelanden fran Stockholms H. Mineral. Institut, č. 28, 1922, str. 379.

La clinozoïsite et la préhnite des environs de Proseč près de Pelhřimov.

Par Alexandre Orlov.

Résumé du texte tchèque.

La clinozoïsite et la préhnite se rencontrent comme filonnets et remplissent les fentes et les cavités de l'amphibolite des environs de Proseč près du contact de celle-ci avec deux filons granitiques.

Les propriétés de la clinozoïsite sont variables sur une très grande échelle. Une de ses variétés possède comme indices de réfraction:

$$\alpha \gtreqless 1{\cdot}702, \qquad \gamma = 1{\cdot}708 \pm 0{\cdot}001.$$

La densité déterminée à l'aide de la liqueur de Rohrbach a donné la valeur 3·352.

Biréfringence très faible; dispersion des axes optiques généralement très grande. Le grandeur de l'angle des axes optiques est variable sur le même individu.

Le minéral n'est pas homogène: *la clinozoïsite est associée à la zoïsite β.* Les lamelles de la zoïsite β suivent généralement la direction des clivages (100) et (001) de la clinozoïsite. Très fréquemment les zones de la zoïsite affectent la forme de coins allongés conservant dans leur ensemble une direction parallèle aux traces de clivages mentionnés. Souvent aussi elles sont disposées en plages tout à fait irrégulières.

Les limites entre la clinozoïsite et la zoïsite β n'apparaissent qu'avec les nicols croisés; dans la plupart des cas elles sont indistinctes et floues, changeant quelquefois les contours avec la rotation de la platine du microscope.

Les plages de la zoïsite β, par opposition avec celles de la clinozoïsite, possédant une teinte de polarisation bleu anormale, ont en lumière polarisée une teinte grise ou gris-jaunâtre; les directions d'élasticité optique de la zoïsite et de la clinozoïsite sont de signe contraire (n'_g de l'une correspond a n'_p de l'autre et vice-versa). L'orientation optique des pla-

ges plus étroites de la zoïsite β, possédant une teinte de polarisation grise pas très franche, n'est pas nettement inverse par rapport aux sections de la clinozoïsite; en lumière convergente ces plages de la zoïsite β donnent une figure peu nette et quelquefois légérement assymétrique; les plages plus grandes montrent une forte dispersion des axes optiques avec $\varrho > v$ autour de la bissectrice aiguë n .

L'autre variété de la clinozoïsite de cette localité a des teintes grismates et possède des indices de réfraction un peu plus élevés que la première variété, à savoir

$$\alpha \leqq 1·710 \ (> 1·708) \qquad \gamma \leqq 1·720.$$

La densité varie entre 3·356 et 3·360.

La grandeur de l'angle des axes optiques déterminée à l'aide de la platine universelle de Fedoroff varie de $2V = 90^{0}$ jusqu'à $2V = 80^{0}$; elle doit certainement descendre encore au-dessous de 80°.

Le caractère général de la structure est analogue à celui de la première variété, avec cette différence que la 2^e variété présente un passage tout à fait insensible au caractère propre à l'épidote.

Avec la clinozoïsite on trouve également, quoique en quantité minime, de petits cristaux d'épidote verte. En outre, l'étude de la poudre au microscope a permis de constater la zoïsite α.

Les deux variétés de la clinozoïsite de Proseč se placent d'après leurs indices de réfraction, bien plus bas que les derniers (pauvres en fer) *termes du groupe de la clinozoïsite qu'indique* Goldschlag. Acceptant le point de vue Zambonini sur la nature des membres pauvres en fer de la série clinozoïsite-épidote, nous devons placer la clinozoïsite de Proseč dans le groupe des clinozoïsites anomales (»cristalli mist anomali« de Zambonini). Comme cela est indiqué à la page 23 du texte tchèque, les clinozoïsites avec indices de réfraction plus petits que ceux de la clinozoïsite ne contenant pas de Fe_2O_3 sont connues aussi dans d'autres localités.

Quant à l'association peu fréquente de la zoïsite β avec la clinozoïsite, ou peut, prenant en considération le caractère anomal de la clinozoïsite et le mode dont elle est liée à la zoïsite β, faire une supposition provisoire et sous toutes réserves qu'il s'agit ici d'une transition des caractères optiques »clinozoïsitiques« à ceux de la zoïsite β sous l'influence des conditions physiques et chimiques particulières de cristallisation.

La cause d'une telle modification des proprietés optiques peut être cherchée dans la stéreoisomérie de la substance comme l'entend F. Zambonini.

Il est curieux de remarquer que dans tous les membres du groupe épidote-zoïsite avec l'orientation optique différente, les rayons vibrants

dans les directions se rapprochant sensiblement des mêmes axes cristallographiques présentent les mêmes phénomènes d'absorption, à savoir: pour les rayons vibrant dans les directions voisines de l'axe cristallographique a (pour la zoïsite comme la place Weinschenk) la coloration est rose (ou verte), pour ceux, ayant une direction de vibration voisine de l'axe cristallographique c (pour la zoïsite — Wein.) — la teinte est toujours jaune de nuances variées.

Sur la préhnite nous trouvons surtout les faces (001) et (110). Les faces des pinacoïdes sont très étroites. Le basopinacoïde est strié parallèlement à la macrodiagonale (100). La densité déterminée par la méthode picnométrique donna la valeur de 2·916.

Les indices de réfractions sont:

$$\alpha = 1{\cdot}613 \qquad \beta = 1{\cdot}620 \qquad \gamma = 1{\cdot}635 \pm 0{\cdot}002.$$

On voit que les indices de réfraction sont plus petits que ceux que donnent Des Cloiseaux, Eckermann et Laitakari (page ?? du texte tchèque).

La biréfringence déterminée à l'aide du compensateur de Berek est

$$\gamma - \alpha = 0{\cdot}024, \qquad \beta - \alpha = 0{\cdot}008.$$

$2V$ = ca 70°. Pas de dispersion des axes optiques. Couleurs de polarisation normales.

Le minéral a une grande tendance à la formation d'aggrégats. Dans ces aggrégats les petits individus de formes variées s'accollent de différentes façons de manière à ce que chaque individu se trouve un peu tourné par rapport aux autres autour d'un axe cristallographique quelconque.

Les lamelles microscopiques semblables à celles décrites par Des Cloiseaux et Beutel répètent dans leurs traits généraux le mode d'accollement des aggrégats, c'est à dire suivent les directions prismatiques ou pinacoïdales.

La préhnite présente des pseudomorphoses suivant la clinozoïsite.

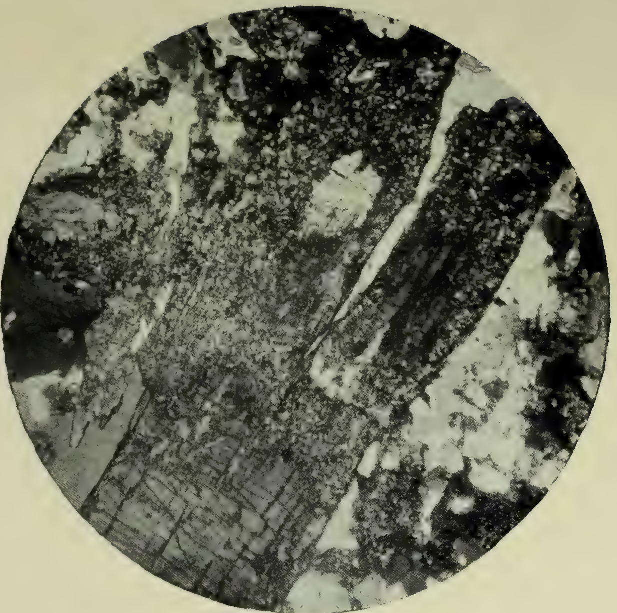
Cette formation n'a probablement encore jamais été signalée dans la littérature. Elle est inverse à celle décrite par Lacroix — pseudomorphose où la zoïsite remplace la préhnite. Ainsi donc la transformation préhnite-zoïsite serait réversible.

La préhnite et la clinozoïsite se rencontrent non seulement comme filonnets et croûtes; dans le voisinage de ces derniers l'amphibolite est consituée d'amphibole (éventuell. actinote) et de l'un des minéraux cités ou bien d'un aggrégat des deux. Nous avons ici de beaux exemples de la

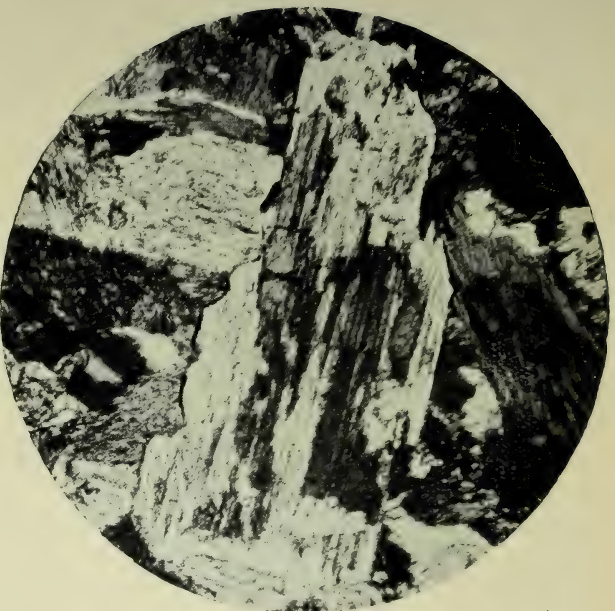
formation de la préhnite et de la clinozoïsite aux dépens de l'actinote (l'amphibole); cette transformation de l'actinote est accompagnée quelquefois d'une formation de la chlorite.

La génèse de la préhnite et de la clinozoïsite aux dépens des plagioclases et de l'amphibole doit être attribuée aux phénomènes de contact, provoqués dans l'amphibolite par l'injection du granite.

Section pétrographique de l'Institut minéralogique de l'Université Charles à Prague.



Obr. 1. Proměna klinozoitu v agregát křemene a granátu. (Str. 27.)



Obr. 2. Proměna aktinolitu v klinozoisit. Klinozoisit sleduje štěpné trhliny aktinolitu. (Str. 18.)



Obr. 1. Pseudomorfosa prehnitu po klinozoisitu. Sloupec klinozoisitu jest zastoupen agregátem drobných zrnek prehnitu. (Str. 16.)



Obr. 2. Zdvojčatěný krystal klinozoisitu; řez blízký (010). Po stranách štěpných trhlin podle (100) vystupují smouhy jiné optické orientace. (Str. 5.)

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICAT ONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 40.

Publications de l'Institut astronomique (prof. Heinrich) de l'Université Charles de Prague. Série II.
No. 4.

W. W. HEINRICH:

Sur une méthode pour étudier les trajectoires séculaires du problème de *n* corps. – Conditions générales pour les rotations et les librations des périhélies. I.

Premier mémoire.

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
KARLOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ CHARLES
REDIGÉES PAR

JAN ŠTĚRBA-BOEHM.

ROK 1925. ČÍSLO 40.

Publications de l'Institut astronomique (prof. Heinrich) de l'Université Charles de Prague. Série II.
No. 4.

W. W. HEINRICH:

Sur une méthode pour étudier les trajectoires séculaires du problème de *n* corps. — Conditions générales pour les rotations et les librations des périhélies. I.

Premier mémoire.



PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
PRAHA II., U KARLOVA.
NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
PRAHA, PŘÍKOPY F. ŘIVNÁČ, PRAGUE, PŘÍKOPY.

TISKEM KNIHTISKÁRNY JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE.

Publications de l'Institut astronomique (prof. W. Heinrich) de l'Université Charles de Prague, Série II., No. 4. (1924, 15. XII.).

Sur une méthode pour étudier les trajectoires séculaires du problème de *n* corps. Conditions générales pour les rotations et les librations des périhélies. I.

Premier mémoire.

Par *W. W. Heinrich* à Prague.

(Les principaux résultats de ce mémoire ont été communiqués pendant son impression à l'Académie des sciences de Paris, dans la séance du 18 décembre 1924. Voir Comptes Rendus de l'Académie de Paris t. 180, p. 45—47. Nouvelles classes de solutions séculaires du problème de *n* corps.)

J'ai trouvé dans un mémoire précédent [1]) certaines classes de solutions séculaires du problème de trois corps. Pour démontrer leur existence j'ai suivi une méthode qui permet de construire les développements correspondants sans se servir de l'opération à la Delaunay que j'avais employé auparavant.[2])

Dans le problème de *n* corps la plupart de mouvements moyens n'existe pas pour le cas dégénéré $\mu = 0$. De là découlent certaines difficultés dont Poincaré parle en plusieurs endroits des Méthodes (voir [1]) p. 3. voir aussi Whittaker Encyklopädie d. Math. Wiss. Göttingen, Band VI 2, 12. Heft 4. p. 526).

C'étaient ces difficultés qui empêchaient les auteurs précédents et Poincaré lui même de trouver les solutions en question et d'étudier les ellipses en rotation.

---

[1]) Nouvelles classes de solutions séculaires du problème général des trois corps. Publications de la faculté des sciences de l'Université Charles No. 15. Institut astr., série II., n. 1. 1923.

[2]) Bul. astr., Tome II., série 2., fasc. 7., p. 425, Paris 1922. — Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême. 1922, inséré dans l'année 1923, nro 15⁰.

En introduisant certains paramètres et généralisant une substitution appropriée, j'ai reussi à éviter complètement l'inconvéniant susmetionné.[1])

Pour étudier les trajectoires séculaires analogues et valables dans le problème de n corps — on pourra se servir — comme il avait été dit [1]) — de la même méthode. Dans le présent mémoire je donne les généralisations nécessaires pour ce but. Comme résultat essentiel de ces recherches préliminaires j'indique les conditions générales pour les rotations et librations des périhélies. Je construis les séries périodiques, absolument et uniformément convergentes, pour une durée infinie exprimant analytiquement les coordonnées du problème comme fonctions du temps.

En étudiant les développements mentionnés j'ai reussi à découvrir *certaines classes des solutions séculaires du problème* de n corps qui *pourront être désignées de la première et de la seconde sorte.* La terminologie introduite par là est en parfaite analogie avec celle employée par H. Poincaré dans ses Méthodes nouvelles de la méc. cél., bien entendu dans le cas des solutions à période courte.

Ainsi la première sorte comprendra les solutions séculaires, dont l'excentricité disparaît avec le paramètre troublant μ.

La seconde sorte comprendra les solutions séculaires, dont l'excentricité restera différente de zéro, si l'on fait disparaître le dit paramètre.

J'ajoute que pratiquement, les solutions de la première sorte se confondent probablement *en partie* avec les solutions étudiées par Griffin.[3])

Au point de vue géométrique on pourra s'exprimer ainsi:

Dans le cas des solutions séculaires de la première sorte on étudie le voisinage des orbites Képlériennes circulaires, — dans le cas des solutions séculaires de la seconde sorte on examine les prologements analytiques des ellipses Képlériennes.

Les solutions qui font l'object du présent mémoire se rapportent au problème plan. En prenant en considération le problème complet de n corps, à trois dimensions, on trouverait les solutions séculaires analogues à celles de la troisième et quatrième sorte à période courte, étudiées auparavant resp. par H. Poincaré [4]) et Hugo de Zeipel [5]). J'y veux consacrer un mémoire ultérieur.

---

[3]) F. L. Griffin, Certain periodic orbits of the finite bodies revolving about a relatively large central mass. Trans. of the American Math. Soc. Vol. IX., Nro. 1., Jan. 1908.

[4]) Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I., Paris 1892, p. 144 et seq.

[5]) Recherches sur les solutions périodiques. Nova Acta societatis scientiarium Upsaliensis (2), 20 (1904). 1904 (Thèse pour le doctorat).

Dans le premier mémoire j'étudie les solutions séculaires de la seconde sorte. Je démontre à cet effet les théorèmes I.—VII. et je donne à la page 32., 33., un théorème concernant les équations générales de la dynamique. Dans le mémoire deuxième je construis les séries et je m'occupe des solutions séculaires de la première sorte.

§ 1. Les équations du problème.

Nous allons introduire la notation, employée déjà dans le mémoire précédent, en choisissant les variables canoniques de Jacobi-Delaunay

$$\left.\begin{array}{lll} L_1 = \beta'_1 \sqrt{a_1}, & G_1 = \beta'_1 \sqrt{a_1(1-e_1^2)}, & L_2 = \beta'_2 \sqrt{a_2}, \\ M_1 = n_1 t + M_1^0, & \pi_1, & M_2, \\ G_2 = \beta'_2 \sqrt{a_2(1-e_2^2)}, & L_3, G_3, \ldots L_n, G_n. & \\ \pi_2, & M_3, \pi_3, \ldots M_n, \pi_n. & \end{array}\right\} \quad (1)$$

Un changement canonique mène immédiatement au système:

$$\left.\begin{array}{c} L_1 = \mu x_1, \; L_1 - G_1 = \mu x_2, \; L_2 = \mu x_3, \; L_2 - G_2 = \mu x_4, \; L_3 = \mu x_5, \\ L_3 - G_3 = \mu x_6, \ldots L_n = \mu x_{2n-1}, \; G_n = \mu (x_{2n} - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \cdots \\ \cdots - x_{2n-3} + x_{2n-2}), \\ M_1 + \pi_1 - \pi_n = y_1, \; -\pi_1 + \pi_n = y_2; \\ M_2 + \pi_2 - \pi_n = y_3, \; -\pi_2 + \pi_n = y_4, \; M_3 + \pi_3 - \pi_n = y_5, \\ -\pi_3 + \pi_n = y_6, \ldots y_{2n-1} = M_n, \; y_{2n} = \pi_n. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Les constantes de Jacobi [6]) auront ici la forme suivante:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 = \odot \text{ (masse centrale)}, \; m = m_1, \; m' = m_2, \; m'' = m_3, \ldots m^{(n-1)} = m_n & \\ \sigma_1 = 1, & \mu_1 = \dfrac{m}{1+m}, \\ \sigma_2 = 1 + m_1, & \mu_2 = \dfrac{(1+m)m'}{1+m+m'}, \\ \sigma_3 = 1 + m_1 + m_2, & \mu_3 = \dfrac{\sigma_3}{\sigma_4} m_3, \\ & \mu_4 = \dfrac{\sigma_4}{\sigma_5} m_4. \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ & \mu_{n-1} = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} m_{n-1}, \\ \sigma_{n+1} = 1 + m_1 + m_2 + \cdots + m_n, & \mu_n = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} m_n, \\ \beta = \beta'_1 = \mu \beta''_1, \; \dfrac{\beta'^2_1}{\mu_1} = k^2 m_1, & m_1 = m = \alpha''_1 \mu \end{array}\right\} \quad (3)$$

[6]) Charlier, Mechanik des Himmels, I., p. 240, p. 256.

$$\left.\begin{array}{l}
\beta' = \beta'_2 = \mu \beta''_2, \quad \frac{\beta'^2_2}{\mu_2} = k^2\, m_2, \quad m_2 = m' = \alpha''_2 \mu \\
\beta'_3 = \mu \beta''_3, \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad \frac{\beta'^2_{n-1}}{\mu_{n-1}} = k^2\, m_{n-1}, \quad m_{n-1} = \alpha''_{n-1}\, \mu, \\
\beta'_n = \mu \beta''_n, \quad \frac{\beta'^2_n}{\mu_n} = k^2\, m_n, \quad m_n = \alpha''_n\, \mu, \\
n_1 = n = \frac{\beta'^4_1}{\mu_1 L^3_1} = \frac{k\sqrt{1+m_1}}{a^{3/2}_1}, \quad n_2 = n' = \frac{\beta'^4_2}{\mu_2 L^3_2} = \frac{k}{a^{3/2}_2}\sqrt{\frac{1+m_1+m_2}{1+m_1}} \\
\qquad n_3 = \frac{\beta'^4_3}{\mu_3 L^3_3}, \ldots n_n = \frac{\beta'^4_n}{\mu_n L^3_n}.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Ainsi la masse 1. signifie le corps central, les autres masses m_i représentant les planètes, de sorte que nous envisageons un problème de $(n+1)$ corps.

Les équations du mouvement, déterminant les changements des variables canoniques choisis (1), (2), contiennent la fonction Hamiltonienne que voici:

$$\begin{array}{c}
F\mu = \Phi^{(1)}_0 \mu + \Phi^{(2)}_0 \mu + \cdots + \Phi^{(n)}_0 \mu + \\
+ \frac{k^2 m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{k^2 m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{k^2 m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{k^2 m_1 m_5}{r_{15}} + \\
+ \frac{k^2 m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{k^2 m_2 m_4}{r_{24}} + \frac{k^2 m_2 m_5}{r_{25}} + \cdots + \frac{k^2 m_2}{r_2} - \frac{k^2 m_2}{r_{g2}} + \\
+ \frac{k^2 m_3 m_4}{r_{34}} + \frac{k^2 m_3 m_5}{r_{35}} + \cdots + \frac{k^2 m_3}{r_3} - \frac{k^2 m_3}{r_{g3}} + \\
+ \frac{k^2 m_4 m_5}{r_{45}} + \cdots + \frac{k^2 m_4}{r_4} - \frac{k^2 m_4}{r_{g4}}. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{c}
F''_0 = \Phi^{(1)}_0 + \Phi^{(2)}_0 + \Phi^{(3)}_0 + \cdots + \Phi^{(n)}_0 + \\
\Phi^{(1)}_0 = \frac{k^2 \alpha''_1 \beta''^2_1}{2 x^2_1}, \quad \Phi^{(2)}_0 = \frac{k^2 \alpha''_2 \beta''^2_2}{2 x^2_3}, \ldots \Phi^{(n)}_0 = \frac{k^2 \alpha''_n \beta''^2_n}{2 x^2_{2n-1}}.
\end{array}\right\} \quad (5)$$

En dénotant les coordonnées — bien connues — de Jacobi, relatives resp. à la planète de masse m_i, par $q^{(i)}_1$, $q^{(i)}_2$, $q^{(i)}_3$, on aura pour les coordonnées des mêmes corps, rattachés au centre de gravité, les relations.[7])

[7]) Voir Charlier, Mech. d. Himmels, I., p. 240.

$$\xi_0 = -\frac{m_1}{\sigma_2} q_1^{(1)} - \frac{m_2}{\sigma_3} q_1^{(2)} - \frac{m_3}{\sigma_4} q_1^{(3)} - \frac{m_4}{\sigma_5} q_1^{(4)} - \frac{m_5}{\sigma_6} q_1^{(5)} - \ldots$$

$$\xi_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1^{(1)} - \frac{m_2}{\sigma_3} q_1^{(2)} - \frac{m_3}{\sigma_4} q_1^{(3)} - \frac{m_4}{\sigma_5} q_1^{(4)} - \frac{m_5}{\sigma_6} q_1^{(5)} - \ldots$$

$$\xi_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} q_1^{(2)} - \frac{m_3}{\sigma_4} q_1^{(3)} - \frac{m_4}{\sigma_5} q_1^{(4)} - \frac{m_5}{\sigma_6} q_1^{(5)} - \ldots$$

$$\xi_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_4} q_1^{(3)} - \frac{m_4}{\sigma_5} q_1^{(4)} - \frac{m_5}{\sigma_6} q_1^{(5)} - \ldots$$

$$\xi_4 = \frac{\sigma_4}{\sigma_5} q_1^{(4)} - \frac{m_5}{\sigma_6} q_1^{(5)} - \ldots$$

$$\xi_5 = \frac{\sigma_5}{\sigma_6} q_1^{(5)} - \ldots$$

. . . .

On trouvera facilement pour les distances des planètes du corps central

$$r_l^2 = \left\{ q_1^{(l)} + \frac{m_{l-1}}{\sigma_l} q_1^{(l-1)} + \frac{m_{l-2}}{\sigma_{l-1}} q_1^{(l-2)} + \ldots + \frac{m_2}{\sigma_3} q_1^{(2)} + \frac{m_1}{\sigma_2} q_1^{(1)} \right\}^2 +$$
$$+ \left\{ q_2^{(l)} + \frac{m_{l-1}}{\sigma_l} q_2^{(l-1)} + \frac{m_{l-2}}{\sigma_{l-1}} q_2^{(l-2)} + \ldots + \frac{m_2}{\sigma_3} q_2^{(2)} + \frac{m_1}{\sigma_2} q_2^{(1)} \right\}^2$$

$$r_l^2 = r_{gl}^2 + \frac{m_1^2}{\sigma_2^2} r_{g1}^2 + \frac{m_2^2}{\sigma_2^3} r_{g2}^2 + \frac{m_3^2}{\sigma_4^2} r_{g3}^2 + \ldots + \frac{m_{l-1}^2}{\sigma_l^2} r_{g,l-1}^2 +$$
$$+ 2 \left\{ \frac{m_1}{\sigma_2} q_1^{(1)} q_1^{(l)} + q_2^{(1)} q_2^{(l)}) + \frac{m_2}{\sigma_3} (q_1^{(2)} q_1^{(l)} + q_2^{(2)} q_2^{(l)}) + \ldots \right.$$
$$+ \frac{m_{l-1}}{\sigma_l} \left(q_1^{(l-1)} q_1^{(l)} + q_2^{(l-1)} q_2^{(l)} \right) +$$
$$+ \frac{m_1 m_2}{\sigma_2 \sigma_3} \left(q_1^{(1)} q_1^{(2)} + q_2^{(1)} q_2^{(2)} \right) + \cdots + \frac{m_1 m_{l-1}}{\sigma_2 \sigma_l} \left(q_1^{(1)} q_1^{(l-1)} + q_2^{(1)} q_2^{(l-1)} \right) +$$

. . . .

$$\left. + \frac{m_{l-2} m_{l-1}}{\sigma_{l-1} \sigma_l} \left(q_1^{(l-2)} q_1^{(l-1)} + q_2^{(l-2)} q_2^{(l-1)} \right) \right\}$$

On trouvera de même pour les distances des corps particuliers du centre commun de gravité

$$r_{gl}^2 = q_1^{(l)2} + q_2^{(l)2},$$

et pour les distances mutuelles des planètes:

$$r_{lk}^2 = (\xi_l - \xi_k)^2 + (\eta_l - \eta_k)^2 = \Big(q_1^l + \frac{m_{l-1}}{\sigma_l}\, q_1^{(l-1)} + \frac{m_{l-2}}{\sigma_{l-1}}\, q_1^{(l-2)} + \dots$$

$$+ \frac{m_{k+1}}{\sigma_{k+2}}\, q_1^{(k+1)} - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}\, q_1^{(k)} \Big)^2 + \Big(q_2^l + \frac{m_{l-}}{\sigma_l}\, q_2^{(l-1)} + \frac{m_{l-2}}{\sigma_{l-1}}\, q_2^{(l-2)} + \dots$$

$$+ \frac{m_{k+1}}{\sigma_{k+2}}\, q_2^{(k+1)} - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}\, q_2^{(k)} \Big)^2.$$

Donc les dites différences s'écrivent en négligeant le carré de la masse troublante:

$$\frac{k^2 m_2}{r_2} - \frac{k^2 m_2}{r_{g2}} = - \frac{k^2 m_2 m_1}{r_{g2}^3 \sigma_2} (q_1^{(1)} q_1^{(2)} + q_2^{(1)} q_2^{(2)}) + \cdots$$

$$\frac{k^2 m_3}{r_3} - \frac{k^2 m_3}{r_{g3}} = - \frac{k^2 m_3 m_1}{r_{g3}^3 \sigma_2} (q_1^{(3)} q_1^{(1)} + q_2^{(3)} q_2^{(1)}) -$$

$$- \frac{k^2 m_3 m_2}{r_{g3}^3 \sigma_3} (q_1^{(3)} q_1^{(2)} + q_2^{(3)} q_2^{(2)}) + \cdots$$

$$\frac{k^2 m_4}{r_4} - \frac{k^2 m_4}{r_{g4}} = - \frac{k^2 m_4 m_1}{r_{g4}^3 \sigma_2} (q_1^{(4)} q_1^{(1)} + q_2^{(4)} q_2^{(1)}) -$$

$$- \frac{k^2 m_4 m_2}{r_{g4}^3 \sigma_3} (q_1^{(4)} q_1^{(2)} + q_2^{(4)} q_2^{(2)}) - \frac{k^2 m_4 m_3}{r_{g4}^3 \sigma_4} (q_1^{(4)} q_1^{(3)} + q_2^{(4)} q_2^{(3)}) + \cdots$$

La fonction perturbatrice est développable en une série périodique. Tant qu'on négligera le second degré de masse — et nous allons voir que pour les théorèmes d'existence, cette hypothèse sera toujours suffisante — on pourra accepter les principales catégories des termes critiques et non critiques 1⁰, 2⁰, 3⁰, 4⁰ indiquées dans le mémoire précédent [1]) pag. 14—16. Il faudra — bien entendu — prendre en considération toutes les combinaisons analogues, deux à deux, se rapportant à tous les divers couples des planètes, possibles.

On aura donc (l, k, m, n, de tous les indices sont des nombres entiers positifs ou negatifs).

$$F = F_0'' + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots \tag{6}$$

$$F_1 = \sum A^{12} (x_1, x_2, x_3, x_4) \cos \{ l_1 (y_1 + y_2) + l_2 (y_3 + y_4) + l_3 (y_4 - y_2) \} +$$

$$+ \sum A^{13} \cos \{ l_1 (y_1 + y_2) + l_2 (y_5 + y_6) + l_3 (y_6 - y_2) \} + \cdots$$

$$- \sum A^{1,\, n-1} \cos \{ l_1 (y_1 + y_2) + l_2 (y_{2n-3} + y_{2n-2}) + l_3 (y_{2n-2} - y_2) \} +$$

$$+ \sum A^{1,\, n} \cos \{ l_1 (y_1 + y_2) + l_2\, y_{2n-1} - l_3\, y_2 \} +$$

$$+ \sum A^{2,\, 3} \cos \{ l_1 (y_3 + y_4) + l_2 (y_5 + y_6) + l_3 (y_6 - y_4 \} +$$

$$+ \sum A^{2,\, 4} \cos \{ l_1 (y_3 + y_4) + l_2 (y_7 + y_8) + l_3 (y_8 - y_4) \} + \cdots$$

$$+ \sum A^{2,\, n} \cos \{ l_1 (y_3 + y_4) + l_2\, y_{2n-1} - l_3\, y_4 \} + \cdots\cdots$$

$$+ \cdots + \sum A^{n-1,\, n} \cos \{ l_1 (y_{2n-3} + y_{2n-2}) + l_2\, y_{2n-1} - l_3\, y_{2n-2} \}.$$

La loi de formation est tout-à-fait claire d'après la substitution de nos variables (2) dans le développement classique au terme général

$$A_{m,h} \cos \{ M_m \, l_m + M_h \, l_h + (\pi_m - \pi_h) \, l \}.$$

On pourra écrire en employant une sténographie bien compréhensible

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = \sum\limits_{m,h} A_{m,h} \cos \, (k_1 \, y_{2m-1} + k_2 \, y_{2m} + k_3 \, y_{2h-1} + k_4 \, y_{2h}) + \\ + \sum A_{m,n} \cos \, (k_1 \, y_{2m-1} + k_2 \, y_{2m} + k_3 \, y_{2n-1}), \; k_1 + k_3 = k_2 + k_4. \end{array}\right\} \quad (7)$$

On trouvera de même pour la partie F_2 le développement

$$F_2 = \sum_{m,h\,l} A_{m,h,l} \cos \, (k_1 \, y_{2m-1} + k_2 \, y_{2m} + k_3 \, y_{2h-1} + k_4 \, y_{2h} + k_5 \, y_{2l-1} + k_6 \, y_{2l})$$

avec la restriction $\qquad k_1 + k_3 + k_5 = k_2 + k_4 + k_6.$

De plus si l'un des nombres entiers, indiqués ci-dessus par m, h, l devient égal à n — on aura à poser $k_{2n} = 0$ et la dernière relation cesse d'être en vigueur, les k pouvant être des nombres entiers quelconques positifs ou negatifs.

On trouvera enfin pour la partie

$$F_n = \Sigma A \, (x_\nu) \cos \, (k_1 \, y_1 + k_2 \, y_2 + \cdots + k_{2n-1} \, y_{2n-1}).$$

On aura en particulier pour la partie (non périodique) séculaire, c'est-à-dire pour la valeur moyenne de la fonction

$$[F_1 \, \mu + F_2 \, \mu^2 + F_3 \, \mu^3 + \cdots] = S \, A \cos \omega,$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes pour lesquels le coefficient de t est zéro. Donc

$$\omega = k_1 \, y_1^0 + k_2 \, y_2^0 + \cdots + k_{2n-1} \, y_{2n-1}^0, \qquad y_l = n^0{}_l \, t + y^0{}_l$$
$$k_1 \, n_1^0 + k_2 \, n_2^0 + \cdots + k_{2n-1} \, n_{2n-1}^0 = 0$$

Envisageons le système canonique appartenant aux variables (2). Nous allons changer ce système en un autre système canonique. Nous ajoutons à cet effet à la fonction Hamiltonienne les termes $\omega_1 \, (x_1 - x_2) + \omega_2 \, (x_3 - x_4) + \ldots + \omega_{n-1} \, (x_{2n-3} - x_{2n-2})$, ω_l désignant des constantes arbitraires, en posant en même temps pour les variables angulaires resp.

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \omega_1 \, t, & y_2 = - \pi_1 + \pi_n + \omega_1 \, t, \\ y_3 = M_2 + \pi_2 - \pi_n - \omega_2 \, t, & y_4 = - \pi_2 + \pi_n + \omega_2 \, t, \\ y_5 = M_3 + \pi_3 - \pi_n - \omega_3 \, t, & y_6 = - \pi_3 + \pi_n + \omega_3 \, t, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ y_{2n-3} = M_{n-1} + \pi_{n-1} - \pi_n - \omega_{n-1} \, t, & y_{2n-2} = - \pi_{n-1} + \pi_n + \omega_{n-1} \, t \\ y_{2n-1} = M_n \, , & y_{2n} = \pi_n, \\ \text{et pour les coordonnées de position, conjuguées:} & \\ x_1 = \beta''_1 \sqrt{a_1}, & x_2 = \beta''_1 \sqrt{a_1} \, (1 - \sqrt{1 - e_1^2}), \\ x_3 = \beta''_2 \sqrt{a_2}, & x_4 = \beta''_2 \sqrt{a_2} \, (1 - \sqrt{1 - e_2^2} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{2n-1} &= \beta''_n \sqrt{a_n} \\ F_0 &= F''_0 + \omega_1 (x_1 - x_2) + \omega_2 (x_3 - x_4) + \cdots + \omega_{n-1} (x_{2n-3} - x_{2n-2}), \\ F''_0 &= \Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(2)} + \ldots + \Phi_0^{(n)}, \text{ voir } (5) \\ F &= F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Au point de vue géométrique, ce changement canonique, signifie l'introduction des axes tournants. On envisage par là que les axes des coordonnées du corps resp. m_l tournent avec une vitesse constante, uniforme ω_l. Inutile de mentionner que par ce changement des variables le temps t va figurer explicitement dans les arguments des fonctions trigonométriques du développement de la fonction perturbatrice.

Dans ce qui suit, nous allons particulariser, en posant tantôt $\omega_l = n^0$

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \omega_1 t = n_1^0 t + \pi_1 - \pi_n + M_1^0 - n_1^0 t = M_1^0 + \pi_1 - \pi_n, {}^{*)} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad y_2 = n_1^0\, t - \pi_1 + \pi_n, \\ & y_3 = M_2^0 + \pi_2 - \pi_n, \qquad y_4 = n_2^0\, t - \pi_2 + \pi_n, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & y_{2n-3} = M^0{}_{n-1} + \pi_{n-1} - \pi_n, \quad y_{2n-2} = n^0{}_{n-1}\, t - \pi_{n-1} + \pi_n, \\ & y_{2n-1} = M_n, \qquad y_{2n} = \pi_n, \\ & x_1 = \beta''_1 \sqrt{a_1}, \qquad x_2 = \beta''_1 \sqrt{a_1}\,(1 - \sqrt{1-e_1^2}) \\ & x_3 = \beta''_2 \sqrt{a_2}, \qquad x_4 = \beta''_2 \sqrt{a_2}\,(1 - \sqrt{1-e_2^2}) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & x_{2n-3} = \beta''_{n-1} \sqrt{a_{n-1}}, \; x_{2n-2} = \beta''_{n-1} \sqrt{a_{n-1}}\,(1 - \sqrt{1-e^2{}_{n-1}}), \\ & x_{2n-1} = \beta''_n \sqrt{a_n}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

tantôt en choisissant le système: $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-1} = n_n^0, \; (\omega_n = 0)$

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \omega_1\, t = (n_1^0 - n_n^0)\, t + \pi_1 - \pi_n + M_1^0, {}^{*)} \\ & x_1 = \beta''_1 \sqrt{a_1}, \\ & y_2 = n^0{}_n\, t - \pi_1 + \pi_n, \; x_2 = \beta''_1 \sqrt{a_1}\,(1 - \sqrt{1-e_1^2}), \\ & y_3 = (n_2^0 - n_n^0)\, t + \pi_2 - \pi_n + M_2^0, \quad x_3 = \beta''_2 \sqrt{a_3}, \\ & y_4 = n_n^0\, t - \pi_2 + \pi_n, \qquad x_4 = \beta''_2 \sqrt{a_2}\,(1 - \sqrt{1-e_2^2}), \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & y_{2n-3} = (n^0{}_{n-1} - n^0{}_n)\, t + \pi_{n-1} - \pi_n + M^0{}_{n-1}, \\ & x_{2n-3} = \beta''_{n-1} \sqrt{a_{n-1}}, \\ & y_{2n-2} = n^0{}_n\, t - \pi_{n-1} + \pi_n, \\ & x_{2n-2} = \beta''_{n-1} \sqrt{a_{n-1}}\,(1 - \sqrt{1 - e^2{}_{n-1}}), \\ & y_{2n-1} = M_n \\ & x_{2n-1} = \beta''_n \sqrt{a_n} \\ & y_{2n} = \pi_n. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

*) Je supprime les termes tels que $n^0{}_l\, t_0$, pour abréger — je suppose par là pour un moment $t_0 = 0$.

Au lieu d'employer directement les deux derniers systèmes, il sera quelquefois plus avantageux d'introduire les coordonnées polaires. On obtiendra ainsi:

$$\left.\begin{array}{l}
x'_1 = x_1,\ y'_1 = y_1 = M_1^0 + \pi_1 - \pi_n, \\
x'_2 = \sqrt{2x_2}\cos(n_1^0 t - \pi_1 + \pi_n),\ y'_2 = \sqrt{2x_2}\sin(n_1^0 t - \pi_1 + \pi_n) \\
x'_3 = x_3, \qquad y'_3 = y_3 = M_2^0 + \pi_2 - \pi_n, \\
x'_4 = \sqrt{2x_4}\cos(n_2^0 t - \pi_2 + \pi_n),\ y'_4 = \sqrt{2x_4}\sin(n_2^0 t - \pi_2 + \pi_n) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x'_{2n-3} = x_{2n-3},\ y'_{2n-3} = y_{2n-3} = M_{n-1}^0 + \pi_{n-1} - \pi_n, \\
x'_{2n-2} = \sqrt{2x_{2n-2}}\cos(n_{n-1}^0 t - \pi_{n-1} + \pi_n), \\
y'_{2n-2} = \sqrt{2x_{2n-2}}\sin(n_{n-1}^0 t - \pi_{n-1} + \pi_n) \\
x'_{2n-1} = x_{2n-1},\ y'_{2n-1} = y_{2n-1} = M_n,\ x'_{2n} = \sqrt{2x_{2n}}\cos\pi_n \\
y'_{2n} = \sqrt{2x_{2n}}\sin\pi_n.
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Le sens des coordonnées de position, non accentuées x_i sera fixé par les équations écrites plus haut (2), (8).

Pour le deuxième système des coordonnées polaires, correspondant aux équations (10), on aura de même:

$$\begin{array}{l}
x'_1 = x_1,\ y'_1 = y_1 = (n_1^0 - n_n^0)\, t + \pi_1 - \pi_n + M_1^0, \\
x'_2 = \sqrt{2x_2}\cos(n_n^0 t - \pi_1 + \pi_n),\ y'_2 = \sqrt{2x_2}\sin(n_n^0 t - \pi_1 + \pi_n) \\
x'_3 = x_3,\ y'_3 = y_3 = (n_2^0 - n_n^0)\, t + \pi_2 - \pi_n + M_2^0, \\
x'_4 = \sqrt{2x_4}\cos(n_n^0 t - \pi_2 + \pi_n),\ y'_4 = \sqrt{2x_4}\sin(n_n^0 t - \pi_2 + \pi_n) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x'_{2n-3} = x_{2n-3},\ y'_{2n-3} = y_{2n-3} = (n_{n-1}^0 - n_n^0)\, t + \pi_{n-1} - \pi_n + M_{n-1}^0 \\
x'_{2n-2} = \sqrt{2x_{2n-2}}\cos(n_n^0 t - \pi_{n-1} + \pi_n),\ y'_{2n-2} = \sqrt{2x_{2n-2}}\sin(n_n^0 t - \pi_{n-1} + \pi_n) \\
x'_{2n-1} = x_{2n-1},\ y'_{2n-1} = y_{2n-1} = M_n, \\
x'_{2n} = \sqrt{2x_{2n}}\cos\pi_n,\ y'_{2n} = \sqrt{2x_{2n}}\sin\pi_n.
\end{array}$$

Posons maintenant $t = \tau(1 + \varkappa)$. Les équations du mouvement en coordonnées (8), (9), (10) s'écrivent alors

$$\frac{d x_i}{d\tau} = (1 + \varkappa)\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{d y_i}{d\tau} = -(1 + \varkappa)\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots n$$

$\varkappa$ signifie une constante que nous avons appelé le paramètre de périhélie, cette constante sera une fonction des coordonnées initiales que nous allons développer en une série procédant suivant les puissances de μ. Cependant seulement certaines valeurs de cette constante seront admissibles pour l'existence des solutions séculaires.

Nous allons donner les expressions analytiques représentant les mouvements séculaires des périhélies et les mouvements troublés en anomalies moyennes.

Je dis qu'on trouvera facilement *d'après la définition même (8) des coordonnées le sens géométrique des accroissements des variables angulaires* — du moins dans le cas de l'existence des solutions à période séculaire — où les déviations finales telles que φ_i, ψ_i vont disparaître (voir p. 14., ou bien § 2, p. 11. du mém. préc.).[1])

En effet désignons par f_l le mouvement moyen de la différence $\pi_l - \pi_n$ des longitudes des périhélies. L'accroissement d'une variable quelconque (8) y_{2l} sera donné par l'expression $\frac{\omega_l t}{1+\varkappa}$ valable dans le système des axes tournants avec une vitesse constante ω_l. Pour le système originaire (2) des axes fixes (Jacobi-Radau) on aura

$$-f_l = \frac{\omega_l}{1+\varkappa} - \omega_l = -\frac{\varkappa\, \omega_l}{1+\varkappa}.$$

L'accroissement angulaire d'une coordonnée y_{2l-1} dans le système (8) sera donné par $\frac{n_l^0 - \omega_l}{1+\varkappa} t$, dans le système des axes fixes on trouvera

$$\frac{n_l^0 - \omega_l}{1+\varkappa} + \omega_l = \frac{n_l^0 + \varkappa\, \omega_l}{1+\varkappa} = \frac{n_l^0}{1+\varkappa} + f_l = n_l + h_l$$

ce qui constitue le mouvement diurne moyen en longitude, de sorte que h_l signifiera la perturbation de ce mouvement en longitude.

Donc $\frac{n_l^0}{1+\varkappa}$ désigne le mouvement diurne total en anomalie moyenne. En poursuivant le calcul avec la substitution $t = \tau(1+\varkappa)$ on va employer absolument la même méthode que nous avons utilisée déjà dans le mémoire précédent.

Ajoutons que les équations du mouvement, fixées plus haut, possèdent toujours deux intégrales premières, à savoir, l'intégrale des aires et l'intégrale de Jacobi. L'intégrale des aires s'écrira:

$$G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n = \mu\, x_{2n} = c. \tag{14}$$

En étudiant le mouvement des planètes données on supprimera l'équation servant à déterminer les changements de la variable de position x_{2n}, en la remplaçant par l'intégrale des aires. On poura ignorer la dernière équation fixant le changement de la variable angulaire y_{2n} (π_n). En effet la fonction perturbatrice ne renferme la longitude de périhélie π_n que dans la liaison $\pi_l - \pi_n$.

Quant à l'intégrale des forces vives (Jacobi) on l'obtiendra facilement en écrivant

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \omega_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - \omega_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + \omega_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} - \omega_2 \frac{\partial F}{\partial y_4} + \dots$$

$$\dots + \omega_{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_{2n-3}} - \omega_{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_{2n-2}} = \omega_1 \left(\frac{d x_1}{d t} - \frac{d x_2}{d t}\right) +$$

$$+ \omega_2 \left(\frac{d x_3}{d t} - \frac{d x_4}{d t}\right) + \dots + \omega_{n-1} \left(\frac{d x_{2n-3}}{dt} - \frac{d x_{2n-2}}{dt}\right).$$

$$- \omega_1 (x_1 - x_2) - \omega_2 (x_3 - x_4) - \dots - \omega_{n-1} (x_{2n-3} - x_{2n-2}) + F = C. \quad (15)$$

§ 2. L'existence des solutions séculaires.

Voici la situation que nous allons étudier:

Nous examinons le voisinage de n ellipses aux moyens mouvements diurnes commensurables en posant

$$p_1\, \tau^{(1)} = p_1 \frac{2\pi}{n_1^0} = p_2\, \tau^{(2)} = p_2 \frac{2\pi}{n_2^0} = \dots = p_n\, \tau^{(n)} = p_n \frac{2\pi}{n_n^0} = T'_1,\ T_1 = rT',$$

p_l désignant les nombres positifs quelconques, premiers entre eux, n_l^0 le mouvement moyen relatif resp. à la planète de masse m_l, $\tau^{(l)}$ la durée de révolution autour du corps central, r un nombre entier, positif.

Dans le mémoire précédent, nous avons posé $p_1 = p + q$, $p_2 = p$, $p_3 = \dots = p_n = 0$. Donc nous choisissons pour les solutions périodiques dégénérées n ellipses Képlériennes. En posant $\varkappa = 0$ on trouverait les solutions de la deuxième sorte à periode courte de Poincaré, — aux apsides animées d'un mouvement rotatoire, commun à toutes les n planètes. En admettant $\varkappa \gtrless 0$ on cherche les solutions d'une période prolongée $T = (1 + \varkappa) T_1$. *L'hypothèse $\varkappa \gtrless 0$ forcera l'apparition des mouvements séculaires, rotatoires des différences des longitudes des périhélies.* Le paramètre de périhélie $\varkappa$ devra être déterminé convenablement. Tous les $\varkappa$ ne seront pas admissibles, vu que le temps figure explicitement dans les arguments trigonométriques. Les équations jouissent des périodes prescrites. Ainsi il faudra étudier les prolongements analytiques non pas des mouvements de Képler mentionnés plus haut, mais bien de ceux-ci suffisament répétés. Dans le cas général qui nous occupe, on aura pour le commencement du mouvement

$$t = t_0,\ \tau = \tau_0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0, \ldots \\
&y_1 = y_1^0 = M_1^0 + \pi_1 - \pi_n + n_1^0\,\tau_0 - \omega_1\,\tau_0, \\
&y_2 = y_2^0 = -\pi_1 + \pi_n + \omega_1\,\tau_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_{2n-3} = y_{2n-3}^0 = M^0_{n-1} + \pi_{n-1} - \pi_n + (n^0_{n-1} - \omega_{n-1})\,\tau_0, \\
&x_{2n-3} = x_{2n-3}^0, \\
&y_{2n-2} = -\pi_{n-1} + \pi_n + \omega_{n-1}\,\tau_0, \\
&x_{2n-2} = x_{2n-2}^0, \\
&y_{2n-1} = M^0_n,\ x_{2n-1} = x^0_{2n-1}.
\end{aligned}\right\}(16)$$

Indiquons les accroissements des constantes d'intégration par resp. α_i, β_i, les déviations finales par φ_i, ψ_i, nous aurons pour une époque ultérieure quelconque t, τ

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 = x_1^0 + \alpha_1 + \varphi_1,\ x_2 = x_2^0 + \alpha_2 + \varphi_2, \ldots\ x_{2n-2} = x_{2n-2}^0 + \\
&+ \alpha_{2n-2} + \varphi_{2n-2},\ x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + \alpha_{2n-1} + \varphi_{2n-1}, \\
&y_1 = y_1^0 + \beta_1 + \psi_1 + n_1^0\,\tau - \omega_1\,\tau,\ y_2 = y_2^0 + \beta_2 + \psi_2 + \omega_1\,\tau, \ldots \\
&y_{2n-3} = y_{2n-3}^0 + \beta_{2n-3} + \psi_{2n-3} + (n_{n-1}^0 - \omega_{n-1})\,\tau, \\
&y_{2n-2} = y_{2n-2}^0 + \beta_{2n-2} + \psi_{2n-2} + \omega_{n-1}\,\tau, \\
&y_{2n-1} = y_{2n-1}^0 + \beta_{2n-1} + \psi_{2n-1} + n_n^0\,\tau
\end{aligned}\right\}(17)$$

Pour maintenir la périodicité des coordonnées, qui nous servent de point de départ ($\mu = 0$), on devra disposer convenablement des vitesses arbitraires ω. Nous allons choisir — pour fixer les idées — le système des variables (9) en posant $\omega_l = n^0_l$.

On aura ensuite

$$F_0 = F_0'' + n_1^0\,(x_1 - x_2) + n_2^0\,(x_3 - x_4) + \cdots + n_{n-1}^0\,(x_{2n-3} - x_{2n-2}).$$

La longueur de la période du mouvement Képlérien suffisamment répété serait
$$T_1 = \frac{2\pi\,p_1\,r}{n_1^0} = T'_1\,r,$$
r entier positif. La durée du mouvement séculaire sera

$$T = \frac{2\pi\,p_1\,r}{n_1^0}(1 + \varkappa) = T_1\,(1 + \varkappa).$$

D'après ce qui a été dit dans le mémoire précédent,[1] il suffira d'analyser seulement les équations exprimant ψ_k. En effet les équations correspondantes en φ_k seront absolument de la même forme que l. c. et il suffira de les remplaçer par le système

$$\frac{\varphi_k}{\mu} = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

I. En procédant par la même méthode que l. c.,[1]) on trouvera facilement: $t = (1 + \varkappa)\tau$, $T = T_1\ (1 + \varkappa)$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\psi_1}{T} = \qquad\qquad - \alpha_1 \bar{n}_1^0 \qquad\qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_1} + \cdots = 0 \\
&\frac{\psi_2}{T} = \frac{\varkappa n_1^0}{1 + \varkappa} \qquad\qquad\qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_2} + \cdots = 0 \\
&\frac{\psi_3}{T} = \qquad\qquad - \alpha_3 \bar{n}_2^0 \qquad\qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_3} + \cdots = 0 \\
&\frac{\psi_4}{T} = \frac{\varkappa n_2^0}{1 + \varkappa} \qquad\qquad\qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_4} + \cdots = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\psi_{2n-3}}{T} = \qquad - \alpha_{2n-3} \bar{n}^0_{n-1} \qquad\qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-3}} + \cdots = 0 \\
&\frac{\psi_{2n-2}}{T} = \frac{\varkappa n^0_{n-1}}{1 + \varkappa} \qquad\qquad\qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-2}} + \cdots = 0 \\
&\frac{\psi_{2n-1}}{T} = \qquad\qquad - \alpha_{2n-1} \bar{n}_n^0 \qquad - \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-1}} + \cdots = 0 \\
&\frac{\psi_k}{T\mu} = 0,\ k = 1, 2, \ldots\ (2n-2).
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Nous avons posé généralement, comme l. c.[1]) p. 24.

$$\bar{n}_1^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_1^2},\quad \bar{n}_2^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_3^2},\ \ldots\ \bar{n}^0_n = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_{2n-1}^2},$$

Dans la seconde dérivée on pourra remplacer F_0 par F''_0,

$$\left.\begin{aligned}
F''_0 &= \Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(2)} + \Phi_0^{(3)} + \cdots + \Phi_0^{(n)} = \\
&= \frac{k^2\,\alpha''_1\,\beta''^2_1}{2\,x_1^2} + \frac{k^2\,\alpha''_2\,\beta''^2_2}{2\,x_3^2} + \cdots + \frac{k^2\,\alpha''_n\,\beta''^2_n}{2\,x_{2n-1}^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Nous dénotons — comme il avait été déjà dit (p. 9. de ce mémoire) — par les crochets — la valeur moyenne de la fonction correspondante $[F_1] = SA \cos \omega$, la somme S se rapportant seulement aux termes critiques.

Pour notre but qui n'est pour le moment que la démonstration de l'existence des solutions séculaires, il suffira de respecter seulement la première puissance de la masse.

En effet il se montrera au cours de l'étude des équations de condition qu'on aura besoin de rechercher les parties F_0, F_1, de la fonction F. Voir aussi [1]) p. 9—11.

Pour s'assurer de possibilité de résolution de nos équations en ψ par rapport aux inconnues (à savoir les déplacements initiaux) on aura à examiner le déterminant bien connu de Jacobi-Poincaré, pour la valeur du paramètre $\mu = 0$. Donc il suffira pour cela de connaître la partie F_0 et après la suppression du facteur μ dans quelquesunes des conditions — la partie F_1.

De même pour établir la possibilité du prolongement analytique du cas dégénéré (pour $\mu = 0$) on n'aura qu'à examiner la partie F_1.

Voilà pourquoi la dite partie moyenne se décompose en plusieurs fonctions, dont la forme sera chaque fois exactement celle étudiée l. c. [1] § 2. rémarque 2, p. 12—17. Donc il s'agit seulement des termes des trois catégories *b), c), d),* qui seront critiques.

Nous allons examiner les conditions de l'existence:

Les équations en φ_k mènent au système $\frac{\varphi_1}{\mu} = \frac{\varphi_2}{\mu} = \ldots = \frac{\varphi_{2n-1}}{\mu} = 0$

qui donne les conditions bien connues des conjonctions et oppositions symétriques ainsi que des autres solutions, plus générales. Mais si l'on examine le déterminant des équations en $\psi_k = 0$, on trouvera qu'il disparaît identiquement.

Afin de franchir cette difficulté nous allons employer la même méthode que nous avons proposée déjà l. c. [1] p. 26.

D'après la réduction des équations du mouvement, on suppose l'une des excentricités ou bien l'une des coordonnées de position de l'indice paire à savoir $x_2, x_4, \ldots x_{2n}$ éliminée théoriquement au moyen de l'intégrale des aires [(14), p. 12., § 1].

En étudiant les conditions en $\psi_i = \varphi_i = 0$, nous avons donc $4n - 2$ équations en nombre contenant $4n - 1$ inconnues à savoir $\varkappa, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{2n-1}$. L'existence de l'intégrale de l'énergie $F = C$ sera cause de ce que les équations ne sont pas indépendantes. Puisque $\frac{\partial F}{\partial x_{2n-1}} \gtrless 0$, on supprimera la dernière équation $\varphi_{2n-1} = 0$.

On aura donc en somme $4n - 3$ équations de condition renfermant $4n - 1$ inconnues. En posant comme de coutume $\beta_1 = 0$, on aura encore *une arbitraire à disposer, avec la seule restriction que la valeur choisie pour cette arbitraire inconnue restera encore de l'ordre de masse troublante μ.*

En posant $\varkappa = 0$, on retomberait au cas des solutions de Poincaré à période courte.

Dans le cas du problème des trois corps on pouvait procéder de deux manières différentes. Citons à cet effet les équations de condition p. 9., ainsi que le § 3., p. 23., p. 26. du mémoire précédent [1]):

1. Ou bien on posera $\alpha_2 = 0$ et le déterminant Jacobi-Poincaré sera différent de zéro.

2. Ou bien on choisira le paramètre $\varkappa$ de sorte que les équations en $\psi_{2i} = 0$, deviennent divisibles par μ.

On pourra ensuite supprimer partout le facteur μ et remplacer les équations originaires par un système, dont le déterminant sera déjà manifestement distinct de zéro. L'accroissement α_2 ne sera plus zéro.

Nous avons choisi arbitrairement (dans le cercle de convergence de la fonction perturbatrice) les valeurs des excentricités e, e', l. c. [1]).

D'après la méthode première nous posons $\alpha_2 = 0$ ($\backsim \delta e = 0$), et nous rangeons $\varkappa$ parmi les déplacements inconnus. Le procédé bien connu des approximations successives menerait à une valeur de $\varkappa$ représentée essentiellement par

$$\frac{\varkappa}{1+\varkappa} = \frac{\mu}{n_1^0} \frac{\partial [F_1 + \mu F_2 + \ldots]}{\partial x_2}.$$

Pour passer aux solutions périodiques, on aura évidemment à se borner aux valeurs $\varkappa = \pm \frac{s}{pr}$, l. c. p. 22.[1])

s signifie un nombre entier. On aura à employer le signe positif (ou négatif), si la valeur de l'expression analytique $\varkappa$ c'est-à dire f, sera positive (où négative). Voir aussi le mémoire [1]) p. 19, 21, 22, 25.

Donc l'une des deux excentricités restera parfaitement libre ou bien la constante des aires. Nous choisissons e, trouvons le e' correspondant et posons $\delta e = 0$, c'est-à-dire $\alpha_2 = 0$.

Les valeurs initiales admissibles pour l'existence d'une solution séculaire seront données par

$$e, \; e' + \delta e', \; \delta a, \; \delta a' \text{ etc.}$$

En effet, le déterminant des coëfficients des inconnues était distinct de zéro, l. c., p. 23.[1])

Par contre d'après la deuxième méthode on choisira les excentricités en posant

$$\varkappa = \pm \frac{s}{pr}, \quad \frac{\varkappa}{1+\varkappa} = \frac{\mu}{n_1^0} \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2},$$

où dans la valeur moyenne du deuxième membre ne figure que la partie de la fonction F qui contiennent la première puissance de masse

Fig. Pour déterminer les valeurs des déplacements $\sim \delta_1 a$, $\alpha_2 \sim \delta_1 e$, $\alpha_3 \sim \delta_1 a'$, ... $\beta_1 = 0$, β_2, β_3 on aura d'après ce qui a été dit, l. c.[1]) cinq équations avec le même nombre des inconnues.

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{\mu} = \varphi_3 = \frac{\psi_1}{\mu} = \frac{\psi_2}{\mu} = 0.$$

Le déterminant de ces équations sera déjà essentiellement distinct de zéro. N'ayant pas posé $\alpha_2 = 0$, $\delta_1 e = 0$ on obtiendra pour cette inconnue une valeur bien déterminée.

On trouvera ainsi pour les valeurs initiales de la solution périodique

$$e_1 + \delta_1 e, \quad e'_1 + \delta_1 e',$$

et il ne sera toujours possible de procéder de la manière à ce que

$$e = e_1 + \delta_1 e, \qquad e' + \delta e' = e'_1 + \delta_1 e'_1$$
$$a + \delta a = a + \delta_1 a, \quad a' + \delta a' = a' + \delta_1 a'$$

En effet, nous étions partis — par hypothèse — des valeurs initiales a, a' identiques de sorte que l'on aurait necéssairement $\delta_1 a = \delta a$, $\delta_1 a' = \delta a'$, ce qui n'aura pas lieu en général. D'ailleurs, d'après la première méthode le déterminant des équations en φ était distinct de zéro, tandisque dans le cas de la deuxième méthode il contenait le facteur μ.

Passons au cas du problème de n corps. Si l'on essayait d'employer la première méthode, elle serait complètement en défaut. En effet, les équations (18) de condition montrent qu'ensuite le déterminant des équation en ψ pour $\alpha_2 = 0$

$$\frac{\partial\,(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{2n-1})}{\partial\,(\varkappa, \alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-1})} = 0$$

serait nul.

Donc seulement la deuxième méthode sera admissible pour le calcul. Donc nous choisissons les conditions initiales de sorte que

$$\frac{\varkappa\, n_1^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_2}, \quad \frac{\varkappa\, n_2^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_4}, \ldots \frac{\varkappa\, n_{n-1}^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-2}}. \qquad (I)$$

Ensuite toutes les équations d'un indice pair telles que $\psi_2, \psi_4, \ldots \psi_{2n-2}$ renfermeront le facteur commun μ. Nous allons les remplacer par les équations

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \frac{\psi_4}{\mu} = \ldots = \frac{\psi_{2n-2}}{\mu} = 0,$$

Écrivons le système correspondant explicitement: $n_k^0 = \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_{2k-1}^2}$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\psi_1}{T} &= -\alpha_1 \bar{n}_1^0 \ldots \qquad -\mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \ldots = 0 \\
\frac{\psi_2}{T\mu} &= -\alpha_1 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_1 \partial x_2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_2^2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_2 \partial x_3} - \alpha_4 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_2 \partial x_4} - \ldots \\
&\qquad \ldots - \mu \frac{\partial [F_2]}{\partial x_2} + \ldots = 0 \\
\frac{\psi_3}{T} &= \qquad - \alpha_3 n_2^0 \ldots - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_3} + \ldots = 0 \\
\frac{\psi_4}{T\mu} &= -\alpha_1 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_1 \partial x_4} - \alpha_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_2 \partial x_4} - \alpha_3 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_3 \partial x_4} - \alpha_4 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_4^2} - \ldots \\
&\qquad \ldots - \mu \frac{\partial [F_2]}{\partial x_4} + \ldots = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\psi_{2n-3}}{T} &= \qquad - \alpha_{2n-3} \bar{n}_{n-1}^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-3}} + \ldots = 0 \\
\frac{\psi_{2n-2}}{T\mu} &= -\alpha_1 \frac{\partial_2 [F_1]}{\partial x_1 \partial x_{2n-2}} - \alpha_2 \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_2 \partial x_{2n-2}} \ldots - \alpha_{2n-1} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial x_{2n-1} \partial x_{2n-2}} - \\
&\qquad - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}} + \ldots = 0 \\
\frac{\psi_{2n-1}}{T} &= \qquad - \alpha_{2n-1} \bar{n}_n^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-1}} + \ldots = 0
\end{aligned}\right\} (20)$$

Nous avons disposé de $\varkappa$ et posé $\beta_1 = 0$. Ainsi nous aurons $4n-3$ équations avec le même nombre des inconnues α_1, α_2, α_{2n-1} β_2, β_3, β_{2n-1}.

On voit que cette fois le déterminant sera différent de zéro. Nous supprimons à cet effet le facteur μ dans toutes les équations du système dernier dont l'indice est pair.

Nous allons indiquer maintenant le sens géométrique des solutions trouvées. Les conditions (*I*) donnent pour les valeurs des paramètres μ et t suffisamment petits le mouvement rotatoire des différences de périhélies conformément à la remarque faite dans ce paragraphe p. 17.

Mais toutes les valeurs de mouvements de périhélies ne seront pas admissibles, si l'on veut obtenir les solutions à une période séculaire. On devra faire un choix convenable de paramètres. Voici les conditions de périodicité, on les obtiendra en prenant soin à ce que les termes renfermant le temps explicite dans les fonctions trigonométriques embrassent la période T.

$$f_1 = \frac{n_1^0\, \varkappa}{1+\varkappa}, \quad f_1\, T = n_1^0\, \varkappa\, T_1 = 2\,\pi\, s_1$$

$$f_2 = \frac{n_2^0\, \varkappa}{1+\varkappa}, \quad f_2\, T = n_2^0\, \varkappa\, T_1 = 2\,\pi\, s_2$$

. . . .

$$T = \frac{2\,\pi\, s_1}{f_1} = \frac{2\,\pi\, s_1}{n_1^0\, \varkappa}(1+\varkappa) = \frac{2\,\pi\, p_1\, r}{n_1^0}(1+\varkappa) = \frac{2\,\pi\, s_2}{f_2} =$$

$$= \frac{2\,\pi\, s_2}{n_2^0\, \varkappa}(1+\varkappa) = \frac{2\,\pi\, p_2\, r}{n_2^0}(1+\varkappa) = \ldots$$

On aura donc $\varkappa = \frac{s_1}{p_1\, r} = \frac{s_2}{p_2\, r} = \frac{s_3}{p_3\, r} = \ldots \frac{s_{n-1}}{p_{n-1}\, r}$. (I)

s_k signifie un nombre entier positif ou négatif. On aura à employer le signe positif (négatif), si la valeur de l'expression analytique $\varkappa$, c'est-à-dire f sera positive (négative). *Ainsi, en traitant les théorèmes (I), (II), ... (VII) etc., j'écrirai ou bien simplement* $\varkappa = \frac{s_k}{p_k\, r}$ *ou bien en précisan le signe* $\varkappa = \pm \frac{s_k}{p_k\, r}$.

Nous trouvons donc en somme le théorème suivant:

(I.) *Dans le voisinage de chaque type de commensurabilité des moyens mouvements il y aura une multiple infinité de solutions séculaires. Le mouvement de n planétes dont il s'agit ne sera que synodique. Les orbites des planètes seront données approximativement par des ellipses en rotation. Choisissons une des planètes d'ailleurs quelconque* (π_n)*. Envisageons les vitesses relatives des lignes des apsides rapportées (par différence) à la ligne choisie* (π_r)*. La vitesse des apsides de l'une quelconque des planètes dépassera la dernière* π_r*, fixée plus haut, de beaucoup, de sorte, qu'elle va la rattraper après plusieurs tours complets. Le nombre de ces tours étant donné par* s_k. il sera toujours $\frac{s_k}{s_h} = \frac{p_k}{p_h} = \frac{n^0{}_k}{n^0{}_h}$. *Donc le nombre de tours est proportionnel au mouvement moyen diurne de la planète correspondante.*

II. Poursuivons pour un moment les équations du mouvement relatives au système canonique (10). On trouvera cette fois:

$$T = T_1\,(1+\varkappa)$$
$$F_0 = F_0'' + n_n^0\,(x_1 - x_2) + n_n^0\,(x_3 - x_4) + \cdots + n_n^0\,(x_{2n-3} - x_{2n-2})$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\psi_1}{T} &= \frac{\varkappa\,(n_1^0 - n_n^0)}{1+\varkappa} - \alpha_1\, n_1^0 - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_1} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_2}{T} &= \frac{\varkappa\, n_n^0}{1+\varkappa} - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_2} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_3}{T} &= \frac{\varkappa\,(n_2^0 - n_n^0)}{1+\varkappa} - \alpha_3\, n_2^0 - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_3} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_4}{T} &= \frac{\varkappa\, n_n^0}{1+\varkappa} - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_4} + \ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\psi_{2n-1}}{T} &= \frac{\varkappa\, n_1^0}{1+\varkappa} - \alpha_{2n-1}\, n_n^0 - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_{2n-1}} + \ldots = 0\\
\frac{\varphi_1}{T\mu} &= \frac{\varphi_2}{T\mu} = \ldots = \frac{\varphi_{2n-2}}{T\mu} = 0.
\end{aligned}\right\}(21)$$

On posera, comme de coutume $\beta_1 = 0$.

Afin de supprimer les parties indépendantes de μ, on choisira:

$$\frac{\varkappa\, n_n^0}{1+\varkappa} = \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_2} = \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_4} = \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_6} = \ldots = \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_{2n-1}} \qquad \text{(II)}$$

Ensuite on aura $(4n-3)$ équations avec le même nombre d'inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ β_2, β_3, β_{2n-1}.

Nous nous contentons d'indiquer le déterminant appartenant cette fois aux équations en ψ.

$$\psi_1 = \frac{\psi_2}{\mu} = \psi_3 = \frac{\psi_4}{\mu} = \ldots \frac{\psi_{2n-2}}{\mu} = \psi_{2n-1} = 0$$

que voici:

$$\begin{vmatrix}
-n_1^0, & 0, & 0, \ldots\ldots 0, & 0\\
\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}, & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_2^2}, & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_2\,\partial\,x_3}, \ldots & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_2\,\partial\,x_{2n-1}}\\
0, & 0, & -n_2^0, \quad 0, & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_1\,\partial\,x_{2n-2}}, & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_2\,\partial\,x_{2n-2}}, & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_3\,\partial\,x_{2n-2}}, \ldots & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial\,x_{2n-1}\,\partial\,x_{2n-2}}\\
0, & 0, & 0, \ldots\ldots 0, & -n_u^0
\end{vmatrix} \gtrless 0$$

Il faut accentuer, que de même que dans le cas précédent, toutes les valeurs des mouvements de périhélies ne seront pas admissibles. On devra fixer un choix particulier que voici

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = f_2 = \ldots = f_{n-1} = f = \mu \dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_2} \\ f = \dfrac{n_n^0 \varkappa}{1+\varkappa}, \; f\,T = n_n^0 \varkappa T_1 = 2\pi s \\ T = \dfrac{2\pi s}{f} = \dfrac{2\pi s}{n_n^0 \varkappa}(1+\varkappa) = \dfrac{2\pi p_1 r}{n_1^0}(1+\varkappa) = \dfrac{2\pi p_2 r}{n_2^0}(1+\varkappa) = \ldots \end{array}\right\} \text{(II)}$$

Donc $\varkappa = \dfrac{s}{p_k r} \dfrac{n_k^0}{n_n^0}$ et nous trouvons le théorème suivant:

(II.) *Dans le voisinage de chaque type de commensurabilité des mouvements moyens il y aura une multiple infinité des solutions séculaires. Le mouvement des n planètes dont il s'agit ne sera que synodique. Les orbites des planètes seront données approximativement par des ellipses en rotation. Choisissons parmi les n planètes l'une d'ailleurs quelconque (π_n). Les vitesses de rotation des apsides de toutes les autres planètes seront absolument les mêmes, cependant la valeur de cette vitesse commune dépassera la dernière, fixée plus haut, de beaucoup, de sorte que pendant une période les périhélies rattraperont le dernier après avoir décrit plusieurs tours (de 360°).*

On pourra indiquer facilement tous les cas qui pourront se présenter d'après les principes exposés dans le mémoire cité [1]) p. 19., 20. c'est-à-dire en jugeant d'après le signe donné par la dernière équation du mouvement pour π_n.

III. Fixons encore — pour compléter — la solution à période courte, donnée par H. Poincaré. Posons à cet effet $\varkappa = 0$, nous allons appeler cette condition (III), le cas de libration de Laplace-Poincaré. Son sens géométrique est facile à donner:

Toutes les différences des rotations de périhélies $f_k = 0$, seront nulles, c'est-à-dire tous les périhélies tourneront dans la même direction et avec la même vitesse, indiquée par la dernière (d'ailleurs quelconque) des équations du mouvement (pour $\pi_n = y_{2n}$).

(III.) *Les planètes oscillent autour de la ligne commune des apsides (conjonctions et oppositions symétriques).*

Notons expressément qu'il y aura aussi des solutions générales où des lignes des apsides diffèrent des certains angles, quoique toutes étant animées d'un commun mouvement rotatoire (Solutions générales du cas de libration Laplace-Poincaré).

Donc nous avons obtenu en somme deux résultats importants au moyen de la simple substitution $t = (1+\varkappa)\,\tau$ employée jusqu'à présent, d'après la méthode 2) étudiée plus haut p. 17. de ce mémoire.

Mais cette substitution, ainsi que son équivalent, le changement canonique des variables (13) ne sont pas les seules qu'on puisse imaginer. En effet on indiquera facilement des généralisations qui nous permettront de pénétrer plus avant dans la théorie de nos solutions.

Nous allons étudier à cet effet en détail la substitution fondamentale $t = (1 + \varkappa)\,\tau$ servant à prolonger la période.

Dans sa forme primitive la substitution a été employée pour la recherche des orbites certaines, concrètes du problème restreint par Henry Poincaré[8]) et Karl Schwarzschild.[9])

Cependant le vrai sens géométrique ainsi que la portée de cette substitution surtout au point de vue des généralisations et des emplois avait complètement échappé à l'attention des géométres.[10]) Je n'aurais à ce point de vue qu'à parler des difficultés de Poincaré — que j'ai citées dans l'Introduction du mémoire précédent[10]) et dont on trouverait plusieurs mentions à divers endroits des Méthodes Nouvelles.

Ce sont ces difficultés qui l'ont obligé à consacrer tant d'attention à la théorie des pertubations séculaires[11]) (ainsi qu'à avoir recours aux méthodes employant les séries asymptotiques à la Newcomb-Lindstedt [le reste du II. tome]).

Voilà pourquoi il se vit obligé de proposer l'émploi de l'opération à la Delaunay. De même Schwarzschild quoique ayant employé la substitution mentionnée avec tant de succès — immédiatement dans la poursuite [12]) de ses recherches bien commencées — est obligé d'avoir recours à la même opération à la Delaunay.

Voici en quoi consistent ces difficultés: Dans les équations de la dynamique la plupart des mouvements moyens des variables angulaires ne figurent pas du tout. Les orbites dégénérées, dans le cas de la disparition du paramètre troublant ne sont que des ellipses fixes (ou plus généralement des courbes fixes).

(On a en effet:[13])

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_3} = \frac{\partial F_0}{\partial x_4} = 0.$$

[8]) Méthodes nouvelles de la mécanique céléste Tome I., p. 89., Bul. astron. XIX., p. 181.

[9]) Astron. Nachr. Band 147 (3506), p. 17., Charlier Mech. d. Himmels. Band II., p. 242., 249.

[10]) Nouvelles classes des solutions du problème général des Trois corps, page 3. Publ. de la faculté des sciences de l'Université Charles 15⁰. 1923. Institut astron. Publ. 1⁰ (série II.), page 3.

[11]) Méth. nouv. tome II., pp. 38.—73.

[12]) Astr. Nachr. Band 147 (3522), p. 289.

[13]) Méth. nouv. I., p. 133.

Par suite de cela on ne pourra se procurer les coëfficients des inconnues certaines dans les équations de condition (voir les coëfficients des équations) (18), (21).

De tels coëfficients n'existaient malheureusement que dans le cas du problème restreint. Dans des cas généraux, on ne pouvait obtenir ces coëfficients qu'en passant aux orbites troublées partiellement — par l'emploi des pénibles transformations à la Delaunay. Moi même, j'ai été obligé — pour démontrer l'existence des orbites certaines du problème astéroidique — d'employer la dite transformation.[14])

Tandisque Poincaré à plusieurs endroits des Méth. Nouv. avait accentué que le prolongement de période n'est admissible que dans le cas où le temps ne figure pas explicitement — j'ai essayé de faire tomber ce principe en observant cependant la période (prescrite dans ce cas). J'ai réussi ainsi à démontrer que le dit paramètre du problème restreint qui signifiait le mouvement du périhélie dans le problème moins général, restreint — gardera encore dans le problème astéroïdique — son sens géométrique — et que son emploi sera admissible, bien que le temps figure explicitement dans les équations du mouvement. J'ai passé ensuite au cas le plus général du problème de trois et de n-corps.

J'ai reconnu qu'on peut encore cette fois — et cela toujours — obtenir de tels coëfficients (des quantités inconnues, voir page 19, 21, de ce mémoire et [1])) *en entroduisant les systèmes tournants avec des vitesses admissibles*. Voilà pourquoi j'ai combiné la substitution ancienne avec un changement des variables dépendantes. Le prix de ce changement consiste en l'apparition explicite du temps dans les équations du mouvement et cela avec la période prescrite par la vitesse de rotation. Mais je savais déjà traiter — de telles équations, qui étaient du même type que les équations au temps explicite du problème astéroidique, que j'avais étudié auparavant.[14])

Ce n'est qu'en étudiant les orbites séculaires de classes très variées que j'ai reconnu le vrai rôle du paramètre en question. Voici les résultats de mes études:

1.) En employant la substitution $t = (1 + \varepsilon)\,\tau$ d'après les méthodes anciennes on effectue en réalité un simple prolongement de période.

2.) Par contre je propose de combiner cette substitution $t = (1 + \varkappa)\,\tau$ avec un changement approprié des variables dépendantes.

Par ce procédé on fait figurer le mouvement moyen du périhélie ou plus généralement un nouveau mouvement moyen — et l'on prolonge en

---

[14]) Bul. astron. II., Paris (1922), 2º série, p. 425—458.

même temps la période. Le dit procédé effectue l'apparition explicite du temps comme un nouvel argument des fonctions trigonométriques. Donc on doit conformer la période des solutions en question à la condition de périodicité, c'est à dire à une période prescrite. Voilà pourquoi je propose — pour pouvoir passer à une période quelconque:

3.) La substitution $t = (1 + \varkappa)\,(1 + \varepsilon)\,\tau$ combinée avec un changement convenable des variables dépendantes.

J'emploierai dans le premier cas le signe ε et je parlerai du paramètre de prolongement de période, dans le deuxième cas je me servirai du signe $\varkappa$ en parlant du paramètre de périhélie, ou plus généralement du paramètre d'un nouveau mouvement moyen. Je citerai des exemples pour les deux cas que j'avais étudiés auparavant. Le lecteur trouvera les discussions complètes du pure prolongement de période dans le § 5 de mon mémoire présenté à la Société Royale des Sciences de Prague 1922[15]) — ou bien des exemples plus simples dans le mémoire publié ibidem 1925.[16]) Pour donner un exemple du deuxième cas je citerai le mémoire[1]) contenu dans les Publications de l'Institut Astronomique, II. sér., nro 1., § 1, et § 2. La substitution ancienne prolongeait la période d'après 1.) Ce n'était *que par hasard* dans le *cas du problème restreint* qu'on pouvait obtenir le mouvement de périhelie.[8]) [9]) En effet les dits coëfficients existaient bien, donc on retombait au cas 1.) p. 24. On ne faisait en realité que de changer les mouvements moyens, supposés commensurables originairement, de

$$n,\quad n' \quad \text{en} \quad \frac{n}{1+\varkappa},\quad \frac{n'}{1+\varkappa}.$$

Le procédé était donc parfaitement conforme à la prescription de H. Poincaré[17]) et il était possible chaque fois que — toutes les variables angulaires jouissent déjà des mouvements moyens. Dans le cas où il n'y aurait pas de ces mouvements on ne pourrait pas se servir de cette méthode. Mais le procédé que je propose, essaie de combler cette lacune et il mène toujours au but.

J'obtiens les mouvements moyens artificiellement en les impliquant dans les variables nouvelles. Reprenons pour fixer les idées l'exemple cité du problème générale de trois corps,[1]) l. c., p. 8.

[15]) Classes de nouvelles solutions (de bifurcation) à période séculaire du problème général de trois corps. Mém. de la Soc. Roy. de Bohême 1922.

[16]) Sur une extension du domaine des solutions périodiques de la deuxième sorte. Nouvelles solutions du problème astéroidique à courte et à longue période. Mém. de la Soc. Roy. de Bohême: Publications de l'Institut astron. de l'Université Charles, nro 3[0].

[17]) Méthodes Nouvelles, tome I., p. 114.

Je choisis au l'eu de variables originaires

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3 \quad \text{les variables:}$$
$$y_1 - n''_0 t, \quad y_2 + n''_0 t, \quad y_3.$$

Je pose de nouveau $t = (1 + \varkappa)\,\tau$, mais cette fois on pourra de même gagner de valeurs différentes de zéro, parce que les coëfficients de cette inconnue $\varkappa$ éxistent bien, et le déterminant nécessaire reste différent de zéro. On obtiendra immédiatement d'après la définition même de la coordonnée, la grandeur totale du mouvement séculaire moyen (particulièrement du mouvement séculaire de périhélie) en passant à la valeur *originaire* de la coordonnée en question — l. c.,[1]) p. 8., p. 11, puis rem.[*]) p. 10, du mém. présent; nous allons supprimer en même temps les μ.

$$y_1 + \frac{n_0 - n''_0}{1+\varkappa}\,t + M_0 + \pi - \pi' + \beta_1 + n''_0\,t = \frac{n_0 + \varkappa\, n''_0}{1+\varkappa}\,t + y_1^0 + \beta_1,$$

$$y_2 + \frac{n''_0}{1+\varkappa}\,t - \pi + \pi' + \beta_2 - n''_0\,t = -\frac{\varkappa\, n''_0}{1+\varkappa}\,t + y_2^0 + \beta_2,$$

$$y_3 = y_3 = \frac{n'_0\,t}{1+\varkappa} + y_3^0 + \beta_3.$$

Les conditions qui sont à observer sont les suivantes:

a) La périodicité des orbites dégénérées (non troublées) pour $\mu = 0$ exigera

la condition $\frac{n_0}{n'_0} = \frac{p+q}{p}$.

b) La même condition pour les mouvements moyens troublés doit encore être remplie. Donc $\frac{n_0}{1+\varkappa} : \frac{n'_0}{1+\varkappa} = (p+q) : p$

c) Le nouveau mouvement moyen, gagné par l'introduction des axes tournants, c'est-à-dire par le changement des variables dépendantes, doit encore remplir la condition de périodicité des mouvements troublés.

d) Enfin la vitesse du nouveaux système des axes tournants ou bien les mouvements moyens figurant dans les nouvelles variables dépendantes — devront rester tels que le mouvement dégénéré, non troublé pour $\mu = 0$, reste périodique avec la même période des orbites dégénérées, originaires.

On voit clairement que cette substitution faisant apparaître le temps fictivement n'admet pas le passage à une période quelquonque. En effet les équations du mouvement jouissent d'une période prescrite, tandisque les équations originaires admettaient une période quelquonque. Donc le résultat essentiel est:

Nous avons obtenu d'après 2.) *la possibilité de naissance d'un mouvement moyen tout nouveaux,* c'est-à-dire *du mouvement de la différence des longueurs des périhélies. Nous avons prolongé en même temps la période.*

Mais ce prolongement n'est que d'une valeur conforme à la périodicité d'une période nouvellement introduite.

Comment donc passer à une période quelconque.

Cette étude exige quelques recherches préliminaires, bien délicates que je vais exposer d'abord.

Pour éclairer la méthode employée dans la suite je vais envisager deux cas particuliers *A*), *B*).

A) Voici un exemple où l'on introduit d'après 2.) le système tournant, sans faire apparaître l'existence du mouvement de la différence des périhélies. En effet reprenons le cas cité plus haut, p. 11., l. c.[1])

En choisant $n''_0 = n'_0$ on trouvera ce mouvement en examinant l'accroissement de la variable y_2. On aura donc:

$$y_2 = -\pi + \pi' + n''_0 t = -\pi + \pi' + n'_0 (1 + \varkappa) \tau$$

donc pour l'accroissement $n'_0 \tau = \frac{n'_0 t}{1 + \varkappa}$ et pour l'accroissement dans le système originaire (non animé d'une rotation) $\frac{n'_0 t}{1 + \varkappa} - n'_0 t = -\frac{\varkappa n'_0}{1 + \varkappa} t$, donc le mouvement de la différence de périhélies existe. Par contre si l'on pose

$$n''_0 = \frac{n'_0}{1 + \varepsilon}, \quad t = (1 + \varepsilon) \tau$$

$$y_2 = -\pi + \pi' + n''_0 t = -\pi + \pi' + \frac{n'_0}{1 + \varepsilon} t = -\pi + \pi' + \frac{n'_0 (1 + \varepsilon) \tau}{1 + \varepsilon},$$

on constatera facilement que l'accroissement défini plus haut et s'ensuivant de la rotation même de la coordonnée en question, donnera cette fois pour la rotation de la différence des périhélies $\frac{n'_0 t}{1 + \varepsilon}$, donc dans le système originaire on aura

$$\frac{n'_0 t}{1 + \varepsilon} - \frac{n'_0 t}{1 + \varepsilon} = 0.$$

Il n'y a donc pas de mouvement moyen séculaire de la différence des longueurs des périhélies. On retombe ainsi au premier cas 1.) page 24. de ce mémoire où il s'agit du pur prolongement de période bien que l'on ait introduit le système des axes tournants et changé à cet effet la

variable dépendante y_2. Nous l'avons atteint en choisissant la vitesse de rotation elle même comme inconnue ε, $\frac{n'_0}{1+\varepsilon}$.

Donc on pourra toujours séparer le pur prolongement de période (ε) de celui qui sera combiné avec l'introduction du mouvement de la différence des périhélies ($\varkappa$).

B) Voici le deuxième cas particulier. Nous allons voir en même temps, pourquoi cette fois le procédé ne mène pas au but.

Nous nous servirons de la substitution composée

$$t = (1+\varkappa)(1+\varepsilon)\tau,$$

et nous introduirons en même temps le système en rotation pour nous procurer le coefficient nécessaire. Mais cette fois on ne saurait non plus jamais passer à une période quelconque. En effet on trouvera dans ce cas

$$y_2 = \pi + \pi' + n'_0 t = -\pi + \pi' + n'_0 (1+\varkappa)(1+\varepsilon)\tau$$

de sorte que l'accroissement de y_2 c'est-à-dire le mouvement séculaire, relatif recherché, sera donné par $n'_0 \tau = \frac{n'_0 t}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)}$ et dans le système originaire, non animé du mouvement de rotation

$$-ft = \frac{n'_0 t}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)} - n'_0 t = -\frac{\varkappa+\varepsilon+\varkappa\varepsilon}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)} n'_0 t$$

la condition de périodicité donnera ensuite $fT = (\varkappa+\varepsilon+\varkappa\varepsilon) n'_0 T_1 = 2\pi s$, donc on ne pourrait passer à une période quelconque.

Nous allons profiter maintenant des experiences des deux derniers cas *A.)* et *B.)*. On reconnaîtra tout de suite que pour effectuer le passage desiré à une période quelconque on devra choisir la vitesse de rotation $\frac{n'_0}{1+\varepsilon}$ [18]). On trouvera cette fois:

---

[18]) Je profite de l'occasion pour corriger une faute que j'avais commise dans le § 4. du mémoire précédent [1]). J'ai moi même confondu le rôle des paramètres $\varkappa$, ε de sorte que les résultats y fixés resteraient moins généraux en se rattachant seulement aux orbites étudiées dans le mémoire [16]). Mais on pourra facilement corriger la faute et atteindre au résultat le plus général, dont il y est parlé en introduisant pour les variables, les substitutions suivantes

$$y_1 = M + \pi - \pi' - \frac{n'_0}{1+\varepsilon} t, \quad y_2 = -\pi + \pi' + \frac{n'_0 t}{1+\varepsilon}, \quad y_3 = M'$$

au lieu de celles écrites l. c. [1]) § 4., p. 26., ligne 2. en remontant — ensuite toutes les conséquences et résultats du paragraphe 4. cité [1]) resteront en vigueur, on n'aura qu'à poser $t = (1+\varkappa)(1+\varepsilon)\tau. = (1+\varepsilon_n)\tau$.

$$t = (1+\varkappa)\,(1+\varepsilon)\,\tau,\quad y_1 = M + \pi - \pi' - \frac{n'_0}{1+\varepsilon}\,t,$$

$$y_2 = -\pi + \pi' + \frac{n'_0}{1+\varepsilon}\,t = -\pi + \pi' + n'_0\,(1+\varkappa)\,\tau,\quad y_3 = M'.$$

Le mouvement moyen relatif sera donné par définition comme il suit:

$$n'_0\,\tau = \frac{n'_0}{(1+\varkappa)\,(1+\varepsilon)}\,t$$

et dans le système fixe il sera

$$-f\,t = \frac{n'_0}{(1+\varkappa)\,(1+\varepsilon)}\,t - \frac{n'_0}{1+\varepsilon}\,t = -\frac{n'_0\,\varkappa}{(1+\varkappa)\,(1+\varepsilon)}\,t$$

La condition de periodicité sera cette fois

$$f\,T = f\,T_1\,(1+\varkappa)\,(1+\varepsilon) = \frac{n'_0\,\varkappa}{(1+\varkappa)\,(1+\varepsilon)}\,(1+\varepsilon)\,(1+\varkappa)\,T_1 = 2\pi s$$

de sorte que cette condition impose une liaison seulement à la quantité $\varkappa$, *tandisque* ε *restera quelconque. Ainsi donc les deux rôles fondamentaux 1), 2) se trouvent combinés et l'on peut étudier les mouvements d'une période quelconque.*

Nous allons passer maintenant à l'étude des conditions *a*), *b*), *c*), *d*) page 26. Nous avons trouvé en somme que la substitution $t = (1+\varepsilon)\,\tau$ ad 1.) p. 24. ainsi que $t = (1+\varkappa)\,\tau$ ad 2.) p. 24. prolonge toujours la période. Tandisque le procédé ancien cité plus haut ad 1.) p. 24. profitait seulement des conditions page 26. *a) b)*, j'ai ajouté la condition *c)* c'est-

---

Voici les formules finales remplaçant celles de page 27, 28, l. c.

$$T = T_1\,(1+\varkappa)\,(1+\varepsilon),\qquad (1+\varepsilon)\,f = \frac{\varkappa\,n'_0}{1+\varkappa},\qquad T_1 = \frac{2\pi\,pr}{n'_0} = \frac{2\pi\,(p+q)\,r}{n_0}$$

$$F_0 = \frac{k^2\,\beta_1''^2\,\alpha_1''}{2x_1^2} + \frac{k^2\,\beta_2''\,\alpha_2''}{2x_3^2} + \frac{n'_0}{1+\varepsilon}\,(x_1 - x_2),$$

$$\mu x_1 = L,\quad \mu x_2 = L - G,\quad \mu x_3 = L',\qquad y_1 = M + \pi - \pi' - \frac{n'_0\,t}{1+\varepsilon}$$

$$y_2 = -\pi + \pi' + \frac{n'_0\,t}{1+\varepsilon},\ y_3 = M',$$

$$\frac{\varphi_1}{T} = \frac{n_0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_0'\,\varkappa}{1+\varepsilon_n} - a_1\,n_0 \qquad - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_1} + \cdots = 0$$

$$\frac{\varphi_2}{T} = \frac{\varkappa\,n_0'}{1+\varepsilon_n} \qquad - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_2} + \cdots = 0$$

$$\frac{\varphi_3}{T} = \frac{n_0'\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} \qquad - a_3\,n'_0 \qquad - \mu\,\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\,x_3} + \cdots + 0$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0,\qquad n_0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\,x_1^2},\qquad n'_0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\,x_3^2}.$$

à-dire la substitution $t = (1 + \varkappa)\tau$ combiné ou bien avec le changement de variable $-\pi + \pi'$ en $-\pi + \pi' + n'_0 t$ ou bien en $-\pi + \pi' + \frac{n'_0}{1+\varepsilon}$.

Donc je pose: $y_1 = M + \pi - \pi' - \frac{n'_0}{1+\varepsilon} t$, $y_2 = -\pi + \pi' + \frac{n'_0}{1+\varepsilon} t =$

$$= -\pi + \pi' + n'(1+\varkappa)\tau, \quad y_3 = M'$$

au lieu de: $y_1 = M + \pi - \pi'$, $y_2 = -\pi + \pi'$, $y_3 = M'$.

Que signifient les conditions anciennes *a) b)* pour le calcul.

Si nous reprenons les exemples cités, nous allons trouver qu'il s'agissait de garder les mêmes termes critiques dans la fonctions $[F_1]$ dans le cas $\left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = 0$ comme dans le cas $\left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \varkappa\end{matrix}\right\} \gtrless 0$.

Je renvoie à ce point de vue aux calculs de § *2* p. 14—16. l. c. [1]) ainsi qu'aux calculs du § 3. p. 39—44., de ce mémoire. En effet si une telle condition y ajoutait quelque terme (même de l'ordre de masse μ ou de $\varkappa$ [ou ε]), qui ne se détruirait pas avec les autres pour donner exactement zéro, on obtiendrait un terme proportionel au temps. Donc on aurait au lieu d'un terme critique indépendant de temps un terme de la forme $A \cos(\varepsilon n t + c)$. Mais un tel terme s'intègre autrement, il mène à la fonction sinus $\frac{A}{\varepsilon n'} \sin(\varepsilon n' t + c)$ et si l'on y introduit les limites de l'intégration 0 et T, on trouvera d'après les conditions de périodicité deux résultats de la même grandeur absolue mais de signes contraires. Ainsi donc, les termes critiques donneraient en somme zéro pour le mouvement séculaire relatif des périhélies etc.

C'était le même but que je poursuivais en introduisant le paramètre $\varkappa$, du mouvement de la différence des longueurs de périhélies.

Mais je l'ai atteint d'une manière autre que le procédé ancien. En effet les calculs cités montrent clairement que dans le cas (c) les arguments des termes critiques se détruisent encore exactement, non pas par suite de la conservation de la proportionalité des mouvements moyens, mais par suite de l'introduction fictive du temps. Cette introduction était liée comme nous venons de le voir p. 26., 30., au changement des variables dépendantes y_k.

J'espère que l'explication donnée ci dessus suffira au lecteur pour expliquer comment on pourra passer immédiatement aux généralisations rémarquables. Nous allons trouver que l'on pourra introduire pour ainsi dire d'innombrables paramètres resp. »variables parasites«. Juste-

ment nous venons de constater que la condition *b*), p. 26., de conservation de proportionalité des mouvements moyens n'était pas nécéssaire pour le cas *2*), p. 24., de l'introduction de nouveaux mouvements moyens (et particulièrement du mouvement relatif) des périhélies. D'ailleurs le facteur de la quantité $\varkappa$ n'était choisi [1]) l. c. p. 8. que trop spécialement, on voit tout de suite qu'on pourra choisir pour observer en même temps la condition *d*) —

$$y_1 = M + \pi - \pi' - \frac{k''_1 n_0 + k''_2 n'_0}{1+\varepsilon} t = M + \pi - \pi' - \frac{2\pi l''}{T_1(1+\varepsilon)} t,$$

$$y_2 = -\pi + \pi + \frac{k''_1 n_0 + k''_2 n'_0}{1+\varepsilon} t = -\pi + \pi' + \frac{2\pi l''}{T_1(1+\varepsilon)} t,$$

$$y_3 = M', \qquad T_1 = \frac{2\pi pr}{n'_0},$$

k''_1, k''_2, l'' désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

La vitesse de rotation choisie, est donnée par une substitution linéaire embrassant les deux vitesses angulaires (mouvements moyens) des deux planètes en question.

Mais on peut facilement démontrer que le résultat ne mène qu'aux mêmes classes et orbites qui faisaient l'objet du mémoire précédent.

En effet on passera par la dite transformation à une orbite du même type et appartenant à un autre nombre rationnel $\varkappa = \pm \frac{s}{pr}$.

Écrivons à cet effet la condition de périodicité. Le mouvement séculaire de la différence des longueurs des périhélies est donné par

$$f = \varkappa \frac{k''_1 n_0 + k''_2 n''_0}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)} \text{ il sera donc}$$

$$f\,T = \pm 2\pi s = \varkappa \frac{k''_1 n_0 + k''_2 n''_0}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)} (1+\varkappa)(1+\varepsilon) \frac{2\pi pr}{n'_0} = \varkappa\, 2\pi l''.$$

$$T = (1+\varkappa)(1+\varepsilon)\,T_1,\quad n'_0 = \frac{2\pi pr}{T_1},\quad k''_1 n_0 + k''_2 n'_0 = \frac{2\pi l''}{T_1},$$

$$\text{donc } \varkappa = \pm \frac{s}{l''} \text{ q. e. d.}$$

Par contre on pourra procéder autrement. Nous allons trouver qu'on pourra amener par cette méthode l'existence *d'autres classes nouvelles d'orbites d'un caractère tout-à-fait différent des classes étudiées jusqu'à présent.*

Nous avons appris en effet à effectuer la naissance d'»un nouveau mouvement moyen« (la rotation séculaire de la différence des longueurs des périhélies π-π') dans une variable angulaire. On sera donc tenté de répéter le même raisonnement pour toutes les autres variables angulaires »même pour celles qui jouissaient déjà d'un tel mouvement moyen dans le cas dégénéré $\mu = 0$«.

Voici la forme la plus générale de la substitution. Nous nous bornons, pour simplifier, au cas des trois corps et choisissons les variables, non transformées, originaires qui servaient de point de départ. On aura à poser:

au lieu de
$$M \quad \sim \quad M - \frac{2\pi l''_1}{T_1(1+\varepsilon_1)} t$$
$$\pi - \pi' \sim \pi - \pi' - \frac{2\pi l''_2}{T_1(1+\varepsilon_2)} t$$
$$M' \quad \sim \quad M - \frac{2\pi l''_3}{T_1(1+\varepsilon_3)} t$$
$$t = (1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)\tau = (1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2)\tau = (1+\varkappa_3)(1+\varepsilon_3)\tau.$$

Ensuite les mouvements moyens troublés seront donnés par les expressions
$$\frac{n_0}{(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)} + \varkappa_1 \frac{2\pi l''_1}{T_1(1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)} \text{ etc.}$$

et les conditions de périodicité donneront:
$$\varkappa_1 = \pm \frac{s_1}{l''_1}, \varkappa_2 = \pm \frac{s_2}{l''_2}, \varkappa_3 = \pm \frac{s_3}{l''_3} \text{ etc.}$$

Les solutions les plus intéressantes seront celles, où les tours d'un tel mouvement moyen, nouvellement engendré, seront très rapides (par exemple dans l'anomalie *M) de sorte qu'il s'agira de solutions à période très courte.*

J'ajoute qu'on pourra faire subir à la variable relative à l'inclinaison des orbites, la même opération, quoique cette variable se range d'ordinaire parmi les canoniques scalaires.

J'ai obtenu par cette méthode des orbites des formes très bizarres. Je veux me borner à énoncer un théorème concernant tous les problèmes de la dynamique générale, dont la démonstration, d'après les explications données ci-dessus, est immédiate:

Prenons les équations de la dynamique d'une forme quelconque. Admettons la démonstration d'une seule solution périodique (par ex. à période courte ou longue). Ensuite cette existence une fois admise garantit déjà l'existence d'un groupe entier (discontinu) des innombrables

classes et orbites séculaires et orbites à période courte. Cette famille des orbites qui accompagne nécessairement l'orbite »génératrice«, fixe les mouvements caractérisés par les nombres rationnels, indiqués plus haut. Les dites orbites seront reparties dans l'espace comme les nombres rationnels.

§ 3. Extension du domaine des solutions séculaires, générales, au cas d'une durée quelconque de période. Existence d'autres classes de solutions nouvelles.

Nous ne pouvons, ni ne voulons, du moins pour le moment, poursuivre les recherches commencées à la fin du paragraphe précédent, dans toute leur généralité. Donc nous allons nous borner à l'étude du problème de $(n+1)$ corps en admettant pour fixer les idées seulement la naissance des nouveaux mouvements moyens, relatifs aux différences des longueurs des périhélies. Il s'agira de généraliser les théorèmes par un passage à une période d'une longueur quelconque. Pour y atteindre, nous allons employer les principes de la fin du paragraphe précédent, en choisissant dans les équations (8):

$$\omega_l = \frac{n_l^0}{1+\varepsilon_l} \text{ et posant}$$

$$t = (1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)\tau = (1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2)\tau = \ldots = (1+\varkappa_{n-1})(1+\varepsilon_{n-1})\tau = (1+\varepsilon_n)\tau.$$

IV. La substitution introduisant le paramètre de périhélie, ainsi que la substitution composée la plus générale, font apparaître le temps explicite. On devra donc ajouter les conditions exprimant la périodicité des mouvements moyens des périhélies. (IV.)

Les mouvements séculaires rotatoires des différences des périhélies seront fixés respectivement par

$$f_1 = \frac{n_1^0\,\varkappa_1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)},\; f_2 = \frac{n_2^0\,\varkappa_2}{(1+\varepsilon_2)(1+\varkappa_2)},\; \ldots$$

$$f_{n-1} = \frac{n_{n-1}^0\,\varkappa_{n-1}}{(1+\varepsilon_{n-1})(1+\varkappa_{n-1})}.$$

La période totale sera donnée par

$$T_1(1+\varepsilon_n) = T_1(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) = T_1(1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2) = \ldots$$
$$\ldots = T_1(1+\varkappa_{n-1})(1+\varepsilon_{n-1}).$$

$$T_1 = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0} = \frac{2\pi p_2 r}{n_2^0} = \ldots = \frac{2\pi p_n r}{n_n^0}.$$ Nous allons poser

$$\nu_l = -\frac{\varkappa_l}{1+\varkappa_l} = -\frac{s_l}{s_l \pm p_l r}.$$

Nous avons posé dans le paragraphe précédent $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = 0$, de sorte qu'il était nécessairement $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \ldots \varkappa_{n-1} = \varkappa = \frac{s_1}{p_1 r} = \ldots\ldots$ $\ldots = \frac{s_{n-1}}{p_{n-1} r}$. Cette fois on pourra cependant profiter de l'existence de deux paramètres $\varkappa$ en prenant soin seulement à ce que

$$(1 + \varkappa_1)(1 + \varepsilon_1) = (1 + \varkappa_2)(1 + \varepsilon_2) = \ldots = (1 + \varkappa_{n-1})(1 + \varepsilon_{n-1}) = \\ = (1 + \varepsilon_n). \qquad \text{(IV')}$$

La condition de périodicité sera donnée par

$$f_1 T_1 (1 + \varkappa_1)(1 + \varepsilon_1) = n_1^0 \varkappa_1 T_1 = 2\pi s_1, \\ f_2 T_1 (1 + \varkappa_2)(1 + \varepsilon_2) = n_2^0 \varkappa_2 T_1 = 2\pi s_2, \qquad \text{(IV)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourrait dire plus simplement: l'angle total, décrit pendant la période du mouvement par la variable $\pi_k - \pi_n$ divisé par la vitesse de cette variable, donnera nécessairement la longueur de la période T.

$$T = \frac{2\pi s_1}{n_1^0 \varkappa_1}(1 + \varkappa_1) = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0}(1 + \varkappa_1) = \frac{2\pi s_2}{n_2^0 \varkappa_2}(1 + \varkappa_2) = \\ = \frac{2\pi p_2 r}{n_2^0}(1 + \varkappa_2) = \ldots \text{ donc } \varkappa_1 = \frac{s_1}{p_1 r}, \quad \varkappa_2 = \frac{s_2}{p_2 r}, \ldots$$

les nombres $\varkappa_i$ seront des fractions rationnelles, le nominateur indiquant les nombres de tours achevés par la différence de périhélies correspondante.

Mais cette fois les nombres s_i ne seront pas nécessairement proportionnels aux nombres p_k, on pourra choisir arbitrairement les nombres des tours de périhélies pourvu qu'on détermine les paramètres ε_i de sorte qu'ils satisfassent à la condition (IV'). Nous pouvons donc énoncer le théorème (IV) très général que voici:

(IV.) *Dans le voisinage de chaque type de commensurabilité des moyens mouvements il y aura une multiple infinité de solutions séculaires. Les orbites des planètes envisagées seront données approximativement par des ellipses en rotation. La période sera synodique. Le nombre des tours faits par les lignes des apsides sera quelconque. Les vitesses des rotations des apsides seront naturellement commensurables entre elles, cependant elles ne seront liées aux mouvements moyens diurnes (vitesses angulaires) des planètes par aucune relation* (analogue à celle fixée dans le cas particulier (I)) page 20.

La période synodique du mouvement périodique total, sera en général quelconque n'étant aucunement liée à la longueur de période des mouvements dégénérés (ellipses pour $\mu = 0$).

Pour une étude détaillée de ces classes intéressantes il sera nécessaire de discuter les équations que voici:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\psi_1}{T} &= \frac{n_1^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_1^0\,\varkappa_1}{1+\varepsilon_n} - \alpha_1\, n_1^0 - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_1} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_2}{T} &= \frac{\varkappa_1\, n_1^0}{1+\varepsilon_n} - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_2} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_3}{T} &= \frac{n_2^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_2^0\,\varkappa_2}{1+\varepsilon_n} - \alpha_3\, \overline{n_2^0} - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_3} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_4}{T} &= \frac{\varkappa_2\, n_2^0}{1+\varepsilon_n} - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_4} + \ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\psi_{2n-3}}{T} &= \frac{n_{n-1}^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_{n-1}^0\,\varkappa_{n-1}}{1+\varepsilon_n} - \alpha_{2n-3}\, \overline{n_{n-1}^0} - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-3}} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_{2n-2}}{T} &= \frac{\varkappa_{n-1}\, n_{n-1}^0}{1+\varepsilon_n} - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-2}} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_{2n-1}}{T} &= \frac{n_n^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \alpha_{2n-1}\, \overline{n_n^0} - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial\, x_{2n-1}} + \ldots = 0
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

$\frac{\varphi_1}{\mu\, T} = \frac{\varphi_2}{\mu\, T} = \frac{\varphi_3}{\mu\, T} = \ldots = \frac{\varphi_{2n-1}}{\mu\, T} = 0$ on supprime la dernière par suite de l'existence de l'intégrale des forces vives.

D'après, ce qui a été dit dans le mémoire précédent [1]) p. 24, 25, il suffira d'analyser seulement les équations exprimant les ψ_k. En effet, les équations correspondantes en φ_k seront absolument de la même forme que l. c. et il suffira de les remplacer par le système $\frac{\varphi_k}{\mu} = 0$, $(k = 1, 2 \ldots 2n - 2)$. Les variables canoniques fixées dans le système des conditions, donnés ci-dessus seront celles du système (9), c'est-à-dire, $\omega_l = \frac{n_l^0}{1+\varepsilon_l}$, (voir la rem. *) p. 10.)

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\, x_1 = L_1, \quad \mu\, x_2 = L_1 - G_1, \quad \mu\, x_3 = L_2, \quad \mu\, x_4 = L_2 - G_2, \ldots\\
&\mu\, x_{2n-3} = L_{n-1}, \quad \mu\, x_{2n-2} = L_{n-1} - G_{n-1}, \quad \mu\, x_{2n-1} = L_n, \quad \mu\, x_{2n} = G_n\\
&y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \frac{n_1^0\, t}{1+\varepsilon_1}, \qquad y_2 = -\pi_1 + \pi_n + \frac{n_1^0\, t}{1+\varepsilon_1},\\
&y_3 = M_2 + \pi_2 - \pi_n - \frac{n_2^0\, t}{1+\varepsilon_2}, \qquad y_4 = -\pi_2 + \pi_n + \frac{n_2^0\, t}{1+\varepsilon_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{2n-3} = M_{n-1} + \pi_{n-1} - \pi_n - \frac{n_{n-1}^0\, t}{1+\varepsilon_{n-1}}, \quad y_{2n-2} = -\pi_{n-1} + \pi_n + \frac{n_{n-1}^0\, t}{1+\varepsilon_{n-1}},\\
&y_{2n-1} = M_n, \qquad y_{2n} = \pi_n\\
&n_1^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_1^2}, \qquad n_2^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_3^2}, \quad \ldots \quad n_n^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial\, x_{2n-1}^2}
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

$$F_0 = F_0'' + \frac{n_1^0}{1+\varepsilon_1}(x_1 - x_2) + \frac{n_2^0}{1+\varepsilon_2}(x_3 - x_4) + \cdots + \frac{n_{n-1}^0}{1+\varepsilon_{n-1}}(x_{2n-3} - x_{2n-2}).$$

Ajoutons quelques remarques concernant la résolution des dernières conditions (22). Les équations $4n-3$ en nombre, continnent les inconnues $\alpha_1 \ldots \alpha_{2n-1}$, $\beta_1 \ldots \beta_{2n-1}$, $\varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-1}$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$. Il faut les combiner avec les conditions de périodicité (IV'), où $\nu_l = -\frac{\varkappa_l}{1+\varkappa_l}$, qui donnent $n-1$ relations.

Après avoir choisi les nombres rationnels $\varkappa$, c'est-à-dire en disposant les mouvements des périhélies conformément au nombre de tours achevés pendant une période provisoire $T_1 = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0}$, on fixera les conditions liant les excentricités des ellipses Képlériennes

$$\left.\begin{aligned} -\nu_1 &= \frac{\varkappa_1}{1+\varkappa_1} = \frac{\mu}{n_1^0}\frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} = +\frac{s_1}{s_1 \pm p_1 r}, \\ -\nu_2 &= \frac{\varkappa_2}{1+\varkappa_2} = \frac{\mu}{n_2^0}\frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} = +\frac{s_2}{s_2 \pm p_2 r}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\nu_{n-1} &= \frac{\varkappa_{n-1}}{1+\varkappa_{n-1}} = \frac{\mu}{n_{n-1}^0}\frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}} = +\frac{s_{n-1}}{s_{n-1} \pm p_{n-1} r}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Ensuite on remplacera les éqations (22) par

$\psi_1 = \frac{\psi_2}{\mu} = \psi_3 = \frac{\psi_4}{\mu} = \ldots = \frac{\psi_{2n-2}}{\mu} = \psi_{2n-1}$ (22') voir la pag. 18. 35., de ce mémoire.

Nous allons voir facilement que l'une seulement des inconnues cherchées restera arbitraire, les dernières étant liées par les conditions (22) et par les $n-1$ relations (IV').

Au moyen de ces simples relations (IV') $n-1$ en nombre on exprimera les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ par l'une d'entre elles par exemple ε_n

Il faut noter que le choix de $\varkappa$ (ν) qui était de l'ordre de la masse troublante — aura pour effet — que la grandeur de ε_l sera elle même du même ordre μ, de masse en jugeant d'après la forme très simple des conditions (IV').

On substituera le résultat pour les ε_l dans nos équations (22) et on choisira arbitrairement l'une des inconnues par ex. $\alpha_2 = 0$ (ce qui est essentiellement l'accroissement de l'excentrité e_1) de plus on posera comme de coutume $\beta_1 = 0$, pour avoir ensuite $4n-3$ relations à $4n-3$ inconnues ε_n, α_1, $\alpha_3, \ldots \alpha_{2n-1}$, β_2, $\beta_3 \ldots \beta_{2n-1}$.

Le déterminant de ce système est essentiellement différent de zéro. Donc les équations ont une solution simple, les solutions existent bien, leur période étant quelconque (ε_1), non pas liée rationnellement à la longueur de période des mouvements dégénérés c. q. f. d.

Voici l'analyse des termes critiques dont on pourra profiter aussi dans les autres cas étudiés dans le mémoire présent. En effet l'analyse donnée ci-dessus représente pour ainsi dire le cas le plus général à ce point de vue.

D'après ce que nous avons dit à la page 15. et 16., il s'agit d'analyser en détail seulement la partie F_1.

Donc on pourra se borner à étudier cette partie F_1 du développement F dans laquelle les coordonnées des planètes n'entrent que deux à deux.

Il suffira donc d'envisager une partie —. analogue à celle étudiée dans le mémoire précédent p. 12.

En poursuivant la même méthode que l. c. indiquons par

$$[F] = \frac{1}{T}\int_0^T F\,dt$$

en posant $T = \frac{T_1(1+\varepsilon_1)}{1+\nu_1} = T_1(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) = \frac{T_1(1+\varepsilon_2)}{1+\nu_2} =$

$$= T_1(1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2) = \ldots = T_1(1+\varepsilon_n),$$

$$\varkappa_n = 0,\quad \nu_1 = -\frac{\varkappa_1}{1+\varkappa_1},\quad \nu_2 = -\frac{\varkappa_2}{1+\varkappa_2},\ldots$$

Nous serons obligés de rechercher de telles valeurs moyennes dans la suite. Nous avons employé les paramètres de périhélies $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$. Nous avons ensuite ajouté à la fonction perturbatrice certains accroissements en remplaçant les variables originaires par, voir la rem. *) p. 10.

$$x_1 = \beta''_1\sqrt{a_1}\qquad,\ y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1}\ ,$$

$$x_2 = \beta''_1\sqrt{a_1}\,(1-\sqrt{1-e_1^2}),\quad y_2 = -\pi_1 + \pi_n + \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1}\ ,$$

$$x_3 = \beta''_2\sqrt{a_2},\quad y_3 = M_2 + \pi_2 - \pi_n - \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_2}\ ,$$

$$x_4 = \beta''_2\sqrt{a_2}\,(1-\sqrt{1-e_2^2}),\ y_4 = -\pi_2 + \pi_n + \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_2}.$$

. . . .

Nous avons introduit ensuite les paramètres de période par les changements

$$t = (1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)\tau = (1+\varepsilon_2)(1+\varkappa_2)\tau = \ldots = (1+\varepsilon_n)\tau.$$

Un terme schématique exige le développement

$$C\int_{t_0}^{t_0+T} dt\cos(mt+c) = C\int_{t_0}^{t_0+T_1(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)} dt\cos(mt+c) = C\int_{t_0}^{t_0+T_1(1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2)} dt\cos(mt+c)$$

suivant les puissances de $\varkappa_1$ et ε_1 resp. $\varkappa_2$ et ε_2 etc.

Or, nous trouvons immédiatement

$$C\int_{t_0}^{t_0+T} dt\cos(mt+c) =$$

$$= -\{\sin(T_1 m(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)+mt_0+c) - \sin(mt_0+c)\} =$$
$$= -\{\sin(T_1 m(1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2)+mt_0+c) - \sin(mt_0+c)\} = \ldots$$

parce que, comme nous allons le voir, on suppose toujours

$$T_1 m\,\frac{1+\varepsilon_l}{1+\nu_l} = T_1 m(1+\varepsilon_l)(1+\varkappa_l) = 2\pi \times \text{ un nombre entier,}$$

en négligeant bien entendu μ^2.

Écrivons la forme de la fonction perturbatrice d'après la page: 9. et [1]) p. 13.

Le développement classique donne

$$\Sigma A_{12}\cos\{M_1 i + M_2 i' + j(\pi_1 - \pi_2)\}$$

en substituant les variables employées, on trouvera

$$\Sigma A_{12}\cos(i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_3 + i_4 y_4)$$

ou bien en combinant la première et dernière des planètes plus simplement

$$\Sigma A_{1n}\, n\cos(i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_{2n-1})$$

Ici y_k désignent les variables originaires sans rotation page 5., et nous écrivons $l_1 = i$, $l_2 = i'$, $l_3 = j$, p. 9.

Et après avoir introduit les variables renfermant les paramètres de période et de périhélies, nous allons obtenir

$$\frac{F_1}{k^2} = A_{12}\cos\Big\{ i\Big(M_1 + \pi_1 - \pi_n - \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1}\Big) + i'\Big(M_2 + \pi_2 - \pi_n - \frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2}\Big) +$$
$$+ (i-j)\Big(-\pi_1 + \pi_n + \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1}\Big) + (i'+j)\Big(-\pi_2 + \pi_n + \frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2}\Big) +$$
$$+ j\frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} - j\frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2}\Big\} + \ldots$$

$$+ \Sigma A^{1n} \cos \left\{ i \left(M_1 + \pi_1 - \pi_n - \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} \right) + i' M_n + \right.$$

$$\left. + (i-j) \left(- \pi_1 + \pi_n + \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} \right) + j \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} \right\}$$

$$= \Sigma A^{12} \cos \left\{ i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_3 + i_4 y_4 + (i_1 - i_2) \left(\frac{n_1^0}{1+\varepsilon_1} - \frac{n_2^0}{1+\varepsilon_2} \right) t \right\} + \ldots$$

$$\ldots + \Sigma A^{1n} \cos \left\{ i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_{2n-1} + (i_1 - i_2) \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} \right\}$$

$$i_1 = i, i_2 = i - j, i_3 = i', i_4 = i' + j, \quad i_2 + i_4 = i_1 + i_3$$

i, j, i', i_1, i_2, i_3, i_4 signifient tous les entiers positifs et négatifs.[18])

Donc le temps va figurer explicitement. Notons expressément d'avance que ce fait ne causera aucun inconvéniant en ce qui concerne la recherche des solutions périodiques. En effet cette apparition du temps ne sera que fictive. L'artifice employé ne sert — de même que dans le mémoire précédent l. c. p. 13.[1]) — qu'à tourner la difficulté signalée par H. Poincaré, en faisant le Jacobien en question essentiellement différent de zéro.

Il faudra distinguer plusieurs catégories de termes:

a) Les termes non critiques.

Calculons d'après l'expression, écrite plus haut, la valeur moyenne de la fonction $\frac{F_1}{k^2}$ pour le cas général, où les coefficients ne sont liés par aucune relation linéaire. En cherchant cette valeur moyenne il vaudra mieux retourner à la forme primitive contenant i, i', j, qui montrait clairement que l'effet des accroissements provenant du temps explicite n'est qu'apparent. En effet nous avons ajouté et soustrait chaque fois les mêmes termes

$$- j \frac{n_1^0}{1+\varepsilon_1} t + j \frac{n_1^0}{1+\varepsilon_1} t + j \frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2} - j \frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2}$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial [F_1]}{\partial y_l} = - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + (1+\varepsilon_n) T_1} dt \, \Sigma i_l A^{12} \sin \left\{ (i n_1^0 + i' n_2^0) t + j (\pi - \pi') + \right.$$

$$\left. + i M_1^0 + i' M_2^0 \right\}$$

$$= \Sigma i_l A_{12} \frac{\cos \{ i n_1^0 (1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) T_1 + i' n_2^0 (1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2) T_1 + j(\pi - \pi') + (i n_1^0 + i' n_2^0) t_0 \} - \cos \{ j (\pi - \pi') + (i n_1^0 + i' n_2^0) t_0 \}}{T_1 (1+\varepsilon_n)(i n_1^0 + i' n_2^0)}$$

[18]) La dernière relation cesse d'être en vigueur pour la combinaison k, n, voir page 9.

On trouvera facilement qu'on aura, dans ce cas général, $(i n_1^0 + i' n_2^0) T_1 = 2\pi \times$ un nombre entier.

On néglige à cet effet la deuxième puissance de la masse troublante $\varepsilon_l \mu$, $\varkappa_l \mu$, $\nu_l \mu$, on aura donc en vertu de l'hypothèse initiale

$$n_1^0 : n_2^0 : \ldots : n_n^0 = p_1 : p_2 : \ldots : p_n$$

$$\frac{2\pi p_1}{n_1^0} = \frac{2\pi p_2}{n_2^0} = \ldots = \frac{2\pi p_n}{n_n^0} = T'_1, \quad T_1 = T'_1 r$$

$$(i n_1^0 + i' n_2^0) T_1 = 2\pi r (i p_1 + i' p_2).$$

b) Les termes critiques de la forme $D_s^{lk} \cos s\,\zeta_{l,\,k}$, s entier

$$D_s^{12} = A^{12}_{-p_2 s,\ (p_1 - p_2) s,\ p_1 s,\ o} = A^{12}_{i_1, i_2, i_3, i_4}, \quad i_2 + i_4 = i_1 + i_3$$

$$i_1 = -p_2 s, \ i_2 = (p_1 - p_2) s, \ i_3 = p_1 s, \ i_4 = 0$$

$$i_1 p_1 + i_3 p_3 = 0, \ n_1 p_2 = n_2 p_1, \ n_1 p_3 = n_3 p_1, \ n_2 p_3 = n_3 p_2, \ n_1 p_n = n_n p_1.$$

$$\zeta_{12} = p_1 M_2 - p_2 M_1 - p_1 (\pi_1 - \pi_2) = -p_2 y_1 + (p_1 - p_2) y_2 + p_1 y_3 -$$
$$-(p_1 - p_2) \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} - p_2 \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} + p_1 \frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2},$$

$$\zeta_{12}^0 = p_1 M_2^0 - p_2 M_1^0 - p_1 (\pi_1 - \pi_2) = -p_2 y_1^0 + (p_1 - p_2) y_2^0 + p_1 y_3^0 -$$
$$-(p_1 - p_2) \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1} - p_2 \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1} + p_1 \frac{n_2^0 t_0}{1+\varepsilon_2},$$

$$y_1^0 = +\pi_1 - \pi_n + n_1^0 t_0 - \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1}$$

$$y_2^0 = -\pi_1 + \pi_n + \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1}$$

$$y_3^0 = \pi_2 - \pi_n + n_2^0 t_0 - \frac{n_2^0 t_0}{1+\varepsilon_2}$$

$$y_4^0 = -\pi_2 + \pi_n + \frac{n_2^0 t_0}{1+\varepsilon_2}.$$

Calculons la valeur moyenne de l'ensemble de ces termes, en posant resp.

$$\varrho = \begin{cases} -p_2 \\ p_1 - p_2 \\ p_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T_1(1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)} dt \,\Sigma\, s\, \varrho\, D_s^{12} \sin s\,\zeta = -\frac{1+\nu_1}{T_1(1+\varepsilon_1)} \int_{t_0}^{t_0 + T_1(1+\varepsilon_2)(1+\varkappa_2)} dt \,\Sigma\, s\, \varrho\, D_s^{12} \sin s \{ (p_1 n_2^0 -$$
$$- p_2 n_1^0) t - p_2 M_1^0 + p_1 M_2^0 - p_1 (\pi_1 - \pi_2) \} =$$

$$= -\frac{(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)T_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T_1} d\tau\, \Sigma\, s\, \varrho\, D_s^{12} \sin s\,\{[p_1\, n_2^0 (1+\varepsilon_2)(1+\varkappa_2) -$$

$$- p_2\, n_1^0 (1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)]\,\tau - p_2 M_1^0 + p_1 M_2^0 - p_1 (\pi_1 - \pi_2)\}$$

où nous avons employé les substitutions

$$t = \tau (1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1) = \tau (1+\varepsilon_2)(1+\varkappa_2) = \ldots,$$

$$dt = d\tau (1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1) = d\tau (1+\varepsilon_2)(1+\varkappa_2) = \ldots$$

$$T = \frac{T_1}{1+\nu_1}(1+\varepsilon_1) = \frac{T_1}{1+\nu_2}(1+\varepsilon_2) = \ldots = T_1 (1+\varepsilon_n)$$

en utilisant l'équation $p_1 n_2^0 - p_2 n_1^0 = 0$, on trouvera pour la somme de cette catégorie des termes critiques

$$\Sigma\, s\, \varrho\, D_s^{12} \sin s\,[p_2 M_1^0 - p_1 M_2^0 + p_1 (\pi_1 - \pi_2)].$$

Nous allons traiter de même les autres sommes, se rapportant à toutes les paires de planètes; nous trouvons en particulier en posant:

$$\varrho = \begin{cases} -p_n \\ p_1 - p_n, \\ p_1 \end{cases} D_s^{1,n} = A^{1,n}_{-p_n s,\,(p_1-p_n) s,\, p_1 s,\, 0} = A^{1,n}_{i_1, i_2, i_3, i_4}, \quad \begin{aligned} i_1 &= -p_n s \\ i_2 &= (p_1 - p_n) s \\ i_3 &= p_1 s \\ i_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\zeta_{1n} = p_1 M_n - p_n M_1 - p_1 (\pi_1 - \pi_n) = -p_n y_1 + p_1 y_{2n-1} - (p_n - p_1) y_2 - \\ - p_1 \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1}$$

$$\zeta_{1n}^0 = p_1 M_n^0 - p_n M_1^0 - p_1 (\pi_1 - \pi_n) = -p_n y_1^0 + p_1 y_{2n-1}^0 - (p_n - p_1) y_2 - \\ - p_1 \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1}$$

l'expression que voici

$$\Sigma\, s\, \varrho\, D_s^{1,n} \sin s\,[p_n M_1^0 - p_1 M_n^0 + p_1 (\pi_1 - \pi_n)].$$

c) Les termes critiques de la forme $D'^{l,k}_s \cos s\, \zeta'_{l,k}$

$$D'^{12}_s = A^{12}_{-p_2 s,\, 0,\, p_1 s,\, (p_1 - p_2) s} = A^{1,2}_{i_1, i_2, i_3, i_4}$$

$$i_1 = -p_2 s,\; i_2 = 0,\; i_3 = p_1 s,\; i_4 = (p_1 - p_2) s,\; i_1 p_1 + i_3 p_2 = 0$$

$$\zeta'_{12} = p_1 M_2 - p_2 M_1 - p_2 (\pi_1 - \pi_2)$$

$$= -p_2 y_1 + p_1 y_3 - (p_2 - p_1) y_4 + (p_2 - p_1)\frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2} - p_2 \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1} + p_1 \frac{n_2^0 t}{1+\varepsilon_2},$$

$$\zeta'^0_{12} = p_1 M_2^0 - p_2 M_1^0 - p_2 (\pi_1 - \pi_2)$$

$$= -p_2 y_1^0 + p_1 y_3^0 - (p_2 - p_1) y_4^0 + (p_2 - p_1)\frac{n_2^0 t_0}{1+\varepsilon_2} - p_2 \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1} + p_1 \frac{n_2^0 t_0}{1+\varepsilon_2},$$

En posant

$$\varrho' = \begin{cases} -p_2 \\ p_1 \\ p_1 - p_2 \end{cases}$$

on trouvera

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_1(1+\varepsilon_n)} dt\, \Sigma(-\varrho' s)\, D'^{12}_s \sin s\,\zeta' = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_1(1+\varepsilon_n)} dt\, \Sigma(-\varrho' s)\, D'^{12}_s \sin s\,\{(p_1 n_2^0 - p_2 n_1^0)t$$

$$- p_2 M_1^0 + p_1 M_2^0 - p_2(\pi_1 - \pi_2)\}$$

$$= \frac{(1+\nu_1)(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_1)(1+\nu_1)\,T_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T_1} d\tau\, \Sigma(-\varrho' s)\, D'^{12}_s \sin s\,\{[p_1 n_2^0(1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2) -$$

$$- p_2 n_1^0 (1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1)]\,\tau - p_2 M_1^0 + p_1 M_2^0 - p_2(\pi_1 - \pi_2)\}$$

donc en vertu des relations $p_1 n_2^0 - p_2 n_1^0 = 0$, $(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) = (1+\varkappa_2)(1+\varepsilon_2) = 1+\varepsilon_n$, on aura pour la somme recherchée

$$\Sigma(-\varrho' s)\, D'^{12}_s \sin s\,[p_1 M_2^0 - p_2 M_1^0 - p_2(\pi_1 - \pi_2)].$$

En posant de même

$$\varrho' = \begin{cases} -p_n \\ p_1 \\ p_1 - p_n \end{cases} \qquad D'^{1,n}_s = A_{-p_n s,\, p_1 s,\, (p_n - p_1)s,\, 0} = A_{i_1, i_2, i_3, i_4}$$

$$i_1 = -p_n s,\ i_3 = p_1 s,\ i_2 = (p_1 - p_n)s,\ i_4 = 0$$

on obtiendra avec

$$\zeta'_{1,n} = p_1 M_n - p_n M_1 - p_n(\pi_1 - \pi_n)$$

$$= -p_n y_1 + p_1 y_{2n-1} - p_n \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1},$$

$$\zeta'^0_{1,n} = p_1 M_n^0 - p_n M_1^0 - p_n(\pi_1 - \pi_n)$$

$$= -p_n y_1^0 + p_1 y_{2n-1} - p_n \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1},$$

$$y_{2n-1}^0 = M_n^0$$

le résultat que voici:

$$\Sigma(-s\varrho')\, D'^{1,n}_s \sin s\,[p_1 M_n^0 - p_n M_1^0 - p_n(\pi_1 - \pi_n)].$$

d) Les termes critiques de la forme $D''^{l,k}_{m_1 m_2} \cos(m_1 \zeta_{nk} + m_2 \zeta_{nk})$, m_1, m_2 entiers positifs ou négatifs.

$$D''^{12}_{m_1 m_2} = A^{12}_{-p_2(m_1+m_2),\, -m_1(p_2-p_1),\, p_1(m_1+m_2),\, -m_2(p_2-p_1)} = A^{12}_{i_1, i_2, i_3, i_4}$$

$$i_1 = -p_2(m_1+m_2),\ i_2 = -m_1(p_2 - p_1),\ i_3 = p_1(m_1+m_2),$$

$$i_4 = - m_2 (p_2 - p_1), \quad i_1 p_1 + i_3 p_2 = 0.$$

$$m_1 \zeta_{12} + m_2 \zeta'_{12} = p_1 (m_1 + m_2) M_2 - p_2 (m_1 + m_2) M_1 - (m_1 p_1 + \\ + m_2 p_2)(\pi_1 - \pi_2)$$

$$= - p_2 (m_1 + m_2) y_1 + m_1 (p_1 - p_2) y_2 + p_1 (m_1 + m_2) y_3 - \\ - m_2 (p_2 - p_1) y_4 + m_1 (p_2 - p_1) \frac{n_1^0 t}{1 + \varepsilon_1} + m_2 (p_2 - p_1) \frac{n_2^0 t}{1 + \varepsilon_2} - \\ + p_1 (m_1 + m_2) \frac{n_2^0 t}{1 + \varepsilon_2} - p_2 (m_1 + m_2) \frac{n_1^0 t}{1 + \varepsilon_1}.$$

$$m_1 \zeta_{12}^0 + m_2 \zeta'^0_{12} = p_1 (m_1 + m_2) M_2^0 - p_2 (m_1 + m_2) M_1^0 - (m_1 p_1 + \\ + m_2 p_2)(\pi_1 - \pi_2) =$$

$$= - p_2 (m_1 + m_2) y_1^0 + m_1 (p_1 - p_2) y_2^0 + p_1 (m_1 + m_2) y_3^0 - \\ - m_2 (p_2 - p_1) y_4^0 + m_1 (p_2 - p_1) \frac{n_1^0 t_0}{1 + \varepsilon_1} + m_2 (p_2 - p_1) \frac{n_2^0 t_0}{1 + \varepsilon_2} - \\ - p_1 (m_1 + m_2) \frac{n_2^0 t_0}{1 + \varepsilon_2} - p_2 (m_1 + m_2) \frac{n_1^0 t_0}{1 + \varepsilon_1}.$$

En posant $\varrho'' = \begin{cases} - p_2 (m_1 + m_2) \\ - m_1 (p_2 - p_1) \\ p_1 (m_1 + m_2) \\ - m_2 (p_2 - p_1) \end{cases}$, on obtiendra pour la somme des termes critiques, se rapportant à la première paire de planètes:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T_1 (1 + \varepsilon_n)} dt \, \Sigma (- \varrho'') \, D''^{12}_{m_1 m_2} \sin (m_1 \zeta_{12} + m_2 \zeta'_{12}) =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T_1 (1 + \varepsilon n)} dt \, \Sigma (- \varrho'') \, D''^{12}_{m_1 m_2} \sin \{ (p_1 n_2^0 - p_2 n_1^0)(m_1 + m_2) t - (m_1 + \\ + m_2)(p_2 M_1^0 - p_1 M_2^0) - (p_1 m_1 + p_2 m_2)(\pi_1 - \pi_2) \}$$

$$= \frac{(1 + \varkappa_1)(1 + \varepsilon_1)}{T_1 (1 + \varepsilon_n)} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + T_1} d\tau \, \Sigma (- \varrho'') \, D''^{12}_{m_1 m_2} \sin \{ [p_1 n_2^0 (1 + \varkappa_2)(1 + \varepsilon_2) - \\ - p_2 n_1^0 (1 + \varkappa_1)(1 + \varepsilon_1)] (m_1 + m_2) \tau - (m_1 + m_2)(p_2 M_1^0 - p_1 M_2^0) - \\ - (p_1 m_1 + p_2 m_2)(\pi_1 - \pi_2) \}.$$

On trouvera de même les autres sommes des termes critiques de cette catégorie. Nous allons écrire en particulier la somme dernière que voici:

$$D''^{1n}_{m_1 m_2} = A^{1n}_{-p_n(m_1+m_n), -m_1(p_n-p_1), p_1(m_1+m_n), 0} = A^{1n}_{i_1, i_2, i_3, i_4}$$

$$i_1 = -p_n(m_1+m_n),\ i_2 = -m_1(p_n-p_1),\ i_3 = p_1(m_1+m_n),$$

$$i_4 = 0, \quad i_1 p_1 + i_3 p_n = 0$$

$$m_1 \zeta_{1n} + m_n \zeta'_{1n} = p_1(m_1+m_n) M_n - p_n(m_1+m_n) M_1 -$$

$$-(m_1 p_1 + m_n p_n (\pi_1 - \pi_n) =$$

$$= -p_n(m_1+m_n) y_1 + m_1(p_1-p_n) y_2 + p_1(m_1+m_n) y_{2n-} -$$

$$-(m_1 p_1 + m_n p_n) \frac{n_1^0 t}{1+\varepsilon_1}$$

$$m_1 \zeta_{1n}^0 + m_n \zeta'^0_{1n} = p_1(m_1+m_n) M_n^0 - p_n(m_1+m_n) M_1^0 - (m_1 p_1 +$$

$$+ m_n p_n)(\pi_1 - \pi_n) =$$

$$= -p_n(m_1+m_n) y_1^0 + m_1(p_1-p_n) y_2^0 + p_1(m_1+m_n) y_{2n-1}^0 -$$

$$-(m_1 p_1 + m_2 p_2) \frac{n_1^0 t_0}{1+\varepsilon_1}.$$

En posant

$$\varrho'' = \begin{cases} -p_n(m_1+m_n) \\ m_1(p_1-p_n) \\ p_1(m_1+m_n) \\ 0 \end{cases}$$

on trouvera facilement par la même méthode

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_1(1+\varepsilon_n)} dt\, \Sigma(-\varrho'') D''^{1n}_{m_1 m_n} \sin\{(p_1 n_n^0 - p_n n_1^0)(m_1+m_n) t - (m_1 +$$

$$+ m_n)(p_n M_1^0 - p_1 M_2^0) - (p_1 m_1 + p_n m_n)(\pi_1 - \pi_n)\} =$$

$$= \Sigma \varrho'' D''^{1n}_{m_1 m_n} \sin\{(m_1+m_n) p_n M_1^0 - p_1 M_n^0 + (p_1 m_1 + p_n m_n)(\pi_1 - \pi_n)\}.$$

Il serait à peu près superflu de donner une analyse semblable concernant le prolongement analytique du cas (II) § 2. Nous nous contentons de résumer les formules pour pouvoir énoncer le théorème suivant (cas [V]).

(V.) *Dans le voisinage de chaque type de commensurabilité des mouvements moyens il y aura une multiple infinité de solutions séculaires. Le mouvement de n planètes dont il s'agit ne sera que synodique. Les orbites des planètes seront données approximativement par des ellipses en rotation. Parmi les n planètes choisissons en une d'ailleurs quelconque* (π_n). *Les vitesses de rotation des apsides de toutes les autres planètes seront absolument les mêmes, cependant la valeur de cette vitesse commune dépassera la dernière fixée plus haut de beaucoup, de sorte que pendant une période les périhélies rattraperont la direction du périhélie dernier, fixé plus haut — après avoir décrit plusieurs tours (de 360°). La période*

synodique du mouvement sera en général quelconque n'étant liée aucunement à la longueur de période des mouvements dégénérés (ellipses pour $\mu = 0$) qui nous servaient de point de départ, comme il en était dans le cas (II) page 22. Cette fois le mouvement des différences des longueurs des périhélies sera fixé par

$$f_1 = f_2 = \dots f_{n-1} = \frac{n_n^0 \varkappa}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} = \dots = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}}.$$

On pose $t = (1+\varkappa)(1+\varepsilon)\tau = (1+\varepsilon_n)\tau$.

La période totale sera donnée par $T = T_1(1+\varepsilon_n) = T_1(1+\varkappa)(1+\varepsilon)$

$$T_1 = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0} = \frac{2\pi p_2 r}{n_2^0} = \dots = \frac{2\pi p_n r}{n_n^0}, \quad \nu = -\frac{\varkappa}{1+\varkappa}$$

$$f T_1 (1+\varkappa)(1+\varepsilon) = n_n^0 \varkappa T_1 = 2\pi s, \quad \varkappa = \pm \frac{s}{p_l r} \frac{n_l^0}{n_n^0} = \pm \frac{s}{p_n r}.$$

Il sera nécessaire de discuter les équations que voici

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\psi_1}{T} &= \frac{n_1^0 \varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_n^0 \varkappa}{1+\varepsilon_n} - \alpha_1 n_1^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \dots = 0 \\
\frac{\psi_2}{T} &= \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varepsilon_n} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \dots = 0 \\
\frac{\psi_3}{T} &= \frac{n_2^0 \varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_n^0 \varkappa}{1+\varepsilon_n} - \alpha_3 n_2^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_3} + \dots = 0 \\
\frac{\psi_4}{T} &= \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varepsilon_n} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} + \dots = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\psi_{2n-3}}{T} &= \frac{n_{n-1} \varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \frac{n_n^0 \varkappa}{1+\varepsilon_{n-1}} - \alpha_{2n-3} n_{n-1}^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-3}} + \dots = 0 \\
\frac{\psi_{2n-2}}{T} &= \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varepsilon_n} - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}} + \dots = 0 \\
\frac{\psi_{2n-1}}{T} &= \frac{n_n^0 \varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \alpha_{2n-1} n_n^0 - \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-1}} + \dots = 0 \\
\frac{\varphi_1}{T\mu} &= \frac{\varphi_2}{T\mu} = \dots = \frac{\varphi_{2n-2}}{T\mu} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Les variables canoniques fixées dans le système des conditions données ci-dessus seront celles du système (10) c'est-à-dire: $\omega_l = n_n^0$,

$$F_0 = F'_0 + n_n^0 (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n-3} - x_{2n-2}),$$

$$\mu x_1 = L_1, \quad \mu x_2 = L_1 - G_1, \quad \mu x_3 = L_2, \quad \mu x_4 = L_2 - G_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu x_{2n-3} = L_{n-1}, \quad \mu x_{2n-2} = L_{n-1} - G_{n-1}, \quad \mu x_{2n-1} = L_n, \quad \mu x_{2n} = G_n$$

$$y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \frac{n_n^0 t}{1+\varepsilon}, \quad y_2 = -\pi_1 + \pi_n + \frac{n_n^0 t}{1+\varepsilon},$$

$$y_3 = M_2 + \pi_2 - \pi_n - \frac{n_n^0 t}{1+\varepsilon}, \quad y_4 = -\pi_2 + \pi_n + \frac{n_n^0 t}{1+\varepsilon}, \tag{26}$$

. . . .

$$y_{2n-3} = M_{n-1} + \pi_{n-1} - \pi_n - \frac{n_n^0 t}{1+\varepsilon}, \quad y_{2n-2} = -\pi_{n-1} + \pi_n + \frac{n_n^0 t}{1+\varepsilon},$$

$$y_{2n-1} = M_n, \qquad y_{2n} = \pi_n$$

$n_1^0 = \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2}$ etc. etc. (voir la rem. *) p. 10.)

Après avoir choisi le nombre rationnel c'est-à-dire en disposant avec les mouvements de périhélies conformément au nombre de tours achevés pendant une période provisoire $T_1 = \dfrac{2\pi p_l}{n_l^0} r$, on fixera les conditions liant les excentricités des ellipses Képlériennes

$$+\frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} = \ldots = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}} = + \frac{s}{s \pm p_n r} \tag{27}$$

Ensuite on remplacera les conditions $\psi_l = 0$ par

$$\psi_1 = \frac{\psi_2}{\mu} = \psi_3 = \frac{\psi_4}{\mu} = \ldots = \frac{\psi_{2n-2}}{\mu} = 0$$

et l'on y ajoutera les conditions

$$\frac{\varphi_1}{\mu} = \frac{\varphi_2}{\mu} = \frac{\varphi_3}{\mu} = \ldots = \frac{\varphi_{2n-2}}{\mu} = 0$$

et l'on choisira par ex. $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ et la quantité ε, d'après la relation $1 + \varepsilon_n = (1+\varkappa)(1+\varepsilon)$ pour avoir $4n - 3$ relations à $4n - 3$ inconnues $\varepsilon_n\, \alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-1}, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{2n-1}$ dont le déterminant est manifestemment distinct de zéro.

VI. Si l'on essaye de prolonger la période des solutions du cas (III) (solutions de Poincaré de la seconde sorte à période courte) on trouvera le théorème (VI) suivant [cas (VI)]:

(VI.) *Outre les solutions bien connues de la seconde sorte à periode courte jouissant d'une période égale exactement à celle du mouvement dégénéré (plusieurs ellipses aux vitesses angulaires, mouvements moyens diurnes commensurables pour* $\mu = 0$), *il y aura toujours d'autres solutions du même caractère analytique que les dernières, dont la période diffère cependant de la période originaire par un prolongement* ε_n, *donné (approximativement) par la première équation* $\psi_1 = 0$. *Le mouvement*

séculaire rotatoire des lignes des apsides restera toujours commun. La solution nouvelle sera (ainsi que celle de la seconde sorte) seulement synodique, non pas sidérale.

J'avais donné ailleurs une analyse approfondie de ces mouvements pour le cas particulier de trois corps.[16])

Voilà pourquoi je puis me borner à résumer les formules nécessaires comme il suit: on pose $t = (1+\varepsilon)\,\tau$, $T = T_1\,(1+\varepsilon)$.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\psi_1}{T} &= \frac{n_1^0\,\varepsilon}{1+\varepsilon} - \alpha_1 n_1^0 - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_1} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_2}{T\mu} &= -\alpha_1\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_1\,\partial x_2} - \alpha_2\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_2^2} - \alpha_3\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_2\,\partial x_3} - \\
&\quad - \alpha_4\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_2\,\partial x_4}\ldots - \mu\frac{\partial\,[F_2]}{\partial x_2} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_3}{T} &= \frac{n_2^0\,\varepsilon}{1+\varepsilon} - \alpha_3 n_2^0 - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_3} + \ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\psi_{2n-3}}{T} &= \frac{n_{n-1}^0\,\varepsilon}{1+\varepsilon} - \alpha_{2n-3}\,\bar{n}_{n-1}^0 - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_{2n-3}} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_{2n-2}}{T\mu} &= -\alpha_1\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_1\,\partial x_{2n-2}} - \alpha_2\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_2\,\partial x_{2n-2}}\ldots - \\
&\quad - \alpha_{2n-1}\frac{\partial^2[F_1]}{\partial x_{2n-1}\,\partial x_{2n-2}} - \mu\frac{\partial\,[F_2]}{\partial x_{2n-2}} + \ldots = 0\\
\frac{\psi_{2n-1}}{T} &= \frac{n_n^0\,\varepsilon}{1+\varepsilon} - \alpha_{2n-1}\,\bar{n}_n^0 - \mu\frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_{2n-1}} + \ldots = 0\\
\frac{\varphi_1}{T\mu} &= \frac{\varphi_2}{T\mu} = \ldots = \frac{\varphi_{2n-2}}{T\mu} = 0
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Notons expressément que les variables employées dans ce système sont les canoniques (2) mentionnées dans le paragr. 1. Les excentricités des ellipses Képlériennes qui nous servaient de point de départ seront liées par les relations bien connues

$$\frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_2} = \frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_4} = \ldots = \frac{\partial\,[F_1]}{\partial x_{2n-2}} = \frac{\partial\,[F_1]}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial\,[F_1]}{\partial y_{2n-2}} = 0, \qquad (29)$$

La période du mouvement sera représentée par l'expression $T = T_1\,(1+\varepsilon) = \frac{2\pi p_l}{n_l^0}\,(1+\varepsilon)$. On pourra poser par exemple $\alpha_2 = 0$, $(\beta_1 = 0)$ pour obtenir ainsi $2n-1$, $(4n-3)$ équations avec le même nombre d'inconnues $\varepsilon, \alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-1}$, $(\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{2n-1})$.

VII. Nous allons fixer enfin un cas remarquable (VII) manifestement le plus général de ceux étudiés, jusqu'à présent.

Ce sera sans contredit le cas pour ainsi dire mixte qui tient milieu entre les cas des rotations (IV), des rotations communes (V) et des librations (VI).

(VII.) *En effet, on peut parmi les n planètes envisager quelques-unes dont les périhélies font divers nombres des révolutions complètes (IV) pendant une période séculaire. D'autres groupes de périhélies tournent avec une vitesse commune (V) pour achever un certain nombre de tours d'ailleurs différent de ceux du groupe précédent. Et enfin il existe un autre groupe de planètes dont les périhélies restent fixés (VI), exécutant seulement des oscillations autour de certaines directions. Les périodes ne seront aucunement liées aux périodes des mouvements dégénérés.* On pourrait appeler ce cas de Laplace-généralisé.

Pour pouvoir résumer les formules finales, valables pour ce cas général, supposons que la première planète appartienne au groupe (IV), la deuxième au groupe (V), la troisième au groupe (VI), la $(n-1)$ème planète au groupe (V).

Le mouvement moyen des différences des périhélies sera fixé respectivement par

$$f_1 = \frac{n_1^0 \varkappa_1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)},\ f_2 = f_{n-1} = \frac{n_n^0 \varkappa}{(1+\varkappa)(1+\varepsilon)},\ f_3 = 0.$$

La période totale sera donnée par

$$T = \frac{T_1}{1+\nu_1}(1+\varepsilon_1) = T_1 (1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1) = T_1 (1+\varepsilon)(1+\varkappa) = \ldots$$

$$\ldots = T_1 (1+\varepsilon_3) = T_1 (1+\varepsilon_n)$$

$$T_1 = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0} = \frac{2\pi p_2 r}{n_2^0} = \frac{2\pi p_3 r}{n_3^0} = \ldots = \frac{2\pi p_n}{n_n^0} r,\quad \nu_l = -\frac{\varkappa_l}{1+\varkappa_l}$$

$$f_1 T_1 (1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) = n_1^0 \varkappa_1 T_1 = 2\pi s_1$$

$$f_2 T_1 (1+\varkappa)(1+\varepsilon) = n_n^0 \varkappa T_1 = f_{n-1} T_1 (1+\varkappa)(1+\varepsilon) = 2\pi s$$

$$f_3 T_1 (1+\varepsilon_3) = 0$$

$$T = \frac{2\pi s_1}{n_1^0 \varkappa_1}(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0}(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) =$$

$$= \frac{2\pi s}{n_n^0 \varkappa}(1+\varkappa)(1+\varepsilon) = \frac{2\pi p_2 r}{n_2^0}(1+\varkappa)(1+\varepsilon) =$$

$$= \frac{2\pi p_{n-1} r}{n_{n-1}^0}(1+\varkappa)(1+\varepsilon) = \frac{2\pi p_3 r}{n_3^0}(1+\varepsilon_3)$$

$$\varkappa_1 = \frac{s_1}{p_1 r},\ \varkappa = \frac{s}{p_2 r}\frac{n_2^0}{n_n^0} = \frac{s}{p_{n-1} r}\frac{n_{n-1}^0}{n_n^0},\ \varkappa_3 = 0,\ \text{etc.}$$

On aura en même temps

$$(1+\varkappa_1)(1+\varepsilon_1) = (1+\varkappa)(1+\varepsilon) = \ldots = 1+\varepsilon_3 = \ldots$$

Les conditions des solutions séculaires s'écrivent alors

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{IV}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\psi_1}{T} = \dfrac{n_1^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \dfrac{n_1^0\,\varkappa_1}{1+\varepsilon_n} - \alpha_1 n_1^0 - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_1} + \ldots = 0 \\
\dfrac{\psi_2}{T} = \dfrac{\varkappa_1\, n_1^0}{1+\varepsilon_n} - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_2} + \ldots = 0
\end{array}\right. \\
\text{V}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\psi_3}{T} = \dfrac{n_2^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \dfrac{n_n^0\,\varkappa}{1+\varepsilon_n} - \alpha_3 n_2^0 - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_3} + \ldots = 0 \\
\dfrac{\psi_4}{T} = \dfrac{\varkappa\, n_n^0}{1+\varepsilon_n} - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_4} + \ldots = 0
\end{array}\right. \\
\text{VI}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\psi_5}{T} = \dfrac{n_3^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \alpha_5 n_3^0 - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_5} + \ldots = 0 \\
\dfrac{\psi_6}{T} = - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_6} + \ldots = 0
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{V}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\psi_{2n-3}}{T} = \dfrac{n_{n-1}^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \dfrac{n_n^0\,\varkappa}{1+\varepsilon_n} - \alpha_{2n-3} n_{n-1}^0 - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-3}} + \ldots = \\
\dfrac{\psi_{2n-2}}{T} = \dfrac{\varkappa\, n_n^0}{1+\varepsilon_n} - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}} + \ldots = 0
\end{array}\right. \\
\dfrac{\psi_{2n-1}}{T} = \dfrac{n_n^0\,\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} - \alpha_{2n-1} n_n^0 - \mu\dfrac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-1}} + \ldots = 0 \\
\dfrac{\varphi_1}{T\mu} = \dfrac{\varphi_2}{T\mu} = \ldots = \dfrac{\varphi_{2n-2}}{T\mu} = 0.
\end{array}\right\}(30)$$

Il suffira d'analyser seulement les équations exprimant les ψ_k Les variables canoniques fixées dans ces conditions seront de la forme suivante:

$$\left.\begin{array}{l}
\mu x_1 = L_1,\ \mu x_2 = L_1 - G_1,\ \mu x_3 = L_2,\ \mu x_4 = L_2 - G_2, \\
\mu x_5 = L_3,\ \mu x_6 = L_3 - G_3, \\
\mu x_{2n-3} = L_{n-1},\ \mu x_{2n-2} = L_{n-1} - G_{n-1},\ \mu x_{2n-1} = L_n,\ \mu x_{2n} = G_n. \\
y_1 = M_1 + \pi_1 - \pi_n - \dfrac{n_1^0\, t}{1+\varepsilon_1},\quad y_2 = -\pi_1 + \pi_n + \dfrac{n_1^0\, t}{1+\varepsilon_1}, \\
y_3 = M_2 + \pi_2 - \pi_n - \dfrac{n_n^0\, t}{1+\varepsilon},\quad y_4 = -\pi_2 + \pi_n + \dfrac{n_n^0\, t}{1+\varepsilon}, \\
y_5 = M_3 + \pi_3 - \pi_n \quad ,\quad y_6 = -\pi_3 + \pi_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{2n-3} = M_{n-1} + \pi_{n-1} - \pi_n - \dfrac{n_n^0\, t}{1+\varepsilon},\ y_{2n-2} = -\pi_{n-1} + \pi_n + \dfrac{n_n^0\, t}{1+\varepsilon} \\
y_{2n-1} = M_n, \qquad y_{2n} = \pi_n.
\end{array}\right\}(31)$$

$$t = (1+\varepsilon_1)(1+\varkappa_1)\tau = (1+\varepsilon)(1+\varkappa)\tau = (1+\varepsilon_3)\tau = \dots$$
$$\dots = (1+\varkappa)(1+\varepsilon)\tau = (1+\varepsilon_n)\tau.$$

On ajoute par là à la fonction Hamiltonienne originaire les termes que voici

$$+\omega_1(x_1 - x_2) + \omega_2(x_3 - x_4) + \omega_3(x_5 - x_6) + \dots + \omega_{n-1}(x_{2n-3} - x_{2n-2}),$$
$$\omega_1 = \frac{n_1^0}{1+\varepsilon_1}, \quad \omega_2 = \omega_{n-1} = \frac{n_n^0}{1+\varepsilon}, \quad \omega_3 = 0, \text{ etc.}$$
$$n_1^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2}, \quad n_2^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_3^2}, \dots \quad n_n^0 = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_{2n-1}^2}.$$

Nous nous dispensons de donner une analyse détaillée des diverses catégories des termes — celle-ci coïncidant à peu près complètement avec l'étude exécutée déjà auparavant pag. 40.—44.

Après avoir choisi les nombres rationnels $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ etc. conformément aux nombres des révolutions et librations ($\varkappa = 0$) des périhélies pendant une période provisoire $T_1 = \frac{2\pi p_1 r}{n_1^0}$, on fixera les conditions liant les excentricités des ellipses Képlériennes qui servaient de point de départ comme il suit

$$\frac{\varkappa_1 n_1^0}{1+\varkappa_1} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2}, \quad + \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}}, \quad \frac{\partial [F_1]}{\partial x_6} = 0 \text{ etc.} \qquad (32)$$

Ensuite on remplacera les conditions écrites plus haut par les équations

$$\psi_1 = \frac{\psi_2}{\mu} = \psi_3 = \frac{\psi_4}{\mu} = \psi_5 = \frac{\psi_6}{\mu} = \dots = \psi_{2n-3} = \frac{\psi_{2n-2}}{\mu} = \psi_{2n-1} = 0$$
$$\frac{\varphi_1}{\mu} = \frac{\varphi_2}{\mu} = \frac{\varphi_{2n-2}}{\mu} = 0.$$

Au moyen des simples relations p. 49., $n-1$ en nombre, on exprimera les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$ par l'une d'entre elles par exemple ε_n. On substituera les résultats pour les ε_i dans nos conditions dernières de périodicité et l'on choisira arbitrairement deux des inconnues par ex. $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ pour obtenir ensuite $4n-3$ équations à $4n-3$ inconnues $\varepsilon_1, \alpha_1, \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}; \beta_2, \beta_3 \dots \beta_{2n-1}$.

§ 4. Conditions générales des rotations et des librations des périhélies.

Motto: Johannis Keppleri, »Astronomia nova«, Pragae 1609.

Nous allons étudier les conditions fondamentales trouvées dans le paragraphe précédent. Leur importance semble être d'un intérêt principal au point de vue pratique.

En effet il doit être avantageux de distinguer les cas des rotations et des librations *dès la première étape du calcul.* Il s'agit de circonstances diamétralement opposées. J'ai eu moi-même l'occasion de pouvoir montrer (dans le cas du problème astéroïdique d'Hécube[2]) comment une telle confusion peut mener à des résultats entièrement faux et comme il a été auparavant difficile de découvrir la vraie raison des échecs des calculs.

On connait suffisamment les essais classiques de Laplace, représentant approximativement le mouvement des satellites de Jupiter. Tandisque Tisserand et Gyldén se virent obligés d'introduire les fonctions elliptiques pour l'étude de la libration, G. W. Hill et Poincaré cherchèrent à introduire, dans certains cas, les solutions périodiques à période courte. Mais c'est surtout l'emploi des équations aux variations qui est resté incompris par les maîtres mêmes et par les épigons. Les solutions à periode courte sont toujours *peu nombreuses* pour servir de base aux cas généraux qui se présentent dans la nature, en effet ces cas concrets s'en écartent beaucoup. Les centres de libration à courte période sont extrêmement clairsemés dans l'espace. Donc, les oscillations obtenues au moyen des équations aux variations ne sauraient suffire, pas même si l'on avait recours aux puissances ultérieures de ces variations, comme cela avait été proposé par divers auteurs.

Par contre si l'on prolonge la période, les choses vont se présenter sous un autre jour. Plus la période sera longue, plus les conditions initiales convenables se rencontrent fréquemment, même celles appartenants *à la même* solution séculaire. En effet, les changements d'une orbite parcourue pendant une longue période seront nécessairement plus vastes. Imaginons l'orbite séculaire, composée de révolutions particulières, pour ainsi dire, osculantes. La planète faisant par exemple cent tours pendant une période, devra passer par cent positions diverses se trouvant dans le voisinage de l'une d'entre elles. L'une quelconque de ces positions pouvant servir de point de départ on voit déjà par là, comment les conditions initiales convenables se multiplient avec la durée de période. Or nous savons que le nombre lui même, des orbites séculaires est très grand.

Je me suis toujours étonné, pourquoi au lieu d'étudier les équations aux variations de mouvements à courte période on n'avait jamais cherché les conditions initiales pour distinguer les diverses possibilités des librations et des rotations. Et en effet, ce n'était pas possible en général avant d'employer et de fixer numériquement les solutions séculaires.

Passons maintenant à la discussion des équations fondamentales.

Nous avons choisi dans le cas (I). p. 18.

$$p_1 \frac{2\pi}{n_1^0} = p_2 \frac{2\pi}{n_2^0} = \ldots = p_n \frac{2\pi}{n_n^0} = T'_1$$

$$\frac{\varkappa n_1^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2}, \quad \frac{\varkappa n_2^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4}, \ldots \quad \frac{\varkappa n_{n-1}^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}}.$$

En normalisant et mettant en évidence les paramètres qui y figurent, nous écrivons ces conditions sous la forme

$$\Phi_1 (\varkappa, e_1, e_2, \ldots e_n) = 0, \Phi_2 (\varkappa, e_1, e_2 \ldots e_n) = 0 \ldots \Phi_{n-1} (\varkappa, e_1, e_2 \ldots e_n) = 0$$

Donc il s'agit des $n-1$ équations renfermant $n+1$ paramètres arbitraires soit les excentricitées des orbites de n planètes et le paramètre de périhélie $\varkappa$. Ainsi si l'on fixe le paramètre de périhélie en accord avec le mouvement obtenu par les observations. on obtiendra $n-1$ équations avec n inconnues. Si ces équations peuvent être satisfaites de sorte que les excentricités trouvées restent dans les cercles de convergence (admissibles par le critère analogue à celui de Sundman,[19]) la question sera tranchée dans toute son étendue.

Une des excentricités restera donc arbitraire.

Il y aura la rotation des périhélies la plus générale, le cas (I), p. 20. On traitera semblablement le cas des conditions (II), p. 21. et dont le sens géométrique a été mentionné plus haut.

Les conditions de rotation commune s'écriront cette fois

$$p_1 \frac{2\pi}{n_1^0} = p_2 \frac{2\pi}{n_2^0} = \ldots = p_n \frac{2\pi}{n_n^0} = T_1,$$

$$\frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2}, \quad \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4}, \ldots \quad \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}}.$$

En mettant en évidence les paramètres, on aura encore $n-1$ équations renfermant $n+1$ inconnues. Ainsi, si l'on fixe le paramètre des périhélies en accord avec les observations, on obtiendra $n-1$ équations renfermant n inconnues.

Une des excentricités restera donc arbitraire.

Mais dans la pratique on n'aura qu'à étudier les cas plus généraux, analogues à (I) et (II) c'est-à-dire, les cas désignés auparavant par (IV) et (V), ou plutôt seulement le cas le plus général mixte (VII).

[19]) Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar Bd. LVIII. 1915—1916, Afd. A. N:o 24, p. 18.

Écrivons donc les conditions qui s'y ratachent (32)

$$\frac{\varkappa_1 n_1^0}{1+\varkappa_1} = \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{groupe (IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} &= \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_4} \\ \frac{\varkappa n_n^0}{1+\varkappa} &= \mu \frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2n-2}} \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{groupe (V)}$$

$$\frac{\partial [F_1]}{\partial x_6} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{groupe (VI) etc.}$$

Les conditions ainsi fixées donnent la clef d'un vrai »*mystère cosmographique*«. En effet, en les résolvant on aura trouvé les conditions pour tous les mouvements compliqués des corps, soit dans un système des planètes principales, soit d'une famille des satellites groupés autour d'une planète régeante, ou enfin des corps d'un système des étoiles multiples.

Pour étudier les dites conditions on passera avec avantage aux variables Képlériennes. On aura donc:

$$-\frac{\partial [F_1]}{\partial x_{2k}} = \mu \left(\frac{\partial [F_1]}{\partial G_k} - \frac{\partial [F_1]}{\partial G_n}\right) = -\frac{\sqrt{1-e_n^2}}{\beta''_k e_k \sqrt{a_k}} \frac{\partial [F_1]}{\partial e_k} + \frac{\sqrt{1-e_n^2}}{\beta''_n e_n \sqrt{a_n}} \frac{\partial [F_1]}{\partial e_n}$$

$[F_1]$ désignant la partie séculaire bien connue (les termes critiques y inclus) de la fonction perturbatrice, développée par Le Verrier.

Il y aura cette fois $n-1$ conditions contenant les inconnues

$$e_1,\ e_2, \ldots e_n;\ \varkappa_1,\ \varkappa_n,\ \varkappa \text{ etc.}$$

On aura à examiner la question de réalité de paramétres e_l satisfaisant aux conditions pour les petites valeurs des $\varkappa_l$. Prenons pour fixer les idées le cas le plus simple des trois corps, étudié dans le mémoire précédent [1]) p. 19.

Pour discuter la condition pour la rotation séculaire de la différence des longueurs des périhélies

$$\frac{\varkappa n''_0}{1+\varkappa} = f(e, e') = -\mu^2 \left\{\frac{\partial [F_1]}{\partial G} - \frac{\partial [F_1]}{\partial G'}\right\}$$

on s'appuyera sur les résultats bien connus, rélatifs aux solutions à période courte de Poincaré.

Nous allons exclure les points singuliers de la fonction $f(e_0, e'_0) = 0$.

En partant d'un point réel de la fonction $f(e_0, e'_0) = 0$, on aura en général ou bien $\frac{\partial f(e_0, e'_0)}{\partial e} \gtrless 0$ ou bien $\frac{\partial f(e_0, e'_0)}{\partial e'_0} \gtrless 0$ Fixons sans restreindre la généralité le cas premier. En retenant e'_0 fixé on voit de suite

la possibilité du développement *réel*

$$e - e_0 = a_1 \varkappa + a_2 \varkappa^2 + \ldots$$

Dans le cas général qui nous occupe dans le mémoire présent, on aura à retenir fixée la valeur de l'une des excentricités par ex. e_1 et à s'assurer que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots f_{n-1})}{\partial (e_2, e_3, \ldots e_n)} \gtrless 0,$$

(f_k désignent les deuxièmes membres des équations). (32)

Ensuite on pourra admettre les valeurs, réelles pour les excentricités, aussi au voisinage immédiat, c'est-à-dire, pour les petites valeurs prescrites des $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ etc.

Il va sans dire que la résolution numérique des conditions fixées ci-dessus s'opérera inversement.

Dans le cas des grosses planètes de notre système solaire, il faudra naturellement supposer connus, les mouvements séculaires, rotatoires des périhélies, les vitesses resp. les nombres des tours pendant une période complète, celle-ci embrassant plusieurs centaines de miliers des années Juliennes.

»Ne pouvant pas attendre si longtemps« que les observations s'accumulent, il sera plus avantageux de s'appuyer dans le premier essai, sur les résultats bien connus de Lagrange-Stockwell.

On fixera à cet effet un système des excentricités, constituées par *les excentricités moyennes* observées. Ce sont surtout les excentricités des plus grandes de nos huit planètes principales qu'on devra conformer le mieux aux observations. En effet, elles ne sont que peu variables sous l'influence de l'attraction des autres planètes dont les masses sont (supposées) beaucoup plus petites.

Avec ces données on calculera déjà les valeurs des paramètres des périhélies, en choisissant approximativement des nombres rationnels, donnant une fraction, qui se trouve dans le voisinage de $\varkappa_\nu$.

On confrontera ensuite les résultats obtenus pour les rotations séculaires des périhélies avec les quantités observées (ou tirées provisoirement de la théorie de Lagrange-Stockwell).

Puis on choisira pour le paramètre l'une des excentricités (par exemple celle de l'orbite de la planète de moindre masse) et on la changera successivement et répétera la confrontation avec les »observations«, en calculant — au besoin — des tables numériques, indiquant les valeurs des paramètres de périhélies correspondants. Après avoir choisi les valeurs

les plus conformes aux observations, on pourra négliger les petits écarts de la réalité. On tiendra compte parfaitement de ces derniers en particularisant convenablement les constantes d'intégration des équations aux variations.

Nous avons exposé assez clairement comment — en résolvant les conditions numériques — on parviendra à une multiple infinité très variée, des centres des librations et rotations, existant dans les cercles de convergence. En choisissant un centre convenable et en l'adaptant au moyen des nombreux paramètres arbitraires, le mieux possible aux circonstances concrètes de la nature on pourra poursuivre tous les cas divers de la théorie des perturbations séculaires de Lagrange-Stockwell. Inutile d'ajouter que les petites déviations émanant de l'abstraction qu'une telle opération — aussi parfaite qu'elle soit — doit représenter, s'étudieront au moyen de soi-disantes équations aux variations, bien connues, de la mécanique classique.

Un tel procédé sera sans contredit plus avantageux que les méthodes anciennes. En effet, les solutions séculaires jouissent pour ainsi dire d'innombrales paramètres, c'est-à-dire d'une, extrême densité des circonstances favorables, facilitant leur existence, appartenant à leurs positions initiales. La solution idéale servant de point de départ pourra toujours être rapprochée du cas concret de la nature — et cela dès la première étape du calcul.

C'est ainsi que l'emploi des équations aux variations sera plus court et plus justifié qu'il ne l'était dans les méthodes anciennes, opérant avec les solutions à période courte.

J'imagine déjà, d'après les résultats exposés plus haut, qu'on pourrait *essayer d'éviter totalement l'emploi des méthodes à la Newcomb-Lindstedt,* développées pour notre but, de l'étude des changements séculaires, et si magistralement exposées dans le deuxième tome des Méthodes nouvelles de la mécanique céleste par H. Poincaré. En ce qui concerne les possibilités de construire les expressions analytiques des formes diverses des mouvements séculaires des apsides, je n'ai qu'à renvoyer aux théorèmes I—VII, énoncés et démontrés plus haut, ainsi qu'aux remarques insérées plus haut dans le paragraphe présent.

A suivre.

Errata

du mémoire précédent: Nouvelles classes des solutions séculaires du problème général des trois corps Publications de la faculté des sciences de l'Université Charles. Nro 15. (Publications de l'Institut astronomique Série II. Nro 1)

Page:	série:	au lieu de:	lisez:
4.	15.	l'éxcentricité	l'excentricité
4.	15 en remont.	aproximativement	approximativement
6.	1 et 2	F_0	F_0''
6.	4 en remont.	F_0	F_0''
6.	3	$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$	$\alpha_1'', \beta_1'', \alpha_2'', \beta_2''$
7.	6 en remont.	le période	la période
8.	16 en remont.	dt.	partout $d\tau$
11.	4 en remont.	t	le facteur t est partout à supprimer
13.	7	F'	F_1
14.	11	t	τ
15.	5 en remont.	$(-\varrho's)$	$\sum(-\varrho's)$
18.	1 en remont.	β_1	β_1''
19.	1	β_1	β_1''
19.	3 en remont.		les mots „en général" sont à supprimer
20.	1—3		l'interprétation entière à supprimer
20.	20 en remont.	Le périhélie	Le périhélie π'
20.	15 en remont.	„	„ π'
20.	14 en remont.	„	„ π
23.	12—13		à supprimer la dernière proposition Nous avons .... de rotation séculaire
24.	4	dans la II et III colonne du déterminant au lieu de $+\bar{n}_0, \bar{n}'_0$	$-n_0 \quad -n'_0$
25.	12		ajoutez: en négligeant bien entendu les termes périodiques.
26.	3	restreint Dans	restreint, dans
26	5	$\varkappa$	$n'\varkappa$
26.	11 en remont.	$\varkappa$	$n'\varkappa$
26.—28.			voir la rectification[18]) pag. 28.—29. du mém. présent
27.	13 en rem.	indépendant	dépendant
29.	1	β_1	β_1''
		β_1'	β_2''
		$\ldots . = \mu$	$\ldots . \mu =$
		$-f, +kn''_0$	$-f, -\varkappa n''$.


BOUND BY
HNM


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 110990683